ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
IX (1960)

# L'écart restreint des ensembles et son application

par F. Bierski (Kraków)

Ce travail constitue un abrégé de la thèse que j'ai présentée à la Faculté des Mathématiques, Physique et Chimie de l'Université Jagellonne de Cracovie pour obtenir le grade de docteur ès sciences mathématiques. Je dois le sujet de ce travail à M. le Professeur F. Leja; je me permets de lui exprimer mes affectueux remerciements pour l'aide qu'il a bien voulu me prêter.

**1. Introduction.** Soit $R$ un espace topologique, $z, \zeta, \ldots$ des points de cet espace, $\omega(z, \zeta)$ une fonction réelle continue de deux points quelconques $z$ et $\zeta$ de $R$, satisfaisant aux conditions:

$$\omega(z, \zeta) \geqslant 0, \quad \omega(z, \zeta) = \omega(\zeta, z), \quad \omega(z, z) = 0. \tag{1}$$

Une telle fonction sera dite *fonction génératrice.*

D'autre part, soit $E$ un ensemble compact, non vide, de points de $R$.

Désignons par $\zeta^{(n)}$ un système de $n > 1$ points $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ de $E$, par $V(\zeta^{(n)})$ le produit

$$V(\zeta^{(n)}) = V(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = \prod_{1 \leqslant i < k \leqslant n} \omega(\zeta_i, \zeta_k) \tag{2}$$

et par $V_n(E)$ la borne supérieure de ce produit, lorsque le système $\zeta^{(n)}$ varie arbitrairement dans $E$. Il est clair qu'il existe un système de $n$ points $\eta^{(n)} = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$ de $E$ pour lequel $V(\eta^{(n)}) = V_n(E)$. Ce système est dit $n^{\text{ième}}$ *système de points extrémaux* (*libres*) de l'ensemble $E$.

On sait que la suite

$$v_n(E) = V_n(E)^{2/n(n-1)}, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{3}$$

admet une limite non négative

$$v(E) = v(E, \omega) = \lim_{n\to\infty} V_n(E)^{2/n(n-1)}, \tag{4}$$

qu'on appelle, d'après F. Leja [1], *écart* (*libre*) de l'ensemble $E$ par rapport à la fonction génératrice $\omega(z, \zeta)$ (1).

(1) Dans le cas où $\omega(z, \zeta) = |z - \zeta|$ l'écart est dit, d'après M. Fekete, diamètre transfini de $E$ [2].

Supposons que l'ensemble $E$ soit la somme de deux ensembles compacts disjoints $E_1$ et $E_2$ et soit $\zeta^{(2n)}$ un système de $2n$ points $\zeta^{(2n)} = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{2n}\}$, dont $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ appartiennent à $E_1$ et $\zeta_{n+1}, \zeta_{n+2}, \ldots, \zeta_{2n}$ à $E_2$. Soit $V_{2n}(E_1, E_2, \omega, \frac{1}{2})$ la borne supérieure du produit $V(\zeta^{(2n)})$, lorsque le système $\zeta^{(2n)}$ varie dans $E_1+E_2$ de manière que $n$ points du système $\zeta^{(2n)}$ appartiennent à $E_1$ et $n$ à $E_2$. On sait [3] qu'il existe une limite $v(E_1, E_2, \omega, \frac{1}{2}) = \lim\limits_{n\to\infty} V_{2n}(E_1, E_2, \omega, \frac{1}{2})^{2/2n(2n-1)}$, dite écart restreint de la somme $E_1+E_2$ dans le rapport $\frac{1}{2}$.

Le but de ce travail est de généraliser la notion de l'écart $v(E_1, E_2, \omega, \frac{1}{2})$ à l'écart $v(E_1, E_2, \omega, \alpha)$, où $\alpha$ est un nombre positif quelconque appartenant à l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$, d'étudier la dépendance entre cet écart et le paramètre $\alpha$ et d'introduire une fonction extrémale définie dans $R$.

**2. Notations et propositions auxiliaires.** Soit $E$, comme plus haut, la somme de deux ensembles $E_1$ et $E_2$ compacts disjoints de l'espace topologique $R$, $\alpha$ un nombre quelconque appartenant à l'intervalle ouvert $(0,1)$ et $n$ un nombre entier plus grand que 1. Nous désignerons toujours par $n_\alpha$ le nombre entier satisfaisant à l'inégalité $n\alpha - 1 < n_\alpha \leqslant n\alpha$ et par $\zeta^{(n)}$ un système de $n$ points $\zeta^{(n)} = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n\}$ de $E$ remplissant la condition $W(n, \alpha)$, c'est-à-dire tel que $n_\alpha$ points initiaux $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n_\alpha}$, du système $\zeta^{(n)}$ appartiennent à l'ensemble $E_1$ et les points restants à $E_2$.

Soit $\omega(z, \zeta)$ la fonction génératrice définie plus haut. Le produit (2), dans lequel le système $\zeta^{(n)}$ remplit la condition $W(n, \alpha)$, sera désigné par $V(\zeta^{(n)}, \alpha)$. Désignons encore par $V_n(E_1, E_2, \omega, \alpha)$, ou plus brièvement par $V_n(\alpha)$, la borne supérieure de $V(\zeta^{(n)}, \alpha)$ lorsque $\zeta^{(n)}$ varie dans $E_1+E_2$ en remplissant toujours la condition $W(n, \alpha)$

$$V_n(\alpha) = V_n(E_1, E_2, \omega, \alpha) = \sup_{\zeta^{(n)} \epsilon E_1+E_2} V(\zeta^{(n)}, \alpha). \tag{5}$$

Comme la fonction $\omega(z, \zeta)$ est continue et les ensembles $E_1$ et $E_2$ sont compacts, la borne (5) est atteinte, c'est-à-dire il existe un système $\eta^{(n)}$ de $n$ points de $E_1+E_2$

$$\eta^{(n)} = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\} \tag{6}$$

remplissant la condition $W(n, \alpha)$, pour lequel $V_n(\alpha) = V(\eta^{(n)}, \alpha)$.

