ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
IX (1960)

Sur un problème non linéaire de Hilbert

par W. Żakowski (Warszawa)

1. Introduction. Soit dans le plan de la variable complexe un ensemble $P = \sum_{\sigma} \widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}$ de points, composé d'un nombre fini d'arcs simples $\widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}$ et un ensemble $\mathcal{C} = \sum_{\varrho} \mathcal{C}_\varrho$ de lignes fermées de Jordan. Les extrémités des arcs $\widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}$ peuvent appartenir à un seul arc, ou bien être communes à plusieurs arcs différents. En tout cas, les arcs $\widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}$ et les lignes $\mathcal{C}_\varrho$ n'ont pas de points intérieurs communs. Désignons par $c_1, c_2, \ldots, c_p$ les extrémités des arcs donnés. Nous supposons que les arcs $\widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}$ et les contours $\mathcal{C}_\varrho$ ont des tangentes continues en tout point, même aux extrémités. Les points $c_1, c_2, \ldots, c_p$ sont donc soit des points anguleux, soit des points de rebroussement, ou des points multiples, ou enfin de simples extrémités des lignes formées par les arcs donnés.

Nous admettons que tout arc $\widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}$ et tout contour $\mathcal{C}_\varrho$ a une direction individuelle, fixée indépendamment des autres lignes.(¹) L'ensemble $L = \mathcal{C}+P$ entoure les domaines finis $S_1, S_2, \ldots,$ et le domaine infini S_{ext}.

Les problèmes aux limites de Hilbert discontinus et non linéaires pour un système de fonctions et pour un ensemble d'arcs P ont été posés et étudiés pour la première fois par W. Pogorzelski [4]. Les problèmes aux limites discontinus et linéaires pour l'ensemble $L = \mathcal{C}+P$ ont été étudiés par W. Żakowski [2].

Dans le présent travail, nous étudierons les problèmes aux limites de Hilbert discontinus et non linéaires pour un système de fonctions et pour l'ensemble des lignes $L = \mathcal{C}+P$, sous des hypothèses un peu plus générales que dans le travail [4] et par une méthode analogue. Nous énoncerons d'abord les définitions des classes de fonctions complexes discontinues, définies sur l'ensemble de points $L = \mathcal{C}+P$, données par W. Pogorzelski (voir [1]).

(¹) On admet que les deux côtés, positif et négatif, de toute coupure sont avec la direction positive de la coupure dans la même relation que les demi-plans $\operatorname{im} z > 0$ et $\operatorname{im} z < 0$ avec la direction positive de l'axe réel.

DÉFINITION. On appelle classe $\mathfrak{H}_a^\mu(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$ l'ensemble de toutes les fonctions complexes $\varphi(t)$, définies en tout point t de l'ensemble L, distinct des points de discontinuité $c_1, c_2, \ldots, c_p$ qui vérifient les inégalités suivantes

$$|\varphi(t)| < \frac{\text{const}}{\prod_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^{\theta_\sigma a}} \quad \text{et} \quad |\varphi(t)-\varphi(t_1)| < \frac{\text{const}\,|t-t_1|^\mu}{W(t, t_1)}$$

à l'intérieur de tout arc $\widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}$ composant de P, le point t_1 étant situé sur l'arc $\widehat{tc_{\sigma'}}$ (si $c_\sigma \neq c_{\sigma'}$ pour l'arc $\widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}$), et $|t-c_\sigma| \leqslant |t-c_{\sigma'}|$ (si $c_\sigma = c_{\sigma'}$ pour l'arc $\widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}$),

$$W(t, t_1) = \begin{cases} |t-c_\sigma|^{\theta_\sigma a+\mu} |t_1-c_{\sigma'}|^{\theta_{\sigma'} a+\mu}, & \text{si} \quad c_\sigma \neq c_{\sigma'}, \\ |t-c_\sigma|^{\theta_\sigma a+\mu}, & \text{si} \quad c_\sigma = c_{\sigma'}. \end{cases}$$

On admet que les paramètres réels a et μ, fixés pour la classe donnée, vérifient les inégalités

$$0 \leqslant a < 1, \quad 0 < \mu < 1, \quad a+\mu < 1;$$

on a $\theta_\sigma = 0$ si $\sigma = k_1, k_2, \ldots, k_q$ et $\theta_\sigma = 1$ si $\sigma \neq k_1, k_2, \ldots, k_q$, $0 \leqslant q \leqslant p$; $\theta_{\sigma'}$ admet des valeurs analogues relativement au point $c_{\sigma'}$. Si $t, t_1 \in \mathcal{C}_\varrho$, nous supposons que $c_\sigma = c_{\sigma'} = c^*$, où c^* est un point de discontinuité fixé arbitrairement.

Observons que les fonctions de classe $\mathfrak{H}_a^\mu(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$ vérifient pour $t, t_1 \in \mathcal{C}_\varrho$ la condition de Hölder, sont bornées aux voisinages des points de discontinuité distingués $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$ et n'ont pas nécessairement de limites unilatérales aux points distingués.

Les propriétés des classes $\mathfrak{H}_a^\mu(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$ ont été étudiées dans les travaux [1], [2], [4].

2. Enoncé du problème. Le problème non linéaire de Hilbert généralisé, pour un système d'arcs, consiste à trouver un système de fonctions de la variable complexe $\Phi_1(z), \ldots, \Phi_n(z)$ de classe $h(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$ dont chacune serait holomorphe dans les domaines $S_1, S_2, \ldots, S_{\text{ext}}$ séparément et dont les valeurs limites $\Phi_\nu^+(t)$, $\Phi_\nu^-(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, satisferaient en tout point t de l'ensemble $L = \mathcal{C}+P$, excepté aux extrémités c_σ des arcs, aux relations

$$(1)\quad \Phi_\nu^+(t) = G_\nu(t)\Phi_\nu^-(t)+\lambda F_\nu[t, \Phi_1^+(t), \ldots, \Phi_n^+(t), \Phi_1^-(t), \ldots, \Phi_n^-(t)]+g_\nu(t),$$

où $G_\nu(t)$, $F_\nu(t, u_1, \ldots, u_{2n})$ et $g_\nu(t)$ sont des fonctions données et λ un paramètre.

On admet les hypothèses suivantes:

1° Les fonctions complexes $G_\nu(t)$ sont définies pour $t \in L$ (excepté aux extrémités c_σ), différentes de zéro et satisfont à la condition de Hölder

$$(2)\quad |G_\nu(t)-G_\nu(t_1)| < k_G |t-t_1|^{h_G},$$

où k_G est une constante positive et l'exposant h_G une constante positive non supérieure à l'unité. Les points t et t_1 sont situés à l'intérieur d'une même ligne arbitraire de l'ensemble $L = \mathcal{C}+P$. Nous supposons notamment que

$$(3)\quad \lim_{t_j \to c_\sigma} G_\nu^j(t_j) = G_\nu^j(c_\sigma) \neq 0, \quad |G_\nu^j(c_\sigma)| < \infty,$$

où t_j, $j = 1, 2, \ldots, r_\sigma$, sont des points situés à l'intérieur des arcs convergents vers le point c_σ, ou divergents à partir de ce point ($r_\sigma \geqslant 1$).

2° Les fonctions complexes $F_\nu(t, u_1, u_2, \ldots, u_{2n})$ sont définies dans la région $t \in L$ ($t \neq c_\sigma$), $u_j \in \Pi$, $j = 1, 2, \ldots, 2n$, (Π désignant le plan entier de la variable complexe) vérifient l'inégalité généralisée de Hölder-Lipschitz:

$$(4)\quad |F_\nu(t, u_1, \ldots, u_{2n})-F_\nu(t', u_1', \ldots, u_{2n}')| < k_F\left[\frac{|t-t'|^{h_F}}{W(t, t_1)} + \sum_{j=1}^{2n} |u_j-u_j'|\right],$$

où $W(t, t_1)$ est définie dans l'introduction de notre travail et, en outre, l'inégalité

$$(5)\quad |F_\nu(t, u_1, \ldots, u_{2n})| < k_F \sum_{j=1}^{2n} |u_j| + \frac{m_F}{\prod_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^{\theta_\sigma a}}.$$

Les points t et t_1 sont situés à l'intérieur de la même ligne arbitraire (arcs $\widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}$ si $t, t_1 \in P$, mais on a toujours $t_1 \in \widehat{tc_{\sigma'}}$ si $c_\sigma \neq c_{\sigma'}$ et $|t-c_\sigma| \leqslant |t_1-c_{\sigma'}|$ si $c_\sigma = c_{\sigma'}$, voir [2]).

Nous supposons que $0 < h_F \leqslant 1$, $a+\mu < 1$, $\mu < \min(h_G, h_F)$; k_F, m_F sont des constantes positives données, $\theta_v = 0$ si c_v coïncide avec l'une des extrémités $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$, et $\theta_v = 1$ dans le cas contraire ($v = \sigma, \sigma'$).

