Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI constituent une continuation des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE (vol. I-XXV) fondées en 1921 par Stanisław Zaremba.

Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI publient, en langues des congrès internationaux, des travaux consacrés à l'Analyse Mathématique, la Géométrie et la Théorie des Nombres. Chaque volume paraît en 3 fascicules.

Les manuscrits dactylographiés sont à expédier à l'adresse:
Rédaction des ANNALES POLONICI MATHEMATICI
KRAKÓW (Pologne), ul. Solskiego 30.

Toute la correspondance concernant l'échange et l'administration est à expédier à l'adresse:
ANNALES POLONICI MATHEMATICI
WARSZAWA 10 (Pologne), ul. Śniadeckich 8.

Le prix de ce fascicule est 2 $.
Les ANNALES sont à obtenir par l'intermédiaire de
ARS POLONA
WARSZAWA 5 (Pologne), Krakowskie Przedmieście 7.

PRINTED IN POLAND

W R O C Ł A W S K A D R U K A R N I A N A U K O W A

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
IX (1960)

Sur certaines propriétés des fonctions $\lambda_g(m)$ et $L_g(m)$ et leur application à l'étude de la périodicité des suites $\{g^n\}\bmod m^k$ $(n=1,2,3,\ldots)$

par F. Jakóbczyk (Lublin)

Introduction

Dans mon travail [1] j'ai étudié la fonction $\lambda_g(m)$, peu connue et encore moins appliquée, et j'ai énoncé les plus importantes de ses propriétés. Je me propose, dans le présent article, d'étudier quelques nouvelles propriétés de cette fonction, ainsi que celles de la fonction $L_g(m)$ que j'introduis pour désigner le nombre des termes irréguliers dans le développement du nombre $1/m$ à base g (on sait que le nombre $\lambda_g(m)$ désigne le nombre des termes réguliers de ce développement) et d'indiquer les applications des deux fonctions $\lambda_g(m)$ et $L_g(m)$ à l'étude des suites $\{g^n\}$ $\bmod m^k$, $n=1,2,3,\ldots$

Les principaux résultats de ce travail sont les suivants:

Théorème II. *Les décompositions canoniques des nombres m et g étant de la forme:*

$$m=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}\cdot\prod_{i=1}^{j}q_i^{\beta_i}=m_g\overline{m}_g,\qquad g=\prod_{i=1}^{j}q_i^{\beta_i'}\cdot\prod_{i=1}^{t}r_i^{\gamma_i}=\overline{g}_m\cdot g_m$$

on a les égalités suivantes:

$$\lambda_g(m)=\lambda_g(m_g),\qquad L_g(m)=L_{\overline{g}_m}(\overline{m}_g).$$

Théorème IV A. *Soit p un nombre premier arbitraire, $(g,p)=1$. Si ν désigne le nombre des termes irréguliers de la suite $\{\lambda_g(p^\delta)\}$, $\delta=1,2,3,\ldots$, on a les relations suivantes:* 1. *pour ses termes réguliers:*

$$\lambda_g(p^\delta)=p^{\delta-\nu}\cdot\lambda_g(p^\nu)\quad\textit{pour}\quad\delta>\nu,$$

2. *pour ses termes irréguliers:*

$$\lambda_g(p^\delta)=\lambda_g(p^\nu)=\lambda_g(p)\quad\textit{pour}\quad 1\leqslant\delta\leqslant\nu,$$

sauf le cas: $p = 2$ *et* $g = 4k-1$ *où*

$$\lambda_g(2^\delta) = \lambda_g(2^\nu) = \lambda_g(2^2) = 2\lambda_g(2) \quad \textit{pour} \quad 1 < \delta \leqslant \nu.$$

Ce théorème exprime une synthèse des propriétés IVa et IVb énoncés dans [1].