Le système (6) est dit $n^{\text{ième}}$ *système extrémal restreint* dans le rapport $\alpha$ de l'ensemble $E_1+E_2$ correspondant à la fonction $\omega(z, \zeta)$. Si $\alpha = 0$, le système (6) devient $n^{\text{ième}}$ système extrémal libre de l'ensemble $E_2$ et si $\alpha = 1$, il devient $n^{\text{ième}}$ système extrémal libre de $E_1$.

Désignons par $V_1(n)$, $V_2(n)$ et $V_{12}(n)$ les produits

$$\begin{gathered} V_1(n) = V(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n_\alpha}), \qquad V_2(n) = V(\eta_{n_\alpha+1}, \eta_{n_\alpha+2}, \ldots, \eta_n), \\ V_{12}(n) = \prod_{i=1}^{n_\alpha} \prod_{k=n_\alpha+1}^{n} \omega(\eta_i, \eta_k) \end{gathered} \tag{7}$$



et introduisons les moyennes:

$$v_n(\alpha) = V_n(\alpha)^{2/n(n-1)}, \tag{8}$$

$$\begin{gathered} v_1(n) = V_1(n)^{2/n_\alpha(n_\alpha-1)}, \qquad v_2(n) = V_2(n)^{2/(n-n_\alpha)(n-n_\alpha-1)}, \\ v_{12}(n) = V_{12}(n)^{1/n_\alpha(n-n_\alpha)}. \end{gathered} \tag{9}$$

On a la relation suivante:

$$V(\alpha) = V(\eta^{(n)} \alpha) = V_1(n) \cdot V_2(n) \cdot V_{12}(n). \tag{10}$$

Il en résulte

$$v_n(\alpha) = v_1(n)^{N_1(n)} \cdot v_2(n)^{N_2(n)} \cdot v_{12}(n)^{N_{12}(n)} \tag{11}$$

où l'on a posé

$$\begin{gathered} N_1(n) = \frac{n_\alpha(n_\alpha-1)}{n(n-1)}, \qquad N_2(n) = \frac{(n-n_\alpha)(n-n_\alpha-1)}{n(n-1)}, \\ N_{12}(n) = \frac{2n_\alpha(n-n_\alpha)}{n(n-1)}. \end{gathered} \tag{12}$$

On constante aisément que les inégalités suivantes ont lieu:

$$v_1(n) \leqslant v_{n_\alpha}(E_1), \qquad v_2(n) \leqslant v_{n-n_\alpha}(E_2) \tag{13}$$

où les moyennes $v_{n_\alpha}(E_1)$, $v_{n-n_\alpha}(E_2)$ sont définies par la formule (3).

LEMME 1. *Si $\alpha$ appartient à l'intervalle $(0,1)$ et $m$ et $n$ sont deux nombres entiers positifs remplissant les conditions $m < n$ et $1 < m - m_\alpha < m-1$ on a l'inégalité*

$$v_1(n)^{N_1(m)} \cdot v_2(n)^{N_2(m)} \cdot v_{12}(n)^{N_{12}(m)} \leqslant v_m(\alpha). \tag{14}$$

Démonstration. Introduisons les notations suivantes:

$$\begin{gathered} S = \binom{n_\alpha}{m_\alpha}\binom{n-n_\alpha}{m-m_\alpha}, \qquad S_1 = \binom{n_\alpha-2}{m_\alpha-2}\binom{n-n_\alpha}{m-m_\alpha}, \\ S_2 = \binom{n_\alpha}{m_\alpha}\binom{n-n_\alpha-2}{m-m_\alpha-2}, \qquad S_{12} = \binom{n_\alpha-1}{m_\alpha-1}\binom{n-n_\alpha-1}{m-m_\alpha-1}. \end{gathered} \tag{15}$$

Du système extrémal (6) remplissant la condition $W(n, \alpha)$ on peut extraire de $S$ manières différentes un système de $m$ points remplissant la condition $W(m, \alpha)$; désignons un de ces systèmes par $[\eta^{(m)}]_{(n,i)} = \{\eta_1^{(n)}, \eta_2^{(n)}, \ldots, \eta_m^{(n)}\}_i$, où $i = 1, 2, \ldots, S$. Alors on a les inégalités $V([\eta^{(m)}]_{(n,i)}, \alpha) \leqslant V_m(\alpha)$ pour $i = 1, 2, \ldots, S$. En multipliant ces $S$ inégalités membre à membre il vient

$$\prod_{i=1}^{S} V([\eta^{(m)}]_{(n,i)}, \alpha) \leqslant V_m(\alpha)^S.$$

Dans le premier membre de cette inégalité le facteur $\omega(\eta_l^{(n)}, \eta_k^{(n)})$, où $l \neq k$, figure $S_1$ — fois pour chaque $l, k = 1, 2, \ldots, n_a$, $S_2$ — fois pour chaque $l, k = n_a+1, \ldots, n$ et enfin $S_{12}$ — fois pour chaque $l = 1, 2, \ldots, n_a$, $k = n_a+1, \ldots, n$. On en déduit l'identité

$$(16) \qquad \prod_{i=1}^{S} V([\eta^{(n)}]_{(n,i)}, a) = V_1(n)^{S_1} \cdot V_2(n)^{S_2}\, V_{12} \cdot (n)^{S_{12}}$$

et par suite l'inégalité précédente prend la forme

$$(17) \qquad v_1(n)^{s_1} \cdot v_2(n)^{s_2} \cdot v_{12}(n)^{s_{12}} \leqslant v_m(a)^s$$

où

$$s_1 = S_1 \frac{n_a(n_a-1)}{2}, \qquad s_2 = S_2 \frac{(n-n_a)(n-n_a-1)}{2},$$

$$s_{12} = S_{12} n_a (n-n_a), \qquad s = S\frac{m(m-1)}{2}.$$

En élevant les membres de la dernière inégalité à la puissance $1/s$ on obtient l'inégalité (14), c. q. f. d.

Lemme 2. *Si* $\liminf\limits_{n\to\infty} v_n(a) = a > 0$, *on a* $\liminf\limits_{n\to\infty} v_1(n) > 0$, $\liminf\limits_{n\to\infty} v_2(n) > 0$, $\liminf\limits_{n\to\infty} v_{12}(n) > 0$ *et* $v(E_1) > 0$, $v(E_2) > 0$, *où* $v(E_1)$ *et* $v(E_2)$ *sont les écarts libres des ensembles* $E_1$ *et* $E_2$.

