Dies bedeutet aber, da a eine beliebige Ebene durch p ist, daß die Berührungsebenen in den Punkten von $\mathfrak{F}$ parallel mit p sind, d. h. der von diesen Ebenen eingehüllte, mit p parallele Erzeugenden besitzende Zylinder berührt die Indikatrix in den Punkten der Kurve $\mathfrak{F}$. Daher berührt ein beliebiger umschriebener Zylinder die Indikatrix in einer ebenen Kurve. Eine Eifläche aber — unsere Indikatrix ist eine Eifläche — die von jedem umschriebenen Zylinder längs einer ebenen Kurve berührt wird, ist nach einem Satz von Blaschke(7) ein Ellipsoid. Damit ist unser Satz bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, Leipzig 1916.

[2] H. Busemann, *The foundations of Minkowskian geometry*, Comm. Math. Helv. 24 (1950), S. 156-187.

[3] S. Gołąb und L. Tamássy, *Eine Kennzeichnung der euklidischenEbene unter den Minkowskischen Ebenen*, Publ. Math. Debrecen. 7 (1960), S. 187-194.

[4] J. Radon, *Über eine besondere Art ebener konvexer Kurven*, Abh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig 68 (1916), S. 123-128.

(7) Siehe W. Blaschke [1], Seite 157-159.

Reçu par la Rédaction le 1. 9. 1959

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
IX (1960)

Sur l'existence et l'unicité des solutions d'un problème de Mlle Z. Szmydt relatif à l'équation de la corde vibrante en fonction de la position du point initial

par A. Lasota (Kraków)

Mlle Z. Szmydt [2] a posé pour l'équation

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \tag{1}$$

un problème aux limites général S, qui consiste à déterminer une solution de l'équation (1) satisfaisant aux conditions données

$$\begin{aligned} u_x\big(x, \alpha(x)\big) &= g\Big(x, u\big(x, \alpha(x)\big), u_y\big(x, \alpha(x)\big)\Big), \\ u_y\big(\beta(y), y\big) &= h\Big(y, u\big(\beta(y), y\big), u_x\big(\beta(y), y\big)\Big), \end{aligned} \qquad u(x_0, y_0) = u_0. \tag{2}$$

L'existence et l'unicité des solutions du problème S dépendent évidemment des propriétés des fonctions f, g, h, α, β et de la position du point $P_0(x_0, y_0)$. Dans la présente note nous considérons cette dernière dépendance.

1. Nous nous bornons — pour simplifier — au problème S_1 qui constitue un cas particulier du problème S.

Problème S_1. Soient $F(x, y)$, $G(x, u)$, $H(y, u)$, $\alpha(x)$ et $\beta(y)$ des fonctions définies et continues pour

$$|x| \leqslant A, \quad |y| \leqslant B, \quad u \text{ — quelconque}$$

et satisfaisant aux conditions

$$|\alpha(x)| \leqslant B, \quad |\beta(y)| \leqslant A.$$

Soit encore Π le rectangle défini par les conditions:

$$|x| \leqslant A, \quad |y| \leqslant B.$$

Enfin soient u_0 un nombre réel quelconque et $P_0(x_0, y_0)$ un point arbitraire de Π.

Cela posé, on cherche une fonction $u(x, y)$ admettant des dérivées u_x, u_y, u_{xy} continues dans le rectangle Π et satisfaisant à l'équation

$$u_{xy} = F(x, y) \tag{3}$$

et aux conditions

$$(4)\qquad \begin{aligned} u_x(x, \alpha(x)) &= G\big(x, u(x, \alpha(x))\big) \quad \text{pour} \quad |x| \leqslant A, \\ u_y(\beta(y), y) &= H\big(y, u(\beta(y), y)\big) \quad \text{pour} \quad |y| \leqslant B, \end{aligned}$$

$$(5)\qquad u(x_0, y_0) = u_0.$$

2. Nous commençons par l'étude détaillée de l'équation

$$(3')\qquad u_{xy} = 0$$

avec les conditions

$$(4')\qquad u_x(x, a) = ku(x, a), \quad u_y(b, y) = lu(b, y),$$

$$(5')\qquad u(x_0, y_0) = u_0,$$

où a, b, k, l, désignent des constantes telles que

$$|a| \leqslant B, \quad |b| \leqslant A.$$

Toute fonction $u(x, y)$ qui satisfait à l'équation (3') et aux conditions (4') est donnée par la formule