3° Les fonctions $g_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, sont de classe $\mathfrak{H}_a^{\mu'}(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$ pour $t \in L$, $\mu' \geqslant h_F$.

3. Résolution du problème par la méthode topologique. D'après les travaux [1] et [2], nous pouvons affirmer que la solution $\Phi_1(z), \ldots, \Phi_n(z)$ du problème proposé (si elle existe, et si les fonctions limites $\Phi_\nu^\pm(t)$ sont de classe $\mathfrak{H}(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$) vérifie le système d'équations

$$(6)\quad \Phi_\nu(z) = \frac{\lambda}{2\pi i} X_\nu(z) \int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau-z)}\,d\tau + \frac{X_\nu(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g_\nu(\tau)}{X_\nu^+(\tau)(\tau-z)}\,d\tau + X_\nu(z)P_\nu(z),$$

où $\varphi_\nu(t) = \Phi_\nu^+(t)$, $\varphi_{\nu+n}(t) = \Phi_\nu^-(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. $P_\nu(z)$ sont certaines fonctions entières, $X_\nu(z)$ est la solution canonique de classe $h(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$ du problème de Hilbert homogène, correspondant à la fonction $G_\nu(t)$.

En faisant tendre, dans les formules (6), le point z vers un point $t \in L$ $(t \neq c_\sigma)$ et en appliquant les formules connues de Plemelj (voir théorème 5, [2]), nous constatons que les fonctions limites $\varphi_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, 2n$, vérifient le système d'équations intégrales singulières suivant:

$$
\begin{aligned}
\varphi_\nu(t) &= \frac{\lambda}{2} F_\nu[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)] + \frac{1}{2} g_\nu(t) + \\
&\quad + \frac{\lambda}{2\pi i} X_\nu^+(t) \int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau - t)} d\tau + \\
&\quad + \frac{X_\nu^+(t)}{2\pi i} \int_L \frac{g_\nu(\tau)\, d\tau}{X_\nu^+(\tau)(\tau - t)} + X_\nu^+(t) P_\nu(t), \\
\varphi_{\nu+n}(t) &= -\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{X_\nu^-(t)}{X_\nu^+(t)} F_\nu[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)] - \frac{X_\nu^-(t)}{2X_\nu^+(t)} g_\nu(t) + \\
&\quad + \frac{\lambda}{2\pi i} X_\nu^-(t) \int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau - t)} d\tau + \\
&\quad + \frac{X_\nu^-(t)}{2\pi i} \int_L \frac{g_\nu(\tau)\, d\tau}{X_\nu^+(\tau)(\tau - t)} + X_\nu^-(t) P_\nu(t), \\
&\qquad \nu = 1, 2, \ldots, n;
\end{aligned} \tag{7}
$$

les intégrales ont le sens de la valeur principale de Cauchy. Nous étudierons le système d'équatios (7), en y traitant les fonctions $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)$ comme des inconnues et en y substituant, à la place de $P_\nu(t)$, des fonctions entières arbitraires.

On résout donc le système (7) par l'application du théorème du point invariant dû à Schauder: „Si, dans un espace de Banach, une transformation continue fait correspondre à un ensemble E de points, convexe et fermé, son sous-ensemble E' compact, il existe dans l'ensemble E au moins un point invariant de la transformation".

Soit donc un espace fonctionnel Λ composé de tous les systèmes de $2n$ fonctions complexes

$$U = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)], \tag{8}$$

définies et continues dans l'ensemble des points $L = \mathcal{C} + P$, distincts des extrémités c_σ, $\sigma = 1, 2, \ldots, p$, et vérifiant les inégalités

$$|\varphi_\nu(t)| < \frac{\text{const}}{\prod_{\sigma=1}^{p} |t - c_\sigma|^{\theta_\sigma \alpha + \mu}}. \tag{9}$$

La constante qui figure au numérateur du second membre de l'inégalité (9) prend, pour l'espace Λ, toutes les valeurs positives possibles, α et μ sont des constantes réelles fixées, à une valeur unique pour tout l'espace Λ, vérifiant les conditions 2°. Nous supposons que la constante α vérifie l'inégalité $A < \alpha < 1$, où

$$A = \max_{1 \leqslant \sigma \leqslant p} \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \Big| \lambda_\sigma^\nu + \sum_{j=1}^{r_\sigma} \alpha_\sigma^{\nu j} \Big|, \tag{10}$$

$$\alpha_\sigma^{\nu j} = \pm \mathrm{re}\left[\frac{\log G_\nu^j(c_\sigma)}{2\pi i}\right], \tag{11}$$

où le signe supérieur „+" concerne la valeur limite $G_\nu^j(c_\sigma)$ correspondant à un arc dirigé vers le point c_σ et la signe inférieur „−" la valeur $G_\nu^j(c_\sigma)$ correspondant à un arc issu du point c_σ.

On choisit les constantes entières λ_σ^ν de façon que les conditions $-1 < \alpha_\sigma^\nu + \lambda_\sigma^\nu < 1$ soient vérifiées; on a posé $\alpha_\sigma^\nu = \sum_{j=1}^{r_\sigma} \alpha_\sigma^{\nu j}$, $\sigma = 1, 2, \ldots, p$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. D'après N. Mouskhelishvili [3] les extrémités c_σ sont dites singulières, si les valeurs α_σ^ν sont entières. Aux extrémités non singulières distinguées $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$ on choisit les entiers λ_σ^ν tels que $0 < \alpha_\sigma^\nu + \lambda_\sigma^\nu < 1$. Aux extrémités singulières, les conditions $-1 < \alpha_\sigma^\nu + \lambda_\sigma^\nu < 1$ donnent les valeurs uniques $\lambda_\sigma^\nu = -\alpha_\sigma^\nu$. Pour les autres extrémités non singlières, on choisit les λ_σ^ν tels que $-1 < \alpha_\sigma^\nu + \lambda_\sigma^\nu < 0$ (nous supposons que les extrémités distinguées sont non singulières).

On définit la somme de deux points de l'espace Λ par la formule

$$[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n}] + [\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_{2n}'] = [\varphi_1 + \varphi_1', \varphi_2 + \varphi_2', \ldots, \varphi_{2n} + \varphi_{2n}'], \tag{12}$$

et le produit du point $[\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}]$ par un nombre a par la formule

$$a[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n}] = [a\varphi_1, a\varphi_2, \ldots, a\varphi_{2n}]. \tag{13}$$

Ensuite, on définit la norme $\|U\|$ du point $U = [\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}]$ par la plus grande des bornes supérieures des produits

$$\|U\| = \max_{1 \leqslant \nu \leqslant 2n} \sup_{t \in L} \Big[\prod_{\sigma=1}^{p} |t - c_\sigma|^{\theta_\sigma \alpha + \mu} |\varphi_\nu(t)|\Big], \tag{14}$$

et la distance des deux points U et V de l'espace Λ par la norme de la différence de ces points

$$\delta(U, V) = \|U - V\|. \tag{15}$$

L'espace Λ est donc *linéaire* et *normé*; en outre on peut montrer qu'il est *complet*, puisque la condition de Cauchy est à la fois nécessaire et suffisante pour qu'une suite de points de l'espace Λ soit convergente au sens de la norme (14). L'espace Λ est par conséquent un espace de Banach.

Considérons maintenant dans l'espace Λ l'ensemble E de tous les points $U = [\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n}]$ ayant les propriétés suivantes:

$$(16) \qquad \prod_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^{\theta_\sigma \alpha} \cdot |\varphi_\nu(t)| \leqslant \varrho,$$

et

$$(17) \qquad W(t, t_1) \cdot |\varphi_\nu(t) - \varphi_\nu(t_1)| \leqslant \varkappa |t-t_1|^\mu,$$

$\nu = 1, 2, \ldots, 2n$, où ϱ et $\varkappa$ sont des nombres positifs fixés arbitrairement. On suppose que le point t_1 est situé sur l'arc $\widehat{tc}_{\sigma'}$ (si $t, t_1 \in P$), et vérifie l'inégalité $|t-c_\sigma| \leqslant |t_1 - c_{\sigma'}|$ si $c_\sigma = c_{\sigma'}$.

Conformément à la définition donnée précédemment, les fonctions $\varphi_\nu(t)$ liées à l'ensemble E sont de classe $\mathfrak{H}_\alpha^\mu(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$. L'ensemble E est évidemment *fermé* et *convexe*.