Démonstration. Comme $\liminf\limits_{n\to\infty} v_n(a) > 0$ et les suites $\{v_1(n)\}$, $\{v_2(n)\}$, $\{v_{12}(n)\}$ sont bornées, il résulte de (11) que $\liminf\limits_{n\to\infty} v_1(n) > 0$, $\liminf\limits_{n\to\infty} v_2(n) > 0$ et $\liminf\limits_{n\to\infty} v_{12}(n) > 0$.

En tenant compte de (13) on déduit de (11) l'inégalité

$$v_n(a) \leqslant v_{n_a}(E_1)^{N_1(n)} \cdot v_{n-n_a}(E_2)^{N_2(n)} \cdot v_{12}(n)^{N_{12}(n)}.$$

Posons $\liminf\limits_{n\to\infty} v_{12}(n) = b$. D'après (12) et (4), si $n \to \infty$ on a $N_1(n) \to a^2$, $N_2(n) \to (1-a)^2$, $N_{12}(n) \to 2a(1-a)$ et la dernière inégalité donne

$$0 < a = \liminf_{n\to\infty} v_n(a) \leqslant v(E_1)^{a^2} \cdot v(E_2)^{(1-a)^2} \cdot b^{2a(1-a)}$$

d'où il s'ensuit que $v(E_1) > 0$, $v(E_2) > 0$ et le lemme est démontré.

Il sera commode d'introduire les notations suivantes:

$$(18) \qquad u_1 = \frac{(n-n_a)(n-n_a-1)}{(m-m_a)(m-m_a-1)}, \qquad u_2 = \frac{n_a(n_a-1)}{m_a(m_a-1)},$$
$$u_{12} = \frac{(n_a-1)(n-n_a-1)}{(m_a-1)(m-m_a-1)},$$

$$(19) \qquad A = |u_{12}-u_1| + |u_{12}-u_2|, \qquad B = u_{12}-u_1+A, \qquad C = u_{12}-u_2+A,$$



$$(20) \qquad a = \frac{A}{u_{12}}, \qquad b = \frac{B}{u_1} \cdot \frac{m_a-1}{m-m_a}, \qquad c = \frac{C}{u_2} \cdot \frac{m-m_a-1}{m_a}.$$

Lemme 3. *Si les nombres entiers* $m$ *et* $n$ *satisfont aux inégalités* $m < n$, $1 < m-m_a < m-1$ *et si* $\liminf\limits_{n\to\infty} v_n(a) > 0$, *on a*

$$(21) \qquad v_n(a)^{N(n)(1+a)} \cdot v_{n_a}(E_1)^{-b} \cdot v_{n-n_a}(E_2)^{-c} \cdot M^{-2a} \leqslant v_m(a)^{N(m)},$$

*où* $N(k) = \dfrac{k(k-1)}{k_a(k-k_a)}$, $k = m$ *ou* $n$, $M = \max\omega(z, \zeta)$ *pour* $z \in E_1$, $\zeta \in E_2$.

Démonstration. Élevons les deux membres de l'inégalité (17) à la puissance $\left[1 : \binom{n_a-2}{m_a-2}\binom{n-n_a-2}{m-m_a-2}\right]$. En tenant compte de (8), (9) et (18), il vient

$$V_1(n)^{u_1} \cdot V_2(n)^{u_2} \cdot V_{12}(n)^{u_{12}} \leqslant V_m(a)^{u_1 \cdot u_2}.$$

Les quantités $A, B, C$ étant positives, on a d'après (13) et d'après l'hypothèse

$$[V_1(n)/V_{n_a}(E_1)]^B \cdot [V_2(n)/V_{n-n_a}(E_2)]^C \leqslant 1, \qquad [V_{12}(n)/M^{n_a(n-n_a)}]^A \leqslant 1.$$

En multipliant membre à membre les trois dernières inégalités et en tenant compte des égalités $u_1+B = u_2+C = u_{12}+A$ et (10), on trouve

$$V_n(a)^{u_{12}+A} \cdot V_{n_a}(E_1)^{-B} \cdot V_{n-n_a}(E_2)^{-C} \cdot M^{-An_a(n-n_a)} \leqslant V_m(a)^{u_1 \cdot u_2}.$$

Pour en déduire (21) il suffit d'élever la dernière inégalité à la puissance $\{2/[u_1 u_2 m_a(m-m_a)]\}$ et d'appliquer les notations (8), (13) et (3).

Lemme 4. *Si les nombres* $a$ *et* $a_0 > a$ *appartiennent à l'intervalle* $(0, 1)$, $n$ *est un nombre entier positif et* $n_a > 1$, *il existe deux entiers positifs* $m$ *et* $p$ *ne surpassant pas* $n$ *et remplissant les conditions*

$$(22) \qquad m_{a_0} = n_a, \qquad p - p_a = n - n_{a_0}.$$

Démonstration. La suite $\{ka_0\}$, $k = 1, 2, \ldots$, dont le premier terme est plus petit que $n_a$, tend vers l'infini; la différence de deux termes voisins étant $< 1$, l'intervalle $\langle n_a, n_a+1)$ contient au moins un des termes de la suite $\{ka_0\}$. Soit $ma_0$ le plus petit d'eux. Alors $(m-1)a_0 < n_a \leqslant ma_0$ et comme $m_{a_0}$ est aussi contenu dans l'intervalle $(ma_0-1, ma_0\rangle$ on a $m_{a_0} = n_a$. L'inégalité $m \leqslant n$ résulte immédiatement de l'hypothèse.

Pour prouver la seconde des égalités (22) il suffit d'appliquer le même raisonnement à la suite $\{k(1-a)+1\}$, $k = 1, 2, \ldots$

**3. L'écart restreint de l'ensemble $E = E_1+E_2$.**

Théorème 1. *La suite*

$$v_n(a) = V_n(a)^{2/n(n-1)}, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

*est convergente quel que soit* $a \in (0, 1)$.