THÉORÈME VI. *Soit* $m = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, $(m, g) = 1$, $N = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\nu_i}$, $\lambda_g(N) = W$. *Si* μ *désigne le nombre des termes irréguliers de la suite* $\{\lambda_g(m^\delta)\}$, $\delta = 1, 2, 3, \ldots$, *on a pour ses termes réguliers la relation:*

$$\lambda_g(m^\delta) = m^{\delta-\mu}\cdot\lambda_g(m^\mu) \quad \textit{pour} \quad \delta > \mu$$

où le nombre μ *est donné, d'une façon générale, par la formule*

$$\mu = L_m(N\cdot\overline{W}_m),$$

sauf dans le cas: $(m, 2) = 2$, $g = 4k-1$, *où*

$$\mu = L_m(\tfrac{1}{2}N\cdot\overline{W}_m).$$

THÉORÈME VII. *Si* $(p, g) = 1$, $t = t'\cdot p^\tau$, $(t', p) = 1$, *si* g, t *sont des nombres naturels,* τ *un nombre entier* $\geqslant 0$ *et* p *un nombre premier, on a les relations:*

$$\lambda_{g^t}(p) = \lambda_{g^{t'}}(p), \qquad \nu_t = \nu_{g^t}(p) = \nu_{g^{t'}}(p) + \tau.$$

En appliquant les fonctions $\lambda_g(m)$ et $L_g(m)$ à l'étude de la périodicité $\bmod m^k$ de la suite $\{g^n\}$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ on obtient le résultat suivant: la fonction $\lambda_g(m^k)$ représente le nombre des termes réguliers, la fonction $L_g(m^k)$ — le nombre des termes irréguliers de cette suite. Ces deux fonctions fournissent donc une solution complète du problème considéré.

Remarque. Les notations du théorème II permettent un énoncé concis du théorème VI.

I. Décomposition relative de deux nombres en facteurs.

§ 1. Soient deux nombres naturels a et b et leurs décompositions canoniques que nous écrirons sous la forme:

(1a) $$a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}\cdot\prod_{i=1}^{j} q_i^{\beta_i},$$

(1b) $$b = \prod_{i=1}^{j} q_i^{\gamma_i}\cdot\prod_{i=1}^{t} r_i^{\delta_i}.$$

On peut admettre que $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_k$; $q_1 < q_2 < \ldots < q_j$; $r_1 < r_2 < \ldots < r_t$. Ces décompositions mettent en évidence les facteurs communs des nombres a et b ainsi que les facteurs par lesquels ils diffèrent. Posons:

(2) $$a_b = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}, \qquad \bar{a}_b = \prod_{i=1}^{j} q_i^{\beta_i},$$

(3) $$\bar{b}_a = \prod_{i=1}^{j} q_i^{\gamma_i}, \qquad b_a = \prod_{i=1}^{t} r_i^{\delta_i}.$$

Dès lors, les produits (1a) et (1b) peuvent être mis sous la forme:

(4a) $$a = a_b\cdot\bar{a}_b,$$

(4b) $$b = \bar{b}_a\cdot b_a.$$

Les produits (4a) et (4b) seront appelés *décompositon relative* des nombres a et b en facteurs.

Désignons, comme d'habitude, par (a, b) le plus grand commun diviseur des nombres a et b, par $[a, b]$ leur plus petit commun multiple et posons $w' = \prod_{i=1}^{s} p_i$ si $w = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i}$; nous avons alors les propriétés suivantes de la décomposition relative des nombres a et b:

(5) $$(a_b, \bar{a}_b) = 1, \qquad (b_a, \bar{b}_a) = 1,$$

(6) $$(a_b, b) = 1, \qquad (a, b_a) = 1,$$

(7) $$\bar{a}_b' = \bar{b}_a'.$$

Le décomposition relative des nombres a et b permet d'écrire sous une forme condensée les relations suivantes dont la démonstration est immédiate:

(8) $$(a, b) = (\bar{a}_b, \bar{b}_a),$$

(9) $$[a, b] = a_b\cdot[\bar{a}_b, \bar{b}_a]\cdot b_a.$$

Nous utiliserons dans la suite la remarquable proposition suivante:

THÉORÈME I. *La congruence* $b^* \equiv b \pmod{a}$ *entraîne les égalités*

$$a_{b^*} = a_b \quad \textit{et} \quad \bar{a}_{b^*} = \bar{a}_b.$$

Démonstration. On a, par hypothèse, l'égalité:

$$b^* = b + ha = b_a\cdot\bar{b}_a + h\cdot a_b\cdot\bar{a}_b,$$

où h est un nombre entier. Cette égalité prouve que tout facteur premier q_i $(i = 1, 2, \ldots, j)$ du nombre $\bar{a}_b$ est aussi facteur du nombre b^*; au contraire, aucun facteur premier p_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ du nombre a_b n'est facteur du nombre b^*, d'où la conclusion du théorème.