En tenant compte de la forme du système d'équations proposé (7), transformons l'ensemble E par les relations

$$(18) \qquad \begin{aligned} \Psi_\nu(t) &= \frac{\lambda}{2} F_\nu[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)] + \frac{1}{2} g_\nu(t) + \\ &\quad + \frac{\lambda}{2\pi i} X_\nu^+(t) \int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau-t)} d\tau + \\ &\quad + \frac{X_\nu^+(t)}{2\pi i} \int_L \frac{g_\nu(\tau)\, d\tau}{X_\nu^+(\tau)(\tau-t)} + X_\nu^+(t) P_\nu(t), \\ \Psi_{\nu+n}(t) &= -\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{X_\nu^-(t)}{X_\nu^+(t)} F_\nu[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)] - \frac{X_\nu^-(t)}{2X_\nu^+(t)} g_\nu(t) + \\ &\quad + \frac{\lambda}{2\pi i} X_\nu^-(t) \int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau-t)} d\tau + \\ &\quad + \frac{X_\nu^-(t)}{2\pi i} \int_L \frac{g_\nu(\tau)\, d\tau}{X_\nu^+(\tau)(\tau-t)} + X_\nu^-(t) P_\nu(t), \end{aligned}$$

$\nu = 1, 2, \ldots, n$. D'après les propriétés admises, (4) et (5), des fonctions F_ν et les inégalités (16) et (17), les fonctions dans les intégrales (18) vérifient l'inégalité

$$(19) \qquad |F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)]| < \frac{2n\varrho k_F + m_F}{\prod_{\sigma=1}^{p} |\tau - c_\sigma|^{\theta_\sigma \alpha}},$$

et les inégalités de Hölder suivantes:

$$(20) \qquad |F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)] - F_\nu[\tau_1, \varphi_1(\tau_1), \ldots, \varphi_{2n}(\tau_1)]| < \frac{k_F(C' + 2n\varkappa)|\tau-\tau_1|^\mu}{W(\tau, \tau_1)},$$

où la constante positive C' est

$$(21) \qquad C' = \sup_{t, t_1 \in L} |\tau - \tau_1|^{h_F - \mu}.$$

Théorème 1. *L'ensemble transformé E' est une partie de l'ensemble E, si le module du paramètre λ est suffisamment petit.*

Démonstration. En tenant compte du théorème 3 ([4], [2]) nous concluons que les fonctions (18) sont définies et continues pour $t \in L$ ($t \neq c_\sigma$) et vérifient l'inégalité

$$(22) \qquad \begin{aligned} |\Psi_\nu(t)| &< \frac{|\lambda|}{2} G_0 \frac{2n\varrho k_F + m_F}{\prod_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^{\theta_\sigma \alpha}} + \frac{G_0 M_g}{2 \cdot \prod_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^{\theta_\sigma \alpha}} + \frac{|\lambda|}{2\pi} G_0 \frac{C_1 M_F + C_2 K_F}{\prod_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^{\theta_\sigma \alpha}} + \\ &\quad + \frac{G_0}{2\pi} \cdot \frac{C_3 M_g + C_4 K_g}{\prod_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^{\theta_\sigma \alpha}} + \frac{M_p}{\prod_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^{\theta_\sigma A}}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, 2n, \end{aligned}$$

où les constantes C_1, C_2, C_3 et C_4 sont positives et indépendantes des fonctions F_ν, M_p désigne une borne supérieure des fonctions $P_\nu(t)$ sur L, $M_g = \max_\nu M_g^{(\nu)}$, où $M_g^{(\nu)}$ figure au numérateur du second membre de l'inégalité pour $|g_\nu(t)|$, $K_g = \max_\nu k_g^{(\nu)}$, où $k_g^{(\nu)}$ figure au numérateur du second membre de l'inégalité pour $|g_\nu(t) - g_\nu(t_1)|$,

$$(23) \qquad G_0 = \max(G_0', 1), \quad \text{où} \quad G_0' = \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \sup_{t \in L} |G_\nu(t)|^{-1},$$

$$(24) \qquad M_F = 2n\varrho k_F + m_F, \qquad K_F = k_F(C' + 2n\varkappa).$$

Nous en déduisons par conséquent que les fonctions (18) vérifient une inégalité de la forme

$$(25) \qquad |\Psi_\nu(t)| < \frac{|\lambda| A_1(2n\varrho k_F + m_F) + |\lambda| A_2 k_F(C' + 2n\varkappa) + A_3 M_g + A_4 K_g + A_5 M_p}{\prod_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^{\theta_\sigma \alpha}},$$

où les constantes A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 sont positives et indépendantes des fonctions F_ν. Ensuite, d'après le théorème 3 ([2], [4]) les fonctions (18) vérifient l'inégalité:

$$(26) \qquad |\Psi_\nu(t) - \Psi_\nu(t_1)| < \frac{|\lambda| A_1'(2n\varrho k_F + m_F) + |\lambda| A_2' k_F(C' + 2n\varkappa) + A_3' M_g + A_4' K_g + A_5' M_p + A_6' K_p}{W(t, t_1)} |t-t_1|^\mu$$

où des constantes positives $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5, A'_6$ sont indépendantes des fonctions F_ν et K_p est un coefficient de Hölder concernant les fonctions $P_\nu(t)$ sur L. La transformation (18) fait donc correspondre à tout point $[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n}]$ de l'ensemble E un point $[\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{2n}]$ de l'espace Λ et toutes ses composantes $\Psi_\nu(t)$ sont aussi des fonctions de classe $\mathfrak{H}^\mu_a(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$, comme les fonctions $\varphi_\nu(t)$ pour l'ensemble E. En tenant compte des propriétés (25) et (26) de l'ensemble transformé E', nous pouvons affirmer que cet ensemble fera partie de l'ensemble E, si les constantes du problème vérifient les conditions suivantes:

$$\tag{27} \begin{gathered} |\lambda| A_1(2n\varrho k_F+m_F)+|\lambda| A_2 k_F(C'+2n\varkappa)+A_3M_g+A_4K_g+A_5M_p \leqslant \varrho, \\ |\lambda| A'_1(2n\varrho k_F+m_F)+|\lambda| A'_2 k_F(C'+2n\varkappa)+A'_3M_g+A'_4K_g+A'_5M_p+ \\ +A'_6K_p \leqslant \varkappa. \end{gathered}$$

Les constantes $\varkappa$ et ϱ étant arbitraires, nous voyons que ces inégalités seront toujours vérifiées, si le module du paramètre λ est suffisamment petit.

Le choix des constantes positives ϱ et $\varkappa$ étant arbitraire, il est naturel de profiter de cette circonstance et de choisir leurs valeurs de manière que l'intervalle permis pour la variation du module du paramètre λ soit le plus grand possible.

En supposant que ϱ et $\varkappa$ sont suffisamment grands pour qu'on ait

$$\tag{28} \begin{gathered} \varrho-A_3M_g-A_4K_g-A_5M_p>0, \\ \varkappa-A'_3M_g-A'_4K_g-A'_5M_p-A'_6K_p>0, \end{gathered}$$

nous écrivons donc les inégalités (27) sous la forme équivalente

$$\tag{29} |\lambda| \leqslant \frac{\varrho-A_3M_g-A_4K_g-A_5M_p}{A_1(2n\varrho k_F+m_F)+A_2k_F(C'+2n\varkappa)},$$

$$\tag{30} |\lambda| \leqslant \frac{\varkappa-A'_3M_g-A'_4K_g-A'_5M_p-A'_6K_p}{A'_1(2n\varrho k_F+m_F)+A'_2k_F(C'+2n\varkappa)}.$$

Si $\varkappa$ varie de la valeur $A'_3M_g+A'_4K_g+A'_5M_p+A'_6K_p$ à l'infini, $\varrho=\varrho_0$ restant fixe, le second membre de (29) diminue vers zéro et le second membre de (30) augmente de zéro vers la valeur limite $[2nA'_2k_F]^{-1}$.

Il en résulte que l'intervalle pour $|\lambda|$ aura la plus grande mesure $\lambda_0(\varrho)$, si $\varkappa$ admet une valeur $\varkappa_0$ vérifiant l'équation

$$\tag{31} \frac{\varrho-A_3M_g-A_4K_g-A_5M_p}{A_1(2n\varrho k_F+m_F)+A_2k_F(C'+2n\varkappa_0)} = \frac{\varkappa_0-A'_3M_g-A'_4K_g-A'_5M_p-A'_6K_p}{A'_1(2n\varrho k_F+m_F)+A'_2k_F(C'+2n\varkappa_0)}.$$

Nous en calculons $\varkappa_0(\varrho)$ et la valeur correspondante $\lambda_0(\varrho)$ en fonction de ϱ et vérifions, par un calcul élémentaire, que $\lambda_0(\varrho)$ tend, en augmentant, vers la limite

$$\tag{32} \lim_{\varrho\to\infty} \lambda_0(\varrho) = [2nA^*k_F]^{-1},$$

où

$$\tag{33} A^* = \tfrac{1}{2}[A_1+A'_2+\sqrt{(A_1-A'_2)^2+4A_2A'_1}].$$

Par conséquent, si le paramètre λ vérifie la condition

$$\tag{34} |\lambda| < [2nA^*k_F]^{-1}$$

il existe des valeurs positives $\varkappa$ et ϱ vérifiant les inégalités (27) et par conséquent l'ensemble E' est un sous-ensemble de l'ensemble E, quelles que soient les fonctions entières $P_\nu(z)$.