Démonstration. Distinguons deux cas: 1° $\liminf_{n\to\infty} v_n(\alpha) = 0$, 2° $\liminf_{n\to\infty} v_n(\alpha) = a > 0$.

1° Nous allons démontrer que, si $\liminf_{n\to\infty} v_n(\alpha) = 0$, on a $\lim_{n\to\infty} v_n(\alpha) = 0$. Sinon on pourrait extraire de la suite $\{v_n(\alpha)\}$ deux suites partielles $\{v_{m_k}(\alpha)\}$ et $\{v_{n_k}(\alpha)\}$ telles que $m_k < n_k$ et

$$\liminf_{n\to\infty} v_n(\alpha) = \lim_{k\to\infty} v_{m_k}(\alpha) = 0\,, \qquad \limsup_{n\to\infty} v_n(\alpha) = \lim_{k\to\infty} v_{n_k}(\alpha) = a\,.$$

Si la limite $a$ était positive il résulterait de (11) pour $n = n_k$ et du fait que les suites $\{v_1(n_k)\}$, $\{v_2(n_k)\}$, $\{v_{12}(n_k)\}$ sont bornées que $\liminf_{k\to\infty} v_1(n_k) > 0$, $\liminf_{k\to\infty} v_2(n_k) > 0$, $\liminf_{k\to\infty} v_{12}(n_k) > 0$.

L'inégalité (14) donne pour $n = n_k$, $m = m_k$

$$v_1(n_k)^{N_1(m_k)}\cdot v_2(n_k)^{N_2(m_k)}\cdot v_{12}(n_k)^{N_{12}(m_k)} \leqslant v_{m_k}(\alpha)\,.$$

Lorsque $m_k\to\infty$, on a $n_k\to\infty$ et la limite inférieure du premier membre de la dernière inégalité est positive, tandis que le second tend vers zéro, ce qui est absurde. Par suite $\lim_{n\to\infty} v_n(\alpha) = 0$.

2° Dans le cas où $\liminf_{n\to\infty} v_n(\alpha) > 0$ il résulte du lemme 2 que $v(E_1) > 0$ et $v(E_2) > 0$. Supposons que

$$\limsup_{n\to\infty} v_n(\alpha) = b > a\,. \tag{23}$$

On peut alors extraire de $\{v_n(\alpha)\}$ deux suites partielles $\{v_{m_k}(\alpha)\}$ et $\{v_{n_k}(\alpha)\}$ telles que $m_k < n_k$ et $\liminf_{n\to\infty} v_n(\alpha) = \lim_{k\to\infty} v_{m_k}(\alpha) = a$, $\limsup_{n\to\infty} v_n(\alpha) = \lim_{k\to\infty} v_{n_k}(\alpha) = b$. Posons dans l'inégalité (21) $m = m_k$, $n = n_k$; il vient

$$v_{n_k}(\alpha)^{N(n_k)(1+a_k)}\cdot v_{(n_k)_\alpha}(E_1)^{-b_k}\cdot v_{n_k-(n_k)_\alpha}(E_2)^{-c_k}\cdot M^{-2a_k} \leqslant v_{m_k}(\alpha)^{N(m_k)}$$

où $a_k, b_k, c_k$ sont les valeurs des quantités (20) pour $m = m_k$, $n = n_k$. Lorsque $m_k\to\infty$, on a $n_k\to\infty$, $a_k\to 0$, $b_k\to 0$, $c_k\to 0$ et en même temps $N(m_k)\to 1/\alpha(1-\alpha)$, $N(n_k)\to 1/\alpha(1-\alpha)$; par suite la dernière inégalité donne

$$b^{1/\alpha(1-\alpha)} \leqslant a^{1/\alpha(1-\alpha)}$$

d'où il vient $b\leqslant a$, ce qui est en contradiction avec (23). Par suite $a = b$ et la suite $\{v_n(\alpha)\}$ est convergente.

La limite de la suite $\{v_n(\alpha)\}$ sera désignée par $v(E_1, E_2, \omega, \alpha)$ ou plus brièvement par $v(\alpha)$. Elle est non négative et sera appelée *écart restreint (dans le rapport $\alpha$) des ensembles $E_1$ et $E_2$*. La fonction $v(\alpha)$ est définie dans l'intervalle ouvert $(0, 1)$; nous la définirons aussi pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$



en posant, conformément à la convention adoptée dans le paragraphe 2 et à la formule (4),

$$v(0) = v(E_2, \omega) = v(E_2)\,, \qquad v(1) = v(E_1, \omega) = v(E_1)\,.$$

Finalement la fonction $v(\alpha)$ est définie dans l'intervalle fermé $\langle 0, 1\rangle$.

LEMME 5. *Si $\alpha < \alpha_0$ et si $\alpha$ et $\alpha_0$ appartiennent à l'intervalle $(0, 1)$, on a les inégalités*

$$v(\alpha) \leqslant v(\alpha_0)^{(\alpha/\alpha_0)^2}\cdot M^{1-(\alpha/\alpha_0)^2}, \tag{24}$$

$$v(\alpha_0) \leqslant v(\alpha)^{[(1-\alpha_0)/(1-\alpha)]^2}\cdot M^{1-[(1-\alpha_0)/(1-\alpha)]^2}, \tag{25}$$

*où $M = \max\omega(z, \zeta)$ pour $z, \zeta\in E_1+E_2$.*

Démonstration. Considérons le système extrémal (6) remplissant la condition $W(n, \alpha)$ et supposons que $n_\alpha > 1$; en vertu du lemme 4 à chaque nombre naturel $n$ correspond un nombre naturel $m\leqslant n$ tel que $m_{\alpha_0} = n_\alpha$. Il s'ensuit que $m - m_{\alpha_0}\leqslant n - n_\alpha$. Par suite, on peut extraire du système (6) un système de $m$ points remplissant la condition $W(m; \alpha_0)$. Soit $\bar\eta^{(m)}$ un tel système; alors

$$V_n(\alpha) \leqslant V(\bar\eta^{(m)}, \alpha_0)\cdot M^{[n(n-1)-m(m-1)]/2} \leqslant V_m(\alpha_0)\cdot M^{[n(n-1)-m(m-1)]/2}.$$

En élevant le premier et le dernier membre de cette inégalité à la puissance $2/n(n-1)$ on obtient

$$v_n(\alpha) \leqslant v_m(\alpha_0)^{m(m-1)/n(n-1)}\cdot M^{1-[m(m-1)/n(n-1)]}.$$

Lorsque $n\to\infty$, on a $m\to\infty$, $\dfrac{m}{n}\to\dfrac{\alpha}{\alpha_0}$, $\dfrac{m-1}{n-1}\to\dfrac{\alpha}{\alpha_0}$ et la dernière inégalité donne (24).