Exemple. Comme $910 \equiv 10 \pmod{12}$, on a

$$12_{910} = 12_{10} = 3, \qquad \overline{12}_{910} = \overline{12}_{10} = 2.$$

Application de la décomposition relative

§ 2. Considérons le développement systématique à base g du nombre rationnel positif l/m, où $l < m$ et $(l, m) = 1$. Nous aurons deux suites numériques parallèles: 1. la suite des chiffres qui suivent la virgule: $\mathrm{C}\dfrac{l\cdot g^n}{m}$, et 2. la suite des restes $\mathrm{R}\dfrac{l\cdot g^n}{m}$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Remarque 1. Le symbole $\mathrm{R}\dfrac{a}{b}$, où a, b, sont des nombres entiers non négatifs et $b > 0$, désigne le reste obtenu en divisant a par b. L'égalité $\mathrm{R}\dfrac{a}{b} = r$ est donc équivalente à la congruence $a \equiv r \pmod{b}$, où $r < b$.

Le symbole $\mathrm{R}\dfrac{l\cdot g^n}{m} = r_n$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ désigne donc la suite des restes obtenus en divisant les nombres $l\cdot g^n$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ par m. Puisque $l < m$, nous avons ici les relations

$$(10) \qquad r_0 = \mathrm{R}\frac{l}{m} = l, \qquad r_{n+1} = \mathrm{R}\frac{g\cdot r_n}{m} \qquad \text{pour} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Les nombres r_n interviennent donc dans le développement systématique de la fraction propre l/m à base g.

Le symbole

$$(11) \qquad \mathrm{E}\frac{gr_n}{m} = c_n, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

désigne la suite des chiffres obtenus dans le développement systématique de la fraction propre l/m à base g. Elle est analogue à la suite des restes r_n. Par analogie avec le symbole $\mathrm{R}\dfrac{l\cdot g^n}{m}$ nous le désignons aussi par $\mathrm{C}\dfrac{l\cdot g^n}{m}$.

Ces deux suites $\mathrm{C}\dfrac{l\cdot g^n}{m}$ et $\mathrm{R}\dfrac{l\cdot g^n}{m}$ ont chacune $L = L_g(m)$ termes irréguliers (précédant la période) et $\lambda = \lambda_g(m)$ termes réguliers (formant la période). Ces suites peuvent s'écrire sous la forme:

$$(12) \qquad \mathrm{C}\frac{l\cdot g^n}{m} = \bar{c}_0, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_{L-1}, \dot{c}_0, \dot{c}_1, \dot{c}_2, \ldots, \dot{c}_{\lambda-1},$$

$$(13) \qquad \mathrm{R}\frac{l\cdot g^n}{m} = \bar{r}_0, \bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_{L-1}, \dot{r}_0, \dot{r}_1, \dot{r}_2, \ldots, \dot{r}_{\lambda-1},$$

où les termes irréguliers sont désignés par un trait suscrit, les termes réguliers — par un point; ou encore sous la forme symbolique:

$$\mathrm{C}\frac{l\cdot g^n}{m} = \bar{\mathrm{C}}\frac{l\cdot g^n}{m} + \dot{\mathrm{C}}\frac{l\cdot g^n}{m}, \qquad \mathrm{R}\frac{l\cdot g^n}{m} = \bar{\mathrm{R}}\frac{l\cdot g^n}{m} + \dot{\mathrm{R}}\frac{l\cdot g^n}{m}.$$

Exemple. Pour $\dfrac{l}{m} = \dfrac{3}{56}$ et $g = 10$ on a:

$$\frac{3}{56} = 0{,}053571428571428\ldots$$

Donc

$$\mathrm{C}\frac{3\cdot 10^n}{56} = \bar{0}, \bar{5}, \bar{3}, \dot{5}, \dot{7}, \dot{1}, \dot{4}, \dot{2}, \dot{8}, \qquad \mathrm{R}\frac{3\cdot 10^n}{56} = \bar{3}, \overline{30}, \overline{20}, \dot{32}, \dot{40}, \dot{8}, \dot{24}, \dot{16}, \dot{48}$$

et $L_{10}(56) = 3$; $\lambda_{10}(56) = 6$.