THÉORÈME 2. *La transformation de l'ensemble E par les relations* (18) *est continue dans l'espace Λ.*

Démonstration. Soit une suite arbitraire de points $U^{(m)} = [\varphi_1^{(m)}, \varphi_2^{(m)}, \ldots, \varphi_{2n}^{(m)}]$ de l'ensemble E, convergente vers un point $U=[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n}]$ de cet ensemble au sens de la norme (14), c'est-à-dire on a

$$\tag{35} \delta(U^{(m)}, U) = \max_{1\leqslant\nu\leqslant 2n} \sup_{t\in L}\Big[|\varphi_\nu^{(m)}(t)-\varphi_\nu(t)|\prod_{\sigma=1}^{p}|t-c_\sigma|^{\theta_\sigma a+\mu}\Big] \to 0, \text{ si } m\to\infty.$$

Pour démontrer le théorème, il est nécessaire et suffisant de démontrer que la suite de points $U'^{(m)} = [\Psi_1^{(m)}, \Psi_2^{(m)}, \ldots, \Psi_{2n}^{(m)}]$, transformés par les relations (18), converge vers un point $U' = [\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{2n}]$ qui correspond au point limite U par les relations (18). Dans ce but étudions la différence

$$\tag{36} \begin{aligned} &\Psi_\nu^{(m)}(t)-\Psi_\nu(t) \\ &= \frac{\lambda}{2}Y_\nu(t)F_\nu[t, \varphi_1^{(m)}(t), \ldots, \varphi_{2n}^{(m)}(t)] - \frac{\lambda}{2}Y_\nu(t)F_\nu[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)]+ \\ &\qquad +I_\nu^{(m)}(t)-I_\nu(t), \qquad \nu=1,2,\ldots,2n, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\tag{37} I_\nu^{(m)}(t) = \frac{\lambda}{2\pi i}X_\nu^+(t)Y_\nu^*(t)\int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1^{(m)}(\tau), \ldots, \varphi_{2n}^{(m)}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau-t)}d\tau,$$

$$\tag{38} I_\nu(t) = \frac{\lambda}{2\pi i}X_\nu^+(t)Y_\nu^*(t)\int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau-t)}d\tau,$$

en outre on a

$$(39)\qquad X_\nu^+(t) = X_{\nu-n}^+(t), \qquad F_\nu = F_{\nu-n}, \qquad \text{si} \quad \nu = n+1, n+2, \ldots, 2n,$$

$$(40)\qquad Y_\nu(t) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \\ -X_{\nu-n}^-(t)/X_{\nu-n}^+(t), & \text{si} \quad \nu = n+1, n+2, \ldots, 2n, \end{cases}$$

$$(41)\qquad Y_\nu^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \\ -Y_\nu(t), & \text{si} \quad \nu = n+1, n+2, \ldots, 2n. \end{cases}$$

L'étude de la première différence du second membre de l'égalité (36) est immédiate. Nous aurons notamment, d'après l'hypothèse (4),

$$(42)\quad |F_\nu[t, \varphi_1^{(m)}(t), \ldots, \varphi_{2n}^{(m)}(t)] - F_\nu[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)]| < k_F \sum_{j=1}^{2n} |\varphi_j^{(m)}(t) - \varphi_j(t)|,$$

donc, d'après l'inégalité $|Y_\nu(t)| \leqslant G_0$ et en vertu de la convergence (35) nous constatons que

$$(43)\qquad \lim_{m\to\infty} \delta(U'^{(m)}, U') = \lim_{m\to\infty} \max_{1\leqslant\nu\leqslant 2n} \sup_{t\in L} \Big[|I_\nu^{(m)}(t) - I_\nu(t)| \prod_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^{\theta_\sigma\alpha+\mu}\Big].$$

Décomposons maintenant les intégrales (37) et (38) en sommes, d'intégrales

$$(44)\qquad I_\nu^{(m)}(t) = I_{\nu P}^{(m)}(t) + I_{\nu C}^{(m)}(t), \qquad I_\nu(t) = I_{\nu P}(t) + I_{\nu C}(t)$$

étendues aux ensembles P et $\mathcal{C}$. D'après le théorème 5, [4], on a

$$(45)\qquad \lim_{m\to\infty} \max_{1\leqslant\nu\leqslant 2n} \sup_{t\in L} \Big[|I_{\nu P}^{(m)}(t) - I_{\nu P}(t)| \prod_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^{\theta_\sigma\alpha+\mu}\Big] = 0,$$

en outre on peut démontrer, comme dans le travail [5],

$$(46)\qquad \lim_{m\to\infty} \max_{1\leqslant\nu\leqslant 2n} \sup_{t\in L} \Big[|I_{\nu C}^{(m)}(t) - I_{\nu C}(t)| \prod_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^{\theta_\sigma\alpha+\mu}\Big] = 0.$$

Par conséquent, en tenant compte des propriétés (43), (44), (45), (46) et de l'inégalité

$$(47)\qquad |I_\nu^{(m)}(t) - I_\nu(t)| \leqslant |I_{\nu P}^{(m)}(t) - I_{\nu P}(t)| + |I_{\nu C}^{(m)}(t) - I_{\nu C}(t)|,$$

nous constatons que $\lim\limits_{m\to\infty}(U'^{(m)}, U') = 0$, ce qui établit le théorème 2.

Théorème 3. *L'ensemble E', transformé de l'ensemble E par les relations* (18), *est compact.*

Démonstration. Conformément à la définition, l'ensemble E' est compact si, de toute suite $\{V^{(m)}\}$ de ses points,

$$(48)\qquad V^{(m)} = [\Psi_1^{(m)}(t), \Psi_2^{(m)}(t), \ldots, \Psi_{2n}^{(m)}(t)],$$

on peut extraire une suite partielle $\{V^{(k_m)}\}$ convergente. Considérons donc sur tout arc $\widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}$ deux arcs $\widehat{c_\sigma T_\sigma}$ et $\widehat{T_{\sigma'} c_{\sigma'}}$ de longueur suffisamment petite pour que l'inégalité suivante soit vérifiée:

$$(49)\qquad \max_{1\leqslant\nu\leqslant 2n} \sup_{t\in L_\varepsilon} \Big[|\Psi_\nu^{(m)}(t)| \prod_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^{\theta_\sigma\alpha+\mu}\Big] < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tous les termes d'une suite $\{V^{(m)}\}$ de points de l'ensemble E', arbitrairement choisie; on a désigné par L_ε l'ensemble des points de tous les arcs $\widehat{c_\sigma T_\sigma}$ et $\widehat{T_{\sigma'} c_{\sigma'}}$. Remarquons qu'il est possible d'établir l'inégalité (49) grâce à la limitation (25), vérifiée par tous les points de l'ensemble E'.

Remarquons maintenant que sur l'ensemble de points $L - L_\varepsilon$, les fonctions $\Psi_\nu^{(m)}(t)$ sont bornées et, d'après (26), vérifient la condition de Hölder

$$(50)\qquad |\Psi_\nu^{(m)}(t) - \Psi_\nu^{(m)}(t_1)| < k_\Psi |t-t_1|^\mu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, 2n,$$

avec le même coefficient de Hölder k_Ψ, quel que soit m. Donc les fonctions composantes des points de la suite $\{V^{(m)}\}$ sont équicontinues et bornées dans leur ensemble sur l'ensemble de points $L - L_\varepsilon$ et, par conséquent, d'après le théorème d'Arzelà, de toute suite fonctionnelle $\{\Psi_\nu^{(m)}(t)\}$, $\nu = 1, 2, \ldots, 2n$, on peut extraire une suite partielle $\{\Psi_\nu^{(k_m)}(t)\}$ uniformément convergente dans l'ensemble de points $L - L_\varepsilon$. Il en résulte qu'à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un indice N_ε tel qu'on ait

$$(51)\qquad \max_{1\leqslant\nu\leqslant 2n} \sup_{t\in L-L_\varepsilon} \Big[|\Psi_\nu^{(k_m)}(t) - \Psi_\nu^{(k_s)}(t)| \cdot \prod_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^{\theta_\sigma\alpha+\mu}\Big] < \varepsilon, \qquad \text{si} \quad m, s > N_\varepsilon.$$

L'inégalité (49) étant vérifiée par tous les éléments de la suite $\{V^{(m)}\}$, nous en concluons que la suite $\{V^{(k_m)}\}$ de points $V^{(k_m)} = [\Psi_1^{(k_m)}, \ldots, \Psi_{2n}^{(k_m)}]$ vérifie la condition de Cauchy

$$(52)\qquad \|V^{(k_s)} - V^{(k_m)}\|$$

$$= \max_{1\leqslant\nu\leqslant 2n} \sup_{t\in L} \Big[|\Psi_\nu^{(k_m)}(t) - \Psi_\nu^{(k_s)}(t)| \prod_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^{\theta_\sigma\alpha+\mu}\Big] < \varepsilon, \qquad \text{si} \quad m, s > N_\varepsilon,$$

conformément à la définition de la norme (14). Or, l'espace Λ est complet, la condition (52) est donc suffisante pour que la suite des points $\{\Psi_\nu^{(k_m)}(t)\}$ soit convergente dans l'espace Λ, par conséquent l'ensemble transformé E' est compact.