$$u(x, y) = C(e^{k(x-b)} + e^{l(y-a)} - 1).$$

De la condition (5') on obtient

$$C(e^{k(x_0-b)} + e^{l(y_0-a)} - 1) = u_0.$$

Il en résulte que le problème (3'), (4'), (5') a une et une seule solution lorsque le point $P_0(x_0, y_0)$ n'appartient pas à la courbe

$$(6)\qquad e^{k(x-b)} + e^{l(y-a)} = 1.$$

Si

$$|a| \leqslant B, \quad |b| \leqslant A, \quad |k| \leqslant K, \quad |l| \leqslant L$$

la famille de courbes (6) recouvre tout le plan, sauf l'ensemble M qui est donné par la condition

$$(7)\qquad \min_{|\xi|\leqslant A} e^{-K|\xi - x|} + \min_{|\eta|\leqslant B} e^{-L|\eta - y|} > 1.$$

3. Nous démontrerons pourtant le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si les fonctions $F(x,y)$, $G(x,u)$, $H(y,u)$, $\alpha(x)$ et $\beta(y)$ satisfont aux conditions*

$$(8)\qquad |\alpha(x)| \leqslant B, \quad \beta(y) \leqslant A,$$

$$(9)\qquad \begin{aligned} |G(x, \bar{u}) - G(x, u)| &\leqslant K|\bar{u} - u|, \\ |H(y, \bar{u}) - H(y, u)| &\leqslant L|\bar{u} - u|, \end{aligned}$$

et si le point $P_0(x_0, y_0)$ appartient à M, le problème S_1 a une et une seule solution.

Remarque. Il est aisé de voir que pour de petites valeurs de K et L l'ensemble M est grand, tandis que pour K et L suffisamment grands il est vide.

Démonstration. Toute solution de l'équation (3) qui satisfait à la condition (5) est donnée par la formule

$$(10)\qquad u(x, y) = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} F(s, t)\,ds\,dt + \varphi(x) + \psi(y) + u_0,$$

où $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ désignent des fonctions arbitraires de classe C^1 et telles que

$$(11)\qquad \varphi(x_0) = 0, \quad \psi(y_0) = 0.$$

La condition (4) imposée à la fonction (10) donne pour $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ le système d'équations

$$(12)\qquad \begin{aligned} \varphi'(x) &= G\big(x, E(x, \alpha(x)) + \varphi(x) + \psi(\alpha(x))\big) - E_x(x, \alpha(x)), \\ \psi'(y) &= H\big(y, E(\beta(y), y) + \varphi(\beta(y)) + \psi(y)\big) - E_y(\beta(y), y), \end{aligned}$$

où

$$E(x, y) = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} F(s, t)\,ds\,dt + u_0.$$

Pour prouver notre théorème il suffit donc de démontrer que le système (12) a exactement une solution $\varphi_0(x)$, $\psi_0(y)$ de classe C^1 qui satisfait aux conditions initiales (11).

Nous le démontrerons en utilisant la méthode du point invariant de Banach. Désignons par R l'ensemble de tous les couples $\{\varphi(x), \psi(y)\}$ de fonctions définies et continues pour

$$|x| \leqslant A, \quad |y| \leqslant B.$$

Soit $\|\varphi, \psi\|$ la norme du couple de fonctions $\{\varphi(x), \psi(y)\} \in R$, définie par la formule

$$(13)\qquad \begin{aligned} \|\varphi, \psi\| = &\big(\max_{|\eta|\leqslant B} e^{L|\eta - y_0|} - 1\big)^{1/2} \max_{|x|\leqslant A} |\varphi(x)| + \\ &+ \big(\max_{|\xi|\leqslant A} e^{K|\xi - x_0|} - 1\big)^{1/2} \max_{|y|\leqslant B} |\psi(y)|. \end{aligned}$$

On constate facilement que R est un espace métrique complet.

Pour tout couple donné de fonctions $\{\varphi(x), \psi(y)\} \in R$ le système d'équations

$$(14)\qquad \begin{aligned} \tilde{\varphi}'(x) &= G\big(x, E(x, \alpha(x)) + \tilde{\varphi}(x) + \psi(\alpha(x))\big) - E_x(x, \alpha(x)), \\ \tilde{\psi}'(y) &= H\big(y, E(\beta(y), y) + \varphi(\beta(y)) + \tilde{\psi}(y)\big) - E_y(\beta(y), y) \end{aligned}$$

admet une et une seule solution $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(y)$ satisfaisant aux conditions

$$\tilde{\varphi}(x_0) = 0, \quad \tilde{\psi}(y_0) = 0. \tag{15}$$

On obtient ainsi une transformation T de l'ensemble R qui fait correspondre à tout couple de fonctions $\{\varphi(x), \psi(y)\}$ appartenant à R un couple $\{\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(y)\}$ appartenant à R.