Remarque 2. S'il n'y a pas de termes irréguliers, $L_g(m) = 0$. Si $\dot{c}_0 = \dot{c}_1 = \ldots = \dot{c}_{\lambda-1} = 0$, $\lambda_g(m) = 1$.

Remarque 3. L'exemple ci-dessus montre l'avantage qu'il y a à considérer la suite $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Si l'on prenait la suite $n = 1, 2, 3, \ldots$, le terme $\bar{3}$ ne figurerait plus dans la suite $\mathrm{R}\dfrac{3\cdot 10^n}{56}$ et il n'y aurait plus correspondance entre les suites $\mathrm{C}\dfrac{l\cdot g^n}{m}$ et $\mathrm{R}\dfrac{l\cdot g^n}{m}$.

La suite $\mathrm{R}\dfrac{l\cdot g^n}{m}$ est identique à la suite $\{l\cdot g^n\} \bmod m$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Le symbole $\mathrm{R}\dfrac{l\cdot g^n}{m}$, plus bref, est souvent plus commode.

Le nombre l n'ayant aucune influence sur les nombres $\lambda_g(m)$ et $L_g(m)$, il suffit, pour étudier ceux-ci, de considérer la suite $\mathrm{R}\dfrac{g^n}{m}$, c'est-à-dire la suite $\{g^n\} \bmod m$.

§ 3. On démontre en Théorie des nombres [2] que le nombre $L_g(m)$ ne dépend que des nombres $\bar{g}_m$ et $\overline{m}_g$ et que le nombre $\lambda_g(m)$ ne dépend que des nombres g et m_g. En utilisant la factorisation relative des nombres g et m on peut donc énoncer la proposition fondamentale suivante:

Théorème II. *Dans le développement à base g du nombre rationnel l/m, où $l < m$, $(l, m) = 1$, on a pour les suites des chiffres et des restes les relations suivantes:*

1. *pour les termes irréguliers:* $L_g(m) = L_{\bar{g}_m}(\overline{m}_g)$,

2. *pour les termes réguliers*: $\lambda_g(m) = \lambda_g(m_g)$, *et* $L_g(1) = 0$, $\lambda_g(1) = 1$ [1].

II. La fonction $L_g(m)$

§ 4. On sait (théorème II) que l'on a la relation

(14) $$L_g(m) = L_{\bar{g}_m}(\overline{m}_g).$$

Nous admettrons, dans la suite, que dans l'expression $L_g(m)$ on a

$$m = \prod_{i=1}^{j} q_i^{\beta_i} \quad \text{et} \quad g = \prod_{i=1}^{j} q_i^{\gamma_i},$$

c'est-à-dire $m' = g'$. Nous étudierons les propriétés de la fonction $L_g(m)$.

Soit $j = 1$, donc $m = q^\beta$, $g = q^\gamma$. Or, $L_g(m)$ est la plus petite valeur de la variable entière n qui satisfasse à la congruence:

(15) $$g^n \equiv 0 \pmod{m} \quad \text{ou} \quad q^{\gamma n} \equiv 0 \pmod{q^\beta},$$

c'est-à-dire à l'inégalité

(16) $$\gamma n \geqslant \beta.$$

En désignant par $\{a/b\}$ le nombre entier le plus proche de a/b qui n'est pas inférieur à a/b, soit $\{\frac{7}{3}\} = \{2\frac{1}{3}\} = 3$, nous aurons, dans le cas considéré, la relation

(17) $$L_g(m) = \{\beta/\gamma\}$$

et généralement

(18) $$L_g(m^\delta) = \{\beta\delta/\gamma\}.$$

Nous avons donc:

THÉORÈME III. *Si* $m = q^\beta$ *et* $g = q^\gamma$, *alors* $L_g(m^\delta) = L_q^\gamma(q^{\beta\delta}) = \{\beta\delta/\gamma\}$, ($\beta$, γ, δ — nombres naturels).