Toutes les conditions du théorème cité de Schauder étant vérifiées, nous en concluons l'existence d'un point au moins $U^* = [\varphi_1^*(t), \varphi_2^*(t), \ldots, \varphi_{2n}^*(t)]$ dans l'ensemble E, invariant relativement à la transformation (18). Ce système de fonctions $[\varphi_1^*(t), \varphi_2^*(t), \ldots, \varphi_{2n}^*(t)]$ est une solution du système d'équations intégrales singulières (7). Les fonctions trouvées $\varphi_\nu^*(t)$ de classe $\mathfrak{H}_a^\mu(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$ vérifient la condition de Hölder (26), donc, en substituant ces fonctions dans les seconds membres des formules (6), on obtient un système de fonctions $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots, \Phi_n(z)$, holomorphes dans les domaines $S_1, S_2, \ldots, S_{\text{ext}}$ séparément, dont les valeurs limites $\Phi_\nu^+(t)$ et $\Phi_\nu^-(t)$, d'après les formules de Plemelj et le système d'équations donnée (7), vérifient le système d'équations donné (1) en tout point $t \in L$ $(t \neq c_\sigma)$.

En outre, d'après le théorème 4, [1], [2], ces fonctions sont de classe $h(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$, c'est-à-dire toutes les fonctions $\Phi_\nu(z)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, sont bornées aux voisinages des extrémités distinguées $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$ et pour les autres extrémités c_σ, elles vérifient des inégalités de la forme

$$(53) \qquad |\Phi_\nu(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c_\sigma|^\theta},$$

où θ est une constante positive inférieure à l'unité. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 4. *Si les fonctions données G_ν, F_ν et g_ν vérifient les hypothèses 1°-3°, $a > A$, où A est déterminé par (10), extrémités distinguées $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$ sont non singulières, le module du paramètre λ vérifie l'inégalité $|\lambda| < [2nA^* k_F]^{-1}$, où A^* est déterminé par (33); P_ν étant des fonctions entières arbitrairement choisies, il existe des systèmes de fonctions $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z), \ldots, \Phi_n(z)$ de classe $h(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$, holomorphes dans les domaines $S_1, S_2, \ldots, S_{\text{ext}}$ séparément, dont les valeurs limites $\Phi_\nu^+(t)$ et $\Phi_\nu^-(t)$ vérifient le système d'équations proposées (1) en tout point $t \in L$ $(t \neq c_\sigma)$. Tous les systèmes sont déterminés par les formules (6), où $P_\nu(z)$ sont les fonctions entières arbitraires et $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)$ constituent les solutions du système d'équations intégrales (7).*

4. Résolution du problème par la méthode des approximations successives. Nous démontrerons qu'il est possible d'appliquer la méthode des approximations successives aux systèmes d'équations singulières (7), en admettant certaines hypothèses plus restrictives pour les fonctions F_ν.

Observons que dans le travail [6], A. Gousséïnov, a le premier, appliqué la méthode des approximations successives à l'étude de l'équation intégrale singulière dans le cas particulier d'un segment de l'axe réel. Dans le cas d'un ensemble de p arcs non fermés dirigés $\widehat{a_\nu b_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ dans le plan de la variable complexe, les équations intégrales non linéaires à forte singularité ont été étudiées par D. Przeworska-Rolewicz dans le travail [7]. Dans le cas des équations intégrales singulières, la méthode des approximations successives exige des considérations plus délicates que pour les équations intégrales à faibles singularités.

Nous admettons les hypothèses 1°, 3° (voir l'énoncé du problème) et l'hypothèse 2* suivante (moins générale que 2°):

2*. Les fonctions complexes $F_\nu(t, u_1, \ldots, u_{2n})$ sont définies dans la région $t \in L$ $(t \neq c_\sigma)$, $u_j = \xi_j + i\eta_j \in \Pi$, $j = 1, 2, \ldots, 2n$, où Π désigne le plan entier, et satisfont dans cette région à la condition de Hölder-Lipschitz de la forme

$$(54) \qquad |F_\nu(t, u_1, u_2, \ldots, u_{2n}) - F_\nu(t_1, u_1', u_2', \ldots, u_{2n}')| < k_F\Big[|t-t_1|^{h_F} + \sum_{j=1}^{2n} |u_j - u_j'|\Big],$$

où $0 < h_F \leqslant 1$, $k_F > 0$; il en résulte l'inégalité

$$(55) \qquad F_\nu(t, u_1, u_2, \ldots, u_{2n})| < k_F \sum_{j=1}^{2n} |u_j| + m_F$$

où $m_F > 0$. Les points t, t_1 sont situés à l'intérieur des mêmes lignes arbitraires (arcs $\widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}$, si $t, t_1 \in P$, mais on a toujours $t_1 \in \widehat{t c_{\sigma'}}$ si $c_\sigma \neq c_{\sigma'}$ et $|t-c_\sigma| \leqslant |t_1 - c_{\sigma'}|$ si $c_\sigma = c_{\sigma'}$, voir [1]), $h_F \leqslant \mu'$. Posons pour $\nu = 1, 2, \ldots, 2n$ (voir (39) et (40))

$$(56) \qquad Y_\nu(t) F_\nu(t, u_1, u_2, \ldots, u_{2n}) = F_\nu^{*(\text{re})}(t, \xi_1, \ldots, \xi_{2n}, \eta_1, \ldots, \eta_{2n}) + iF_\nu^{*(\text{im})}(t, \xi_1, \ldots, \xi_{2n}, \eta_1, \ldots, \eta_{2n})$$

où $F_\nu^{*(\text{re})}$ et $F_\nu^{*(\text{im})}$ sont des fonctions réelles des variables réelles $\xi_1, \ldots, \xi_{2n}$, $\eta_1, \ldots, \eta_{2n}$ et de la variable complexe t; nous supposons que les dérivées partielles

$$(57) \qquad \frac{\partial}{\partial \xi_j} F_\nu^{*(\text{re})}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta_j} F_\nu^{*(\text{re})}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_j} F_\nu^{*(\text{im})}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta_j} F_\nu^{*(\text{im})}, \qquad j = 1, 2, \ldots, 2n,$$

existent et vérifient les inégalités:

$$(58) \qquad \Big|\frac{\partial}{\partial \beta_j} F_\nu^{*(\vartheta)}(t, \xi_1, \ldots, \xi_{2n}, \eta_1, \ldots, \eta_{2n}) - \frac{\partial}{\partial \beta_j} F_\nu^{*(\vartheta)}(t_1, \xi_1', \ldots, \xi_{2n}', \eta_1', \ldots, \eta_{2n}')\Big| < k_F'\Big[|t-t_1|^{h_F'} + K(A, t, t_1) \sum_{j=1}^{2n} (|\xi_j - \xi_j'| + |\eta_j - \eta_j'|)\Big],$$

où $k_F' > 0$, $0 < h_F' \leqslant h_G$, $(\vartheta) = (\text{re}), (\text{im})$, $\beta = \xi, \eta$, et

$$(59) \qquad K(A, t, t_1) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad A < \frac{1}{2}, \\ W(t, t_1), & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leqslant A < 1. \end{cases}$$

La constante positive A dans la définition (59), fixée pour l'ensemble des lignes $L = \mathcal{C}+P$ et pour les fonctions $G_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, est définie par l'égalité (10). Les inégalités (58) sont du type de Gousséïnov généralisé. Supposons maintenant que l'exposant α dans la fonction $W(t, t_1)$ (cf. introduction) vérifie l'inégalité $\alpha > A$, les extrémités distinguées $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$ sont non singulières, $\mu \leqslant \min(h_F', h_F)$ et

$$(60) \qquad r(A)\cdot\alpha+\mu < 1,$$

où

$$(61) \qquad r(A) = \begin{cases} 2, & \text{si} \quad A < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leqslant A < 1. \end{cases}$$

Nous admettons en outre que

$$(62) \qquad \left| \frac{\partial}{\partial \beta_j} F_\nu^{*(\vartheta)}(t, u_1, u_2, \ldots, u_{2n}) \right| < M < \infty.$$

Formons maintenant $2n$ suites infinies de fonctions

$$(63) \qquad \varphi_1^{(m)}(t), \varphi_2^{(m)}(t), \ldots, \varphi_{2n}^{(m)}(t), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