La démonstration de l'inégalité (25) est analogue.

Du lemme 5 résulte immédiatement:

THÉORÈME 2. *Si $v(\alpha_0) = 0$, où $\alpha_0$ est un nombre fixe de l'intervalle $(0, 1)$, on a $v(\alpha) = 0$ pour chaque nombre $\alpha$ de cet intervalle.*

Pour démontrer ce théorème il suffit d'appliquer l'inégalité (24) si $\alpha < \alpha_0$ et l'inégalité (25) si $\alpha_0 < \alpha$.

De (11) et (13), du lemme 2 et du théorème 2 résultent les corollaires suivants:

COROLLAIRE 1. *Si $v(E_1) = 0$ ou $v(E_2) = 0$, on a $v(\alpha) = 0$ pour chaque $\alpha\in(0, 1)$.*

COROLLAIRE 2. *Si, pour un nombre naturel $n$, le système extrémal (6) remplissant la condition $W(n; \alpha_0)$ contient deux points $(\eta_l, \eta_k)$ pour lesquels $\omega(\eta_l, \eta_k) = 0$, on a $v(\alpha_0) = 0$ et en même temps, d'après le théorème 2, $v(\alpha) = 0$ pour chaque $\alpha\in(0, 1)$.*

COROLLAIRE 3. *Si $v(\alpha_0) > 0$ où $\alpha_0$ est un nombre fixé de l'intervalle ouvert $(0, 1)$, on a $v(\alpha) > 0$ pour chaque $\alpha$ de l'intervalle fermé $\langle 0, 1\rangle$.*

**4. La continuité de la fonction $v(\alpha)$.**

THÉORÈME 3. *La fonction $v(\alpha)$ est continue* (a) *dans l'intervalle ouvert* $(0,1)$ *toujours,* (b) *dans l'intervalle fermé* $\langle 0,1\rangle$, *si* $\min\limits_{z\epsilon E_1,\,\zeta\epsilon E_2}\omega(z,\zeta)=m>0$ *et s'il existe un nombre* $\alpha_0\epsilon(0,1)$ *tel que* $v(\alpha_0)>0$.

Démonstration. (a) D'après le théorème 2, la fonction $v(\alpha)$ est continue en chaque point de l'intervalle $(0,1)$ si $v(\alpha)=0$ en un seul point de cet intervalle. Si $v(\alpha')>0$ en un point fixe $\alpha'\epsilon(0,1)$, on a, en vertu du corollaire 3, $v(\alpha)>0$ en chaque point de cet intervalle. Soit $\alpha_0$ un point quelconque, mais fixe, de l'intervalle $(0,1)$. Si $\alpha<\alpha_0$ et $\alpha\to\alpha_0$, il résulte de (24) et (25) que $\limsup\limits_{\alpha\to\alpha_0-}v(\alpha)\leqslant v(\alpha_0)\leqslant\liminf\limits_{\alpha\to\alpha_0-}v(\alpha)$ et par suite $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0-}v(\alpha)=v(\alpha_0)$. Si $\alpha>\alpha_0$ et $\alpha\to\alpha_0$, en déduit pareillement de (24) et (25) que $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0+}v(\alpha)=v(\alpha_0)$ et par suite la fonction est continue au point $\alpha_0\epsilon(0,1)$.

(b) Il reste à prouver que

$$\lim_{\alpha\to 0+}v(\alpha)=v(0)=v(E_2),\qquad \lim_{\alpha\to 1-}v(\alpha)=v(1)=v(E_1). \tag{26}$$

Lorsque $\alpha$ est un point quelconque de l'intervalle $(0,1)$ on a

$$V(x_1,\ldots,x_{n_\alpha};x_1',\ldots,x_{n-n_\alpha}')\leqslant V_n(\alpha)\leqslant V_{n_\alpha}(E_1)\cdot V_{n-n_\alpha}(E_2)\cdot\prod_{i=1}^{n_\alpha}\prod_{k=n_\alpha+1}^{n}\omega(\eta_i,\eta_k),$$

où $x_1,\ldots,x_{n_\alpha}$ est un système extrémal libre de $E_1$ et $x_1',\ldots,x_{n-n_\alpha}'$ un système extrémal libre de $E_2$, d'où l'on déduit

$$V_{n_\alpha}(E_1)\cdot V_{n-n_\alpha}(E_2)\,m^{n_\alpha(n-n_\alpha)}\leqslant V_n(\alpha)\leqslant V_{n_\alpha}(E_1)\cdot V_{n-n_\alpha}(E_2)\,M^{n_\alpha(n-n_\alpha)},$$

où $m=\min\limits_{z\epsilon E_1,\,\zeta\epsilon E_2}\omega(z,\zeta)$, $M=\max\limits_{z\epsilon E_1,\,\zeta\epsilon E_2}(z,\zeta)$.

Elevons les membres de cette inégalité à la puissance $2/n(n-1)$; en tenant compte des notations (8), (3) et (12) on obtient

$$v_{n_\alpha}(E_1)^{N_1(n)}\cdot v_{n-n_\alpha}(E_2)^{N_2(n)}\cdot m^{N_{12}(n)}\leqslant v_n(\alpha)\leqslant v_{n_\alpha}(E_1)^{N_1(n)}\cdot v_{n-n_\alpha}(E_2)^{N_2(n)}\cdot M^{N_{12}(n)}$$

d'où il vient, lorsque $n\to\infty$,

$$v(E_1)^{\alpha^2}\cdot v(E_2)^{(1-\alpha)^2}\cdot m^{2\alpha(1-\alpha)}\leqslant v(\alpha)\leqslant v(E_1)^{\alpha^2}\cdot v(E_2)^{(1-\alpha)^2}\cdot M^{2\alpha(1-\alpha)}$$

ce qui entraîne (26), et le théorème est ainsi démontré.