EXEMPLE. $\beta = 5$, $\gamma = 3$, donc $L_g(m) = \{\frac{5}{3}\} = 2$ et

$$L_g(m^\delta) = \{5\delta/3\} = 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 15, \ldots$$
$$(\text{pour } \delta = 1, 2, 3, \ldots).$$

Nous obtenons ainsi une suite non décroissante dans laquelle les premières différences forment une suite périodique:

$$2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

[1] puisque $\mathrm{R}\dfrac{g^n}{1} = 0, 0, 0, \ldots$

§ 5. Soit maintenant $m = \prod_{i=1}^{j} q_i^{\beta_i}$, $g = \prod_{i=1}^{j} q_i^{\gamma_i}$, $j > 1$. Le nombre $L_g(m)$ est par définition le plus petit nombre entier satisfaisant à la congruence

$$g^n \equiv 0 \pmod{m}.$$

Il doit donc satisfaire simultanément à toutes les inégalités

$$n\gamma_i \geqslant \beta_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, j,$$

d'où

$$n \geqslant \{\beta_i/\gamma_i\} = L_i.$$

Posons $L_i^{(\delta)} = \{\beta_i\delta/\gamma_i\}$. Alors

$$L_g(m) = \max(L_1, L_2, L_3, \ldots, L_j),$$
$$L_g(m^\delta) = \max(L_1^{(\delta)}, L_2^{(\delta)}, L_3^{(\delta)}, \ldots, L_j^{(\delta)}).$$

On obtient ainsi:

THÉORÈME IV. *Si* $m = \prod_{i=1}^{j} q_i^{\beta_i}$, $g = \prod_{i=1}^{j} q_i^{\gamma_i}$, *on a*

$$L_g(m^\delta) = \max\left(\left\{\frac{\beta_1\delta}{\gamma_1}\right\}, \left\{\frac{\beta_2\delta}{\gamma_2}\right\}, \ldots, \left\{\frac{\beta_j\delta}{\gamma_j}\right\}\right).$$

En posant $\delta = 1, 2, 3, \ldots$ nous aurons la suite $\{L_g(m^\delta)\}$. Le caractère de celle-ci sera mis en évidence par l'exemple suivant:

$$L_g(m^\delta) = \max\left(\left\{\frac{5\delta}{2}\right\}, \left\{\frac{7\delta}{3}\right\}, \left\{\frac{2\delta}{1}\right\}, \left\{\frac{1\delta}{5}\right\}, \left\{\frac{\delta}{1}\right\}\right).$$

Nous avons donc les suites

$$\left\{\frac{5\delta}{2}\right\} = 3,\ 5,\ 8,\ 10,\ 13,\ 15,\ 18,\ 20,\ 23,\ 25,\ 28,\ \ldots,$$

$$\left\{\frac{7\delta}{3}\right\} = 3,\ 5,\ 7,\ 10,\ 12,\ 14,\ 17,\ 19,\ 21,\ 24,\ 26,\ \ldots,$$

$$\left\{\frac{2\delta}{1}\right\} = 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20,\ 22,\ \ldots,$$

$$\left\{\frac{1\delta}{5}\right\} = 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

$$\left\{\frac{1\delta}{1}\right\} = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ \ldots,$$

donc

$$L_g(m^\delta) = 3,\ 5,\ 8,\ 10,\ 13,\ 15,\ 18,\ 20,\ 23,\ 25,\ 28,\ \ldots = \left\{\frac{5\delta}{2}\right\}.$$

En posant: $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$; $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$; $\frac{2}{1} = 2$; $\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$; $\frac{1}{1} = 1$, nous voyons aisément que

$$\tfrac{5}{2} = \max\left(\tfrac{5}{2}, \tfrac{7}{3}, \tfrac{2}{1}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{1}\right).$$

Donc $L_g(m^\delta) = \left\{\frac{\beta\delta}{\gamma}\right\}$, où $\frac{\beta}{\gamma} = \max\left(\frac{\beta_1}{\gamma_1}, \frac