à l'aide des relations de récurrence suivantes:

$$(64) \qquad \begin{aligned} \varphi_\nu^{(k+1)}(t) = {} & \frac{\lambda}{2} F_\nu[t, \varphi_1^{(k)}(t), \ldots, \varphi_{2n}^{(k)}(t)] + \frac{1}{2} g_\nu(t) + \\ & + \frac{\lambda}{2\pi i} X_\nu^+(t) \int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1^{(k)}(\tau), \ldots, \varphi_{2n}^{(k)}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau-t)} d\tau + \\ & + \frac{X_\nu^+(t)}{2\pi i} \int_L \frac{g_\nu(\tau)}{X_\nu^+(\tau)(\tau-t)} d\tau + X_\nu^+(t) P_\nu(t), \\ \varphi_{\nu+n}^{(k+1)}(t) = {} & -\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{X_\nu^-(t)}{X_\nu^+(t)} F_\nu[t, \varphi_1^{(k)}(t), \ldots, \varphi_{2n}^{(k)}(t)] - \\ & - \frac{X_\nu^-(t)}{2X_\nu^+(t)} g_\nu(t) + \frac{\lambda}{2\pi i} X_\nu^-(t) \int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1^{(k)}(\tau), \ldots, \varphi_{2n}^{(k)}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau-t)} d\tau + \\ & + \frac{X_\nu^-(t)}{2\pi i} \int_L \frac{g_\nu(\tau)}{X_\nu^+(\tau)(\tau-t)} d\tau + X_\nu^-(t) P_\nu(t), \end{aligned}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$, où $P_\nu(t)$ sont des fonctions entières arbitrairement choisies, $X_\nu^+(t)$ et $X_\nu^-(t)$ désignent les valeurs limites aux points $t \in L$ $(t \neq c_\sigma)$ de la fonction $X_\nu(z)$ qui est la solution canonique de classe $h(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$ du problème de Hilbert homogène, correspondant à la fonction $G_\nu(t)$.

Nous supposons que les fonctions complexes $\varphi_1^{(0)}(t), \varphi_2^{(0)}(t), \ldots, \varphi_{2n}^{(0)}(t)$, sont de classe $\mathfrak{H}_\alpha^\mu(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$, sont arbitrairement choisies et satisfont aux inégalités suivantes:

$$(65) \qquad \prod_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^{\theta_\sigma \alpha}\cdot|\varphi_\nu^{(0)}(t)| \leqslant \varrho$$

et

$$(66) \qquad W(t, t_1)|\varphi_\nu^{(0)}(t)-\varphi_\nu^{(0)}(t_1)| \leqslant \varkappa\cdot|t-t_1|^\mu,$$

$\nu = 1, 2, \ldots, 2n$, où ϱ et $\varkappa$ sont des nombres positifs fixés arbitrairement (on suppose que le point t_1 est situé sur l'arc $\widehat{tc_{\sigma'}}$ (si $t, t_1 \in P$, $c_\sigma \neq c_{\sigma'}$), et vérifie l'inégalité $|t-c_\sigma| \leqslant |t_1-c_{\sigma'}|$ si $c_\sigma = c_{\sigma'}$). En s'appuyant sur le théorème 1, on peut affirmer que les fonctions (64) sont de classe $\mathfrak{H}_\alpha^\mu(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$ et vérifient les inégalités (65), (66), si le module du paramètre λ vérifie la condition de la forme (34).

Pour démontrer la convergence des suites (63), étudions les séries auxiliaires suivantes:

$$(67) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} S[\varphi^{(k+1)}-\varphi^{(k)}], \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} H[\varphi^{(k+1)}-\varphi^{(k)}],$$

où

$$(68) \qquad S[\varphi^{(k+1)}-\varphi^{(k)}] = \max_{1\leqslant\nu\leqslant 2n} \sup_{t\in L} \Big[\prod_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^{\theta_\sigma\alpha}\cdot|\varphi_\nu^{(k+1)}(t)-\varphi_\nu^{(k)}(t)|\Big],$$

$$(69) \qquad H[\Psi] = \max_{1\leqslant\nu\leqslant 2n} \max_{\gamma} \sup_{t,t_1\in L_\gamma} \left[W(A, t, t_1)\frac{|\Psi_\nu(t)-\Psi_\nu(t_1)|}{|t-t_1|^\mu}\right].$$

Nous désignons par L_γ une ligne de l'ensemble $L = \mathcal{C}+P$, et par $W(A, t, t_1)$ une fonction de la forme

$$(70) \qquad W(A, t, t_1) = \begin{cases} W(t, t_1), & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leqslant A < 1, \\ W(t, t_1)|t-c_\sigma|^{\theta_\sigma\alpha}|t_1-c_{\sigma'}|^{\theta_{\sigma'}\alpha}, & \text{si} \quad A < \frac{1}{2}, \quad t, t_1 \in \widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}, \quad c_\sigma \neq c_{\sigma'}, \\ W(t, t_1)|t-c_\sigma|^{\theta_\sigma\alpha}, & \text{si} \quad A < \frac{1}{2}, \quad t, t_1 \in \widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}, \quad c_\sigma = c_{\sigma'}, \\ 1, & \text{si} \quad A < \frac{1}{2}, \quad t, t_1 \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

D'après les relations (64), nous aurons

$$(71)\quad \varphi_\nu^{(k+1)}(t)-\varphi_\nu^{(k)}(t)$$
$$=\frac{\lambda}{2}Y_\nu(t)\{F_\nu[t,\varphi_1^{(k)}(t),\ldots,\varphi_{2n}^{(k)}(t)]-F_\nu[t,\varphi_1^{(k-1)}(t),\ldots,\varphi_{2n}^{(k-1)}(t)]\}+\frac{\lambda}{2\pi i}\times$$
$$\times Y_\nu^*(t)X_\nu^+(t)\int_L\frac{F_\nu[\tau,\varphi_1^{(k)}(\tau),\ldots,\varphi_{2n}^{(k)}(\tau)]-F_\nu[\tau,\varphi_1^{(k-1)}(\tau),\ldots,\varphi_{2n}^{(k-1)}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau-t)}d\tau,$$

où les fonctions $X_\nu^+(t)$, F_ν, $Y_\nu(t)$, $Y_\nu^*(t)$, $\nu=1,2,\ldots,2n$, sont définies par les égalités (39), (40) et (41). En posant

$$(72)\quad \delta_\nu^{(k)}(t)=Y_\nu(t)\{F_\nu[t,\varphi_1^{(k)}(t),\ldots,\varphi_{2n}^{(k)}(t)]-F_\nu[t,\varphi_1^{(k-1)}(t),\ldots,\varphi_{2n}^{(k-1)}(t)],$$

nous obtenons

$$(73)\quad \varphi_\nu^{(k+1)}(t)-\varphi_\nu^{(k)}(t)=\frac{\lambda}{2}\delta_\nu^{(k)}(t)-\frac{\lambda}{2\pi i}Y^*(t)X_\nu^+(t)\int_L\frac{\delta_\nu^{(k)}(\tau)}{Y_\nu(\tau)X_\nu^+(\tau)(\tau-t)}d\tau.$$

THÉORÈME D'HADAMARD GÉNÉRALISÉ. *Si la fonction réelle $f(t,\xi,\eta)$ des variables réelles $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_{2n})$, $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_{2n})$, $-\infty<\xi_j<+\infty$, $-\infty<\eta_j<+\infty$, $j=1,2,\ldots,2n$, et de la variable complexe $t\in L$ $(t\neq c_\sigma)$, admet les dérivées $\partial f/\partial\beta_j$ $(\beta_j=\xi_j,\eta_j,\ j=1,2,\ldots,2n)$ qui vérifient les conditions*

$$(74)\quad \left|\frac{\partial f}{\partial\beta_j}(t,\xi,\eta)-\frac{\partial f}{\partial\beta_j}(t_1,\xi',\eta')\right|$$
$$\leqslant k_f\Big[|t-t_1|^{h_f}+K(A,t,t_1)\sum_{j=1}^{2n}(|\xi_j-\xi_j'|+|\eta_j-\eta_j'|)\Big],$$

où $k_f>0$, $0<h_f\leqslant 1$ et $K(A,t,t_1)$ est définie par l'égalité (59), *on a*

$$(75)\quad f(t,\tilde\xi,\tilde\eta)-f(t,\xi,\eta)=\sum_{j=1}^{2n}(\tilde\xi_j-\xi_j)F_{\xi_j}(t,\xi,\tilde\xi,\eta,\tilde\eta)+$$
$$+\sum_{j=1}^{2n}(\tilde\eta_j-\eta_j)F_{\eta_j}(t,\xi,\tilde\xi,\eta,\tilde\eta),$$

où les fonctions $F_{\beta_j}(t,\xi,\tilde\xi,\eta,\tilde\eta)$ vérifient les inégalités suivantes:

$$(76)\quad |F_{\beta_j}(t,\xi,\tilde\xi,\eta,\tilde\eta)-F_{\beta_j}(t_1,\xi',\tilde\xi',\eta',\tilde\eta')|$$
$$\leqslant k_f\Big[|t-t_1|^{h_f}+K(A,t,t_1)\sum_{j=1}^{2n}(|\xi_j-\xi_j'|+|\tilde\xi_j-\tilde\xi_j'|+|\eta_j-\eta_j'|+|\tilde\eta_j-\tilde\eta_j'|)\Big].$$

La démonstration est analogue à celle du travail [8].