COROLLAIRE 4. *Si $v(E_1)=v(E_2)=0$, la fonction $v(\alpha)$ est continue dans l'intervalle fermé $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, ce qui résulte du corollaire* 1.



**5. Exemples.** On a vu que la fonction $v(\alpha)$ est toujours continue dans l'intervalle $(0,1)$; je vais donner trois exemples dans lesquels la fonction $v(\alpha)$ est discontinue aux extrémités de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$ ou continue partout dans cet intervalle.

(a) Soit $E_1$ et $E_2$ deux ensembles de points du plan de la variable $z=x+iy$ définis comme il suit:

$$E_1=(0\leqslant x\leqslant 1,\,y=2),\qquad E_2=(0\leqslant x\leqslant 2,\,y=-2).$$

Soit la fonction génératrice

$$\omega(z,\zeta)=\begin{cases}|z-\zeta|\cdot|\mathrm{im}\,z|\cdot|\mathrm{im}\,\zeta|, & \text{lorsque } z,\zeta\epsilon E_1 \text{ ou } z,\zeta\epsilon E_2,\\ 0, & \text{lorsque } z\epsilon E_1,\ \zeta\epsilon E_2.\end{cases}$$

Alors on a $v(\alpha)=0$ pour chaque $\alpha\epsilon(0,1)$, $v(0)=2=v(E_2)$, $v(1)=1=v(E_1)$ (²).

Cette fonction $v(\alpha)$ est continue dans l'intervalle $(0,1)$ et discontinue aux points $\alpha=0$ et $\alpha=1$.

(b) Soient $E_1$ et $E_2$ deux ensembles de points du plan de la variable $z=x+iy$ définis comme il suit:

$$E_1=(0\leqslant x\leqslant 2;\,y=2),\qquad E_2=(x=-2;\,0\leqslant y\leqslant 4)$$

et soit $\omega(z,\zeta)=|z-\zeta|\cdot|\mathrm{im}\,z-\mathrm{im}\,\zeta|$ la fonction génératrice. Alors $v(\alpha)=0$ si $0<\alpha\leqslant 1$. La fonction $v(\alpha)$ est discontinue au point $\alpha=0$, car $\lim\limits_{\alpha\to 0+}v(\alpha)=0$ et $v(0)=1$.

(c) Supposons que les ensembles $E_1$ et $E_2$ soient les mêmes que dans l'exemple (a) et que

$$\omega(z,\zeta)=|z-\zeta|\,e^{-|\mathrm{im}\,z-\mathrm{im}\,\zeta|}.$$

Alors, d'après le théorème 3, $v(\alpha)$ est continue dans l'intervalle fermé $\langle 0,1\rangle$. On peut prouver que $(2e)^{-2}<v(\alpha)<2$, $v(0)=\frac{1}{2}$, $v(1)=\frac{1}{4}$.

**6. Généralisation.** Soit $E$ la somme de $p\geqslant 2$ ensembles compacts et disjoints $E_1,E_2,\ldots,E_p$ de l'espace topologique $R$ et $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{p-1}$, $p-1$ nombres quelconques, mais fixes, de l'intervalle $(0,1)$ remplissant la condition

$$0<\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{p-1}<1. \tag{27}$$

D'autre part, soit $n$ un nombre naturel et $n_{\alpha_k}$ $(k=1,2,\ldots,p-1)$ la partie entière du produit $n\cdot\alpha_k$. Il est facile de voir que $0\leqslant n_{\alpha_1}+n_{\alpha_2}+\ldots+n_{\alpha_{p-1}}<n$.

(²) Les formules $v(0)=2$, $v(1)=1$ résultent du fait que le diamètre transfini d'un segment de longueur $d$ est égal à $d/4$ [5].

Nous dirons que le système de $n > 1$ points $\zeta^{(n)} = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n\}$ de l'ensemble $E = E_1 + E_2 + \ldots + E_p$ remplit la condition $W = W(n; a_1, a_2, \ldots, a_{p-1})$, si l'ensemble $E_k$ contient $n_{a_k}$ points du système $\zeta^{(n)}$ pour $k = 1, 2, \ldots, p-1$ et les points restants de ce système appartiennent à $E_p$. Soit encore $\omega(z, \zeta)$ une fonction génératrice des deux points $z$ et $\zeta$ variables dans $R$. Désignons par $V_n(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1})$ la borne supérieure du produit $\prod\limits_{1 \leqslant i < k \leqslant n} \omega(\zeta_i, \zeta_k)$, lorsque le système $\zeta^{(n)}$ varie dans l'ensemble $E$ en remplissant toujours la condition $W$. Les théorèmes 1, 2, 3 démontrés plus haut peuvent être généralisés comme il suit:

THÉORÈME 1'. *La suite*

$$V_n(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1})^{2/n(n-1)}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

*converge vers une limite non négative* $v(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1})$.

La limite $v(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1})$ est dite *écart restreint de la somme des ensembles* $E_1, E_2, \ldots, E_p$ *dans le rapport* $(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1})$.

THÉORÈME 2'. *Si* $v(a_1^0, a_2^0, \ldots, a_{p-1}^0) = 0$, *où les* $a_k^0$ *sont des nombres positifs satisfaisant à l'inégalité* (27), *on a* $v(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}) = 0$ *pour chaque système de valeurs positives* $(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1})$ *satisfaisant à* (27).

THÉORÈME 3'. *L'écart restreint* $v(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1})$ *est une fonction continue des paramètres* $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ (a) *si* $a_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, p-1)$ *et* $0 < a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1} < 1$, (b) *si* $a_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots, p-1)$ *et* $0 \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1} \leqslant 1$ *la continuité a lieu lorsque* $\min \omega(z, \zeta) = m > 0$ *pour* $z \in E_l$, $\zeta \in E_m$ $(l \neq m)$, $l, m = 1, 2, \ldots, p$ *et en même temps il existe un système de nombres positifs* $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_{p-1}^0$, *remplissant la condition* (27), *pour lesquels* $v(a_1^0, a_2^0, \ldots, a_{p-1}^0) > 0$.