Soient $\{\varphi_1(x), \psi_1(y)\}$, $\{\varphi_2(x), \psi_2(y)\}$ deux couples de fonctions appartenant à R et $\{\tilde{\varphi}_1(x), \tilde{\psi}_1(y)\}$ et $\{\tilde{\varphi}_2(x), \tilde{\psi}_2(y)\}$ leurs transformées, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_i'(x) &= G\big(x, E(x, \alpha(x)) + \tilde{\varphi}_i(x) + \psi_i(\alpha(x))\big) - E_x(x, \alpha(x)), \\ \tilde{\psi}_i'(y) &= H\big(y, E(\beta(y), y) + \varphi_i(\beta(y)) + \tilde{\psi}_i(y)\big) - E_y(\beta(y), y), \qquad i = 1, 2, \\ \tilde{\varphi}_i(x_0) &= \tilde{\psi}_i(y_0) = 0. \end{aligned}$$

Alors les fonctions

$$\begin{aligned} v(x) &= \varphi_1(x) - \varphi_2(x), \qquad & \tilde{v}(x) &= \tilde{\varphi}_1(x) - \tilde{\varphi}_2(x), \\ w(y) &= \psi_1(y) - \psi_2(y), \qquad & \tilde{w}(y) &= \tilde{\psi}_1(y) - \tilde{\psi}_2(y) \end{aligned}$$

satisfont aux conditions

$$\tilde{v}(x_0) = 0, \quad \tilde{w}(y_0) = 0$$

et, en vertu de (9), aux inégalités

$$\begin{aligned} |\tilde{v}'(x)| &\leqslant K|\tilde{v}(x)| + K\max_{|y|\leqslant B}|w(y)|, \\ |\tilde{w}'(y)| &\leqslant L|\tilde{w}(y)| + L\max_{|x|\leqslant A}|v(x)|. \end{aligned}$$

Donc, en vertu du théorème bien connu de E. Kamke [1], on a

$$\begin{aligned} \max_{|x|\leqslant A}|\tilde{v}(x)| &\leqslant \big(\max_{|\xi|\leqslant A} e^{K|\xi - x_0|} - 1\big)\max_{|y|\leqslant B}|w(y)|, \\ \max_{|y|\leqslant B}|\tilde{w}(y)| &\leqslant \big(\max_{|\eta|\leqslant B} e^{L|\eta| - y_0} - 1\big)\max_{|x|\leqslant A}|v(x)|. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\|\tilde{v}, \tilde{w}\| \leqslant \big(\max_{|\eta|\leqslant B} e^{L|\eta - y_0|} - 1\big)^{1/2}\big(\max_{|\xi|\leqslant A} e^{K|\xi - x_0|} - 1\big)^{1/2}\|v, w\|. \tag{17}$$

Comme le point $P_0(x_0, y_0)$ appartient à M, on a

$$\min_{|\xi|\leqslant A} e^{-K|\xi - x_0|} + \min_{|\eta|\leqslant B} e^{-L|\eta - y_0|} > 1 \tag{18}$$

et, par conséquent,

$$\big(\max_{|\xi|\leqslant A} e^{K|\xi - x_0|} - 1\big)^{1/2}\big(\max_{|\eta|\leqslant B} e^{L|\eta - y_0|} - 1\big)^{1/2} < 1. \tag{19}$$

Donc, en vertu de (16), (17), (18) et du théorème de Banach il existe un seul couple invariant, c'est-à-dire le système (12) a une seule solution $\varphi_0(x)$, $\psi_0(y)$ qui satisfait aux conditions initiales (11). Il s'ensuit que le problème S_1 a une et seulement une solution

$$u_0(x, y) = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} F(s, t)\,ds\,dt + \varphi_0(x) + \psi_0(y) + u_0.$$

Notre théorème se trouve ainsi démontré.

Travaux cités

[1] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930, § 11, N. 30.

[2] Z. Szmydt, *Sur l'existence de solutions de certains nouveaux problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes*, Ann. Pol. Math. 4 (1957), p. 165-182.

Reçu par la Rédaction le 4. 11. 1959