En tenant compte des formules (72) et (56), nous en concluons que

$$(77)\quad \delta_\nu^{(k)}(t)=F_\nu^{*(\mathrm{re})}(t,\tilde\xi,\tilde\eta)-F_\nu^{*(\mathrm{re})}(t,\xi,\eta)+i[F_\nu^{*(\mathrm{im})}(t,\tilde\xi,\tilde\eta)-F_\nu^{*(\mathrm{im})}(t,\xi,\eta)],$$

où $\varphi_j^{(k)}=\tilde\xi_j+i\tilde\eta_j$ et $\varphi_j^{(k-1)}=\xi_j+i\eta_j$, $j=1,2,\ldots,2n$. D'après le théorème d'Hadamard généralisé, nous écrivons donc l'égalité (77) sous la forme:

$$(78)\quad \delta_\nu^{(k)}(t)=\sum_{j=1}^{2n}(\tilde\xi_j-\xi_j)F_{\nu\xi_j}^{(\mathrm{re})}(t,\xi,\tilde\xi,\eta,\tilde\eta)+$$
$$+\sum_{j=1}^{2n}(\tilde\eta_j-\eta_j)F_{\nu\eta_j}^{(\mathrm{re})}(t,\xi,\tilde\xi,\eta,\tilde\eta)+i\Big[\sum_{j=1}^{2n}(\tilde\xi_j-\xi_j)F_{\nu\xi_j}^{(\mathrm{im})}(t,\xi,\tilde\xi,\eta,\tilde\eta)+$$
$$+\sum_{j=1}^{2n}(\tilde\eta_j-\eta_j)F_{\nu\eta_j}^{(\mathrm{im})}(t,\xi,\tilde\xi,\eta,\tilde\eta)\Big]=\delta_{\nu1}^{(k)}(t)+\delta_{\nu2}^{(k)}(t)+i[\delta_{\nu3}^{(k)}(t)+\delta_{\nu4}^{(k)}(t)].$$

Les fonctions

$$(79)\qquad F_{\nu\xi_j}^{(\vartheta)}(t,\xi,\tilde\xi,\eta,\tilde\eta)\quad\text{et}\quad F_{\nu\eta_j}^{(\vartheta)}(t,\xi,\tilde\xi,\eta,\tilde\eta),$$

$(\vartheta)=(\mathrm{re}),(\mathrm{im})$; $j,\nu=1,2,\ldots,2n$, vérifient, d'après le théorème d'Hadamard généralisé, les inégalités suivantes:

$$(80)\quad |F_{\nu\beta_j}^{(\vartheta)}(t,\xi,\tilde\xi,\eta,\tilde\eta)-F_{\nu\beta_j}^{(\vartheta)}(t_1,\xi',\tilde\xi',\eta',\tilde\eta')|$$
$$\leqslant k_F'\Big[|t-t_1|^{h_F'}+K(A,t,t_1)\sum_{j=1}^{2n}(|\xi_j-\xi_j'|+|\tilde\xi_j-\tilde\xi_j'|+|\eta_j-\eta_j'|+|\tilde\eta_j-\tilde\eta_j'|)\Big],$$

où $\beta_j=\xi_j,\eta_j$. Désignons $\varphi_\nu^{(k)}(t_1)=\tilde\xi_\nu'+i\tilde\eta_\nu'$, $\varphi_\nu^{(k-1)}(t_1)=\xi_\nu'+i\eta_\nu'$ et étudions les différences $\delta_\nu^{(k)}(t)-\delta_\nu^{(k)}(t_1)$. En posant $\Delta_1=\delta_{\nu1}^{(k)}(t)-\delta_{\nu1}^{(k)}(t_1)$ nous aurons

$$(81)\quad \Delta_1=\sum_{j=1}^{2n}(\tilde\xi_j-\xi_j)F_{\nu\xi_j}^{(\mathrm{re})}(t,\xi,\tilde\xi,\eta,\tilde\eta)-\sum_{j=1}^{2n}(\tilde\xi_j'-\xi_j')F_{\nu\xi_j}^{(\mathrm{re})}(t_1,\xi',\tilde\xi',\eta',\tilde\eta')$$
$$=\sum_{j=1}^{2n}[(\tilde\xi_j-\tilde\xi_j')-(\xi_j-\xi_j')]F_{\nu\xi_j}^{(\mathrm{re})}(t,\xi,\tilde\xi,\eta,\tilde\eta)+$$
$$+\sum_{j=1}^{2n}(\tilde\xi_j'-\xi_j')[F_{\nu\xi_j}^{(\mathrm{re})}(t,\xi,\tilde\xi,\eta,\tilde\eta)-F_{\nu\xi_j}^{(\mathrm{re})}(t_1,\xi',\tilde\xi',\eta',\tilde\eta')].$$

D'après les inégalités: $|\tilde\xi_\nu'-\tilde\xi_\nu|\leqslant|\varphi_\nu^{(k)}(t_1)-\varphi_\nu^{(k)}(t)|$, $|\xi_\nu'-\xi_\nu|\leqslant|\varphi_\nu^{(k-1)}(t_1)-\varphi_\nu^{(k-1)}(t)|$, $|\tilde\eta_\nu'-\tilde\eta_\nu|\leqslant|\varphi_\nu^{(k)}(t_1)-\varphi_\nu^{(k)}(t)|$, $|\eta_\nu'-\eta_\nu|\leqslant|\varphi_\nu^{(k-1)}(t_1)-\varphi_\nu^{(k-1)}(t)|$, $\nu=1,2,\ldots,2n$, l'inégalité

$$(82)\qquad W(t,t_1)|\varphi_\nu^{(m)}(t)-\varphi_\nu^{(m)}(t_1)|\leqslant\varkappa|t-t_1|^\mu,$$

$m = 0, 1, 2, \ldots$, les inégalités (62), (80) et enfin les formules (68), (69), nous concluons que

$$(83) \qquad H[\delta_1^{(k)}] \leqslant 2nM \cdot H[\varphi^{(k)} - \varphi^{(k-1)}] + 2nB_1(4n\varkappa+1)k_F' S[\varphi^{(k)} - \varphi^{(k-1)}],$$

où la constante B_1 est positive et ne dépend que des lignes L, h_F' et μ.

Nous obtenons des inégalités analogues pour les fonctions $\delta_{\nu 2}^{(k)}$, $\delta_{\nu 3}^{(k)}$ et $\delta_{\nu 4}^{(k)}$. Par conséquent

$$(84) \qquad H[\delta^{(k)}] \leqslant 8nM \cdot H[\varphi^{(k)} - \varphi^{(k-1)}] + 8nB_1(4n\varkappa+1)k_F' \cdot S[\varphi^{(k)} - \varphi^{(k-1)}].$$

Remarque. Observons que, d'après la démonstration du théorème d'Hadamard généralisé, les fonctions F_{β_j}, qui vérifient les inégalités (76), sont de la forme

$$(85) \qquad F_{\xi_j}(t, \xi, \tilde{\xi}, \eta, \tilde{\eta}) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \xi_j}[t, \xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_j + s(\tilde{\xi}_j - \xi_j), \tilde{\xi}_{j+1}, \ldots, \tilde{\xi}_{2n}, \tilde{\eta}]ds,$$

$$(86) \qquad F_{\eta_j}(t, \xi, \tilde{\xi}, \eta, \tilde{\eta}) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \eta_j}[t, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{j-1}, \eta_j + s(\tilde{\eta}_j - \eta_j), \tilde{\eta}_{j+1}, \ldots, \tilde{\eta}_{2n}]ds.$$

Par suite nous aurons d'après (62)

$$(87) \qquad |F_{\nu,\beta_j}^{(\vartheta)}(t, \xi, \tilde{\xi}, \eta, \tilde{\eta})| < M,$$

$(\vartheta) = (\mathrm{re}), (\mathrm{im})$; $\beta_j = \xi_j, \eta_j$. D'après l'hypothèse (54) et la définition (68) nous constatons que

$$(88) \qquad S[\delta^{(k)}] \leqslant 2nk_F G_0 \cdot S[\varphi^{(k)} - \varphi^{(k-1)}],$$

où G_0 est définie par l'égalité (23).