**7. Une fonction extrémale.** Soit $R$ un espace topologique, $\omega(z, \zeta)$ une fonction génératrice et $E$ un ensemble compact de $R$, comme dans le paragraphe 1. Supposons l'écart (libre) $v(E, \omega)$ positif et soit $\zeta^{(n)}$ un système de points $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ de $E$, tels qu'on ait $\omega(\zeta_i, \zeta_k) \neq 0$ pour $i \neq k$, et enfin soient $z$ un point quelconque, mais fixe, de $R$ et $s_n(z, E)$ la borne inférieure de l'expression

$$s(z, \zeta^{(n)}) = \left[\prod_{i=1}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{\omega(z, \zeta_k)}{\omega(\zeta_i, \zeta_k)}\right]^{1/n(n-1)}$$

lorsque le système $\zeta^{(n)}$ varie dans l'ensemble $E$. On sait [4] que si $R$ est le plan, si $\omega(z, \zeta) = |z - \zeta|$ et l'écart $v(E, |z - \zeta|)$ est positif, alors il existe en tout point de $R$ une limite finie

$$\lim_{n \to \infty} s_n(z, E) = s(z, E). \tag{28}$$



En appliquant la méthode du travail [4] il est facile de prouver que la limite (28) existe dans le cas général, où $R$ est un espace topologique quelconque et $\omega(z, \zeta)$ une fonction génératrice quelconque, pourvu que $v(E, \omega)$ soit positif. On peut aussi prouver que la fonction limite (28) est positive, si $\omega(z, \zeta) > 0$ pour tout $\zeta \in E$ et $z$ n'appartient pas à $E$.

Supposons maintenant que $E$ soit la somme de deux ensembles compacts disjoints $E_1$ et $E_2$ dont l'écart restreint $v(a) = v(E_1, E_2, \omega, a)$ est positif. Soit $\zeta^{(n)} = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n\}$ un système de $n$ points de l'ensemble $E_1 + E_2$ remplissant la condition $W(n, a)$ et tels que $\omega(\zeta_i, \zeta_k) \neq 0$ pour $i \neq k$. Désignons par $S_n(z, a)$ la borne inférieure du produit

$$S(z, \zeta^{(n)}, a) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{\omega(z, \zeta_k)}{\omega(\zeta_i, \zeta_k)}$$

lorsque, $z$ étant fixé, le système $\zeta^{(n)}$ varie dans $E_1 + E_2$. Introduisons les moyennes

$$s_n(z, a) = S_n(z, a)^{1/n(n-1)}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

et soient $r = \min\limits_{\zeta \in E_1 + E_2} \omega(z, \zeta)$, $M = \max\limits_{\zeta_i \in E_1, \zeta_k \in E_2} \omega(\zeta_i, \zeta_k)$, $N(k) = \dfrac{k(k-1)}{k_a(k - k_a)}$ pour $k = 2, 3, \ldots$ D'autre part, soient $a, b, c$ les expressions définies par les formules (20).

LEMME 6. *Si* $v(a) > 0$ *et* $m$ *et* $n$ *sont des nombres naturels, tels que* $m < n$, $1 < m_a < m-1$ *et si* $z$ *est un point n'appartenant pas à* $E_1 + E_2$ *et tel que* $\omega(z, \zeta) > 0$ *pour tout* $\zeta \in E_1 + E_2$, *on a*

$$s_m(z, a)^{N(m)} \cdot (r/M)^{2a} \leqslant s_n(z, a)^{N(n)(1+a)} \cdot s_{n_a}(z, E_1)^{-b} \cdot s_{n-n_a}(z, E_2)^{-c}. \tag{29}$$

Démonstration. Il résulte de l'hypothèse $v(a) > 0$ et du lemme 2 que $v(E_1) > 0$, $v(E_2) > 0$ et, comme $\omega(z, \zeta) > 0$ pour tout $\zeta \in E_1 + E_2$, on a $s(z, E_1) > 0$ et $s(z, E_2) > 0$. Soit

$$x^{(n)} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \tag{30}$$

un système de $n$ points de l'ensemble $E_1 + E_2$ remplissant la condition $W(n, a)$, pour lequel on a $S_n(z, a) = S(z, x^{(n)}, a)$, et soient $S, S_1, S_2, S_{12}$ les expressions définies par les formules (15).

Si $m < n$ on peut extraire du système (30) de $S$ manières différentes un système de $m$ points remplissant la condition $W(m, a)$. Soit $[x^{(m)}]_{(n,i)}$, où $i = 1, 2, \ldots, S$, un tel système. Alors

$$S_m(z, a) \leqslant S(z, [x^{(m)}]_{(n,i)}; a) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, S.$$

En multipliant ces inégalités membre à membre et en tenant compte de l'identité

$$\prod_{i=1}^{S} S(z,[x^{(m)}]_{(n,i)},a)$$
$$=S(z,x_1,\ldots,x_{n_a})^{S_1}\cdot S(z,x_{n_a+1},\ldots,x_n)^{S_2}\left\{\prod_{i=1}^{n_a}\prod_{k=n_a+1}^{n}\frac{\omega(z,x_i)\,\omega(z,x_k)}{[\omega(x_i,x_k)]^2}\right\}^{S_{12}},$$

(analogue à l'identité (16)) on en déduit l'inégalité

$$S_m(z,a)^S$$
$$\leqslant S(z,x_1,\ldots,x_{n_a})^{S_1}\cdot S(z,x_{n_a+1},\ldots,x_n)^{S_2}\left\{\prod_{i=1}^{n_a}\prod_{k=n_a+1}^{n}\frac{\omega(z,x_i)\,\omega(z,x_k)}{[\omega(x_i,x_k)]^2}\right\}^{S_{12}}$$

ou, en élevant les deux membres à la puissance $\left[1:\binom{n_a-2}{m_a-2}\binom{n-n_a-2}{m-m_a-2}\right]$, la suivante:

$$S_m(z,a)^{u_1\cdot u_2}$$
$$\leqslant S(z,x_1,\ldots,x_{n_a})^{u_1}\cdot S(z,x_{n_a+1},\ldots,x_n)^{u_2}\left\{\prod_{i=1}^{n_a}\prod_{k=n_a+1}^{n}\frac{\omega(z,x_i)\,\omega(z,x_k)}{[\omega(x_i,x_k)]^2}\right\}^{u_{12}},$$

où $u_1$, $u_2$, $u_{12}$ sont définis par les formules (18).