Les fonctions des suites (63) sont de classe $\mathfrak{H}_\alpha^\mu(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$; donc, d'après (55) et (72),

$$(89) \qquad \prod_{\sigma=1}^{p} |t - c_\sigma|^{\theta_\sigma \alpha} \cdot |\delta_\nu^{(k)}(t)| \leqslant 2G_0(2n\varrho k_F + m_F B_2),$$

où

$$(90) \qquad B_2 = \sup_{t \in L} \prod_{\sigma=1}^{p} |t - c_\sigma|^{\theta_\sigma \alpha}.$$

En outre, les fonctions $\delta_\nu^{(k)}(t)$ vérifient l'inégalité

$$(91) \qquad W(t, t_1)|\delta_\nu^{(k)}(t) - \delta_\nu^{(k)}(t_1)| \leqslant 2k_G^*(B_3 G_0 k_F + 2nG_0 k_F \varkappa + 2nk_F \varrho B_4 + m_F B_5)|t - t_1|^\mu,$$

où

$$(92) \qquad k_G^* = \max\left(1, \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \max_{\gamma} \sup_{t, t_1 \in L_\gamma} \frac{|G_\nu(t_1) - G_\nu(t)|}{|t - t_1|^\mu}\right),$$

et les constantes B_3, B_4, B_5 sont positives et ne dépendent que des lignes $L = \sum L_\gamma$.

Nous en concluons, d'après (89) et (91), que les fonctions $\delta_\nu^{(k)}(t)$ sont de classe $\mathfrak{H}_\alpha^\mu(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$; par conséquent, d'après le théorème 1, [1], [2], elles sont de classe $\mathfrak{H}_{r(A)\alpha}^\mu(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$, où $r(A)$ est défini par (61).

En appliquant le théorème 3, [1], $(r(A)\alpha > A)$, à l'intégrale (73), nous avons

$$(93) \qquad \begin{aligned} S[\varphi^{(k+1)} - \varphi^{(k)}] &\leqslant \frac{|\lambda|}{2} S[\delta^{(k)}] + |\lambda| D_1' S[\delta^{(k)}] + |\lambda| D_2 H[\delta^{(k)}], \\ H[\varphi^{(k+1)} - \varphi^{(k)}] &\leqslant \frac{|\lambda|}{2} H[\delta^{(k)}] + |\lambda| D_3 S[\delta^{(k)}] + |\lambda| D_4' H[\delta^{(k)}], \end{aligned}$$

où les constantes D_1', D_2, D_3 et D_4' ne dépendent que des lignes L. En posant $D_1 = D_1' + \frac{1}{2}$, $D_4 = D_4' + \frac{1}{2}$, nous aurons

$$(94) \qquad \begin{aligned} S[\varphi^{(k+1)} - \varphi^{(k)}] &\leqslant |\lambda| D_1 S[\delta^{(k)}] + |\lambda| D_2 H[\delta^{(k)}], \\ H[\varphi^{(k+1)} - \varphi^{(k)}] &\leqslant |\lambda| D_3 S[\delta^{(k)}] + |\lambda| D_4 H[\delta^{(k)}]. \end{aligned}$$

En tenant compte des propriétés (84), (88) et (94), nous obtenons

$$(95) \qquad S[\varphi^{(k+1)} - \varphi^{(k)}] \leqslant |\lambda|[2nk_F G_0 D_1 + 8nD_2 B_1(4n\varkappa+1)k_F'] S[\varphi^{(k)} - \varphi^{(k-1)}] + |\lambda| 8nMD_2 H[\varphi^{(k)} - \varphi^{(k-1)}],$$

et

$$(96) \qquad H[\varphi^{(k+1)} - \varphi^{(k)}] \leqslant |\lambda|[2nk_F G_0 D_3 + 8nD_4 B_1(4n\varkappa+1)k_F'] S[\varphi^{(k)} - \varphi^{(k-1)}] + |\lambda| 8nMD_4 H[\varphi^{(k)} - \varphi^{(k-1)}],$$

par conséquent les séries auxiliaires (67) convergent, si le module du paramètre λ est suffisamment petit.

En posant

$$(97) \qquad B = \max[2nk_F G_0(D_1 + D_3) + 8nB_1 k_F'(4n\varkappa+1)(D_2 + D_4), 8nM(D_2 + D_4)],$$

nous avons

$$(98) \qquad S[\varphi^{(k+1)} - \varphi^{(k)}] + H[\varphi^{(k+1)} - \varphi^{(k)}] \leqslant |\lambda| B \{S[\varphi^{(k)} - \varphi^{(k-1)}] + H[\varphi^{(k)} - \varphi^{(k-1)}]\},$$

il en résulte que la condition suffisante de convergence est de la forme

$$(99) \qquad |\lambda| < \min\left(\frac{1}{B}, \frac{1}{2nA^* k_F}\right),$$

où A^* est définie par l'égalité de la forme (33). Par conséquent, les séries fonctionnelles

$$\sum_{k=0}^{\infty} [\varphi_\nu^{(k+1)}(t) - \varphi_\nu^{(k)}(t)], \quad \nu = 1, 2, \ldots, 2n, \tag{100}$$

convergent uniformément dans tout l'ensemble fermé $L^* \subset L$ (c_σ non ϵL^*, $\sigma = 1, 2, \ldots, p$), vers les fonctions limites

$$\varphi_\nu(t) = \lim_{k\to\infty} \varphi_\nu^{(k)}(t), \quad \nu = 1, 2, \ldots, 2n, \tag{101}$$

qui sont de classe $\mathfrak{H}_\alpha^\mu(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$. Ce système de fonctions (101) constitue une solution du système d'équations intégrales singulières (7).

Nous montrerons encore que la solution obtenue du système (7) est unique dans la classe $\mathfrak{H}_\alpha^\mu(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$, les fonctions P_ν étant choisies. Supposons que le système d'équations (7) admette une autre solution $\Psi_1(t), \Psi_2(t), \ldots, \Psi_{2n}(t)$, de classe $\mathfrak{H}_\alpha^\mu(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$. Nous aurons alors l'égalité

$$\varphi_\nu(t) - \Psi_\nu(t) = \frac{\lambda}{2} Y_\nu(t)\{F_\nu[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)] - F_\nu[t, \Psi_1(t), \ldots, \Psi_{2n}(t)]\} + \tag{102}$$

$$+ \frac{\lambda}{2\pi i} Y_\nu^*(t) X_\nu^+(t) \int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)] - F_\nu[\tau, \Psi_1(\tau), \ldots, \Psi_{2n}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau - t)} d\tau,$$

$\nu = 1, 2, \ldots, 2n$, qui est analogue à (71). Il en résulte l'inégalité

$$S[\varphi - \Psi] + H[\varphi - \Psi] \leqslant |\lambda| B\{S[\varphi - \Psi] + H[\varphi - \Psi]\}. \tag{103}$$

Mais nous avons supposé que $|\lambda| B < 1$, donc on doit avoir $\varphi_\nu(t) = \Psi_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, 2n$, dans l'ensemble L ($t \neq c_\sigma$), et la solution obtenue est unique.

En substituant les fonctions (101) dans les seconds membres des formules (6), on obtient un système de fonctions $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots, \Phi_n(z)$, qui est une solution du problème non linéaire de Hilbert proposé, dont les valeurs limites $\Phi_\nu^-(t)$ et $\Phi_\nu^+(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ sont de classe $\mathfrak{H}_\alpha^\mu$ $(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$.

Les problèmes étudiés dans ce travail m'ont été suggérés par M. W. Pogorzelski; je tiens à lui exprimer mes sincères remerciements.

Travaux cités

[1] W. Pogorzelski, *Problèmes aux limites discontinus dans la théorie des fonctions analytiques*, Journal of Mathematics and Mechanics, Indiana University (sous presse) ou: Bulletin de l'Acad. Pol. d. Sc., Sér. des sci. math., astr. et phys. 7 (1959), p. 311-317.

[2] W. Żakowski, *Ciągle i nieciągle liniowe zagadnienie brzegowe Hilberta*, Biuletyn Matematyczny WAT, 1959, p. 46-65.

[3] N. I. Muskhelishvili, *Singular integral equations*, Gröningen, Holland, 1953.

[4] W. Pogorzelski, *Problème généralisé de Hilbert pour les arcs non fermés*, Ann. Sc. L'Ec. Norm. Sup., Paris, 1958, p. 201-222.

[5] — *Problème aux limites d'Hilbert généralisé*, Ann. Pol. Math. 2 (1955), p. 136-144.

[6] А. И. Гусейнов, *Об одном классе нелинейных сингулярных интегральных уравнений*, Известия Акад. Наук СССР 12 (1948), p. 193-212.

[7] D. Przeworska-Rolewicz, *Sur l'application de la méthode des approximations successives à une équation intégrale à forte singularité*, Ann. Pol. Math. 6 (1959), p. 161-170.

[8] — *Sur les systèmes d'équations intégrales singulières pour les arcs fermés*, Stud. Math. 18 (1959), p. 247-268.

Reçu par la Rédaction le 17. 12. 1959