Multiplions cette inégalité membre à membre par les inégalités évidentes

$$(r/M)^{2An_a(n-n_a)}\leqslant\left\{\prod_{i=1}^{n_a}\prod_{k=n_a+1}^{n}\frac{\omega(z,x_i)\,\omega(z,x_k)}{[\omega(x_i,x_k)]^2}\right\}^{A},$$

$$1\leqslant[S(z,x_1,\ldots,x_{n_a})/S_{n_a}(z,E_1)]^B\cdot[S(z,x_{n_a+1},\ldots,x_n)/S_{n-n_a}(z,E_2)]^C.$$

En tenant compte des relations entre $A, B, C, u_1, u_2, u_{12}$ définies par les formules (19) et (20), on obtient l'inégalité

$$S_m(z,a)^{u_1\cdot u_2}(r/M)^{2An_a(n-n_a)}\leqslant S_n(z,a)^{u_{12}+A}\cdot S_{n_a}(z,E_1)^{-B}\cdot S_{n-n_a}(z,E_2)^{-C}$$

d'où résulte facilement l'inégalité (29).

THÉORÈME 4. *Si $v(a)>0$, il existe en chaque point $z$ de l'espace $R$ une limite finie*

$$\lim_{n\to\infty}s_n(z,a)=\lim_{n\to\infty}S_n(z,a)^{1/n(n-1)}=s(z,a). \tag{31}$$

Démonstration. Nous allons d'abord prouver que la suite $\{s_n(z,a)\}$ est bornée lorsque $z$ et $a$ sont fixés. Soit $\eta^{(n)}=\{\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n\}$ un système extrémal restreint dans le rapport $a$ de la somme $E_1+E_2$. Alors

$$S_n(z,a)\leqslant S(z,\eta^{(n)},a)\leqslant\frac{M^{n(n-1)}}{V(\eta^{(n)},a)^2}=\frac{M^{n(n-1)}}{V_n(a)^2}$$



où $M=M(z)=\max\omega(z,\zeta)$ pour $\zeta\in E_1+E_2$. Il en résulte l'inégalité $0\leqslant\limsup_{n\to\infty}s_n(z,a)\leqslant M/v(a)^2$, ce qui prouve notre assertion.

Pour démontrer que la suite $\{s_n(z,a)\}$ est convergente fixons le point $z$ et le nombre $a\in\langle 0,1\rangle$. Deux cas peuvent se présenter: 1° L'ensemble $E_1+E_2$ contient un point $\zeta_0$, tel que $\omega(z,\zeta_0)=0$, 2° $\omega(z,\zeta)>0$ pour chaque $\zeta\in E_1+E_2$.

Dans le cas 1° la borne inférieure $S_n(z,a)$ est atteinte lorsque $\zeta_0$ est un point du système $\zeta^{(n)}$ et on a $S_n(z,a)=0$ pour chaque $n=2,3,\ldots$; par suite $\lim_{n\to\infty}s_n(z,a)=0$.

Dans le cas 2° il existe un nombre $r>0$ tel que $\omega(z,\zeta)\geqslant r$ pour tout $\zeta\in E_2+E_1$. Posons

$$\liminf_{n\to\infty}s_n(z,a)=a\leqslant b=\limsup_{n\to\infty}s_n(z,a).$$

Il suffit de prouver $b\leqslant a$. A cet effet extrayons de la suite $\{s_n(z,a)\}$ deux suites partielles $\{s_{m_k}(z,a)\}$, $\{s_{n_k}(z,a)\}$ telles qu'on ait $m_k<n_k$ et $\lim_{k\to\infty k}s_{m_k}(z,a)=b$, $\lim_{k\to\infty}s_{n_k}(z,a)=a$. Posons dans l'inégalité (29) $m=m_k$, $n=n_k$; il vient

$$s_{m_k}(z,a)^{N(m_k)}(r/M)^{2a_k}\leqslant s_{n_k}(z,a)^{N(n_k)(1+a_k)}\cdot s_{(n_k)_a}(z,E_1)^{-b_k}s_{n-(n_k)_a}(z,E_2)^{-c_k},$$

où $a_k$, $b_k$, $c_k$ sont les valeurs des quantités $a$, $b$, $c$ définies par les formules (20) pour $n=n_k$, $m=m_k$.

Faisons tendre $m_k$ vers l'infini, alors $n_k\to\infty$, $a_k\to 0$, $b_k\to 0$, $c_k\to 0$ et $N(m_k)\to 1/a(1-a)$, $N(n_k)\to 1/a(1-a)$ et la dernière inégalité donne

$$b^{1/a(1-a)}\leqslant a^{1/a(1-a)}.$$

Par suite $b\leqslant a$, ce qui prouve que la limite (31) existe.

Le théorème 4 peut être généralisé au cas où $E$ est la somme de $p\geqslant 2$ ensembles compacts disjoints $E_1, E_2, \ldots, E_p$ dont l'écart restreint $v(a_1,a_2,\ldots,a_{p-1})$ est positif.

**Travaux cités**


[1] F. Leja, *Généralisation de certaines fonctions d'ensemble*, Ann. Soc. Pol. de Math. 16 (1938), p. 41-52.

[2] M. Fekete, *Über den transfiniten Durchmesser ebener Punktmengen*, Math. Zeitschr. 32 (1930), p. 108-114.

[3] F. Leja, *Distributions libres et restreintes des points extrémaux dans les ensembles plans*, Ann. Pol. Math. 1 (1956), p. 146-156.

[4] — *Sur certaines limites relatives aux polynômes de Lagrange et aux ensembles fermés*, Bull. de l'Ac. Pol. de Sc. (1933), p. 281-289.

[5] — *Teoria funkcji analitycznych*, Warszawa 1957, p. 270-271.


*Reçu par la Rédaction le 18. 1. 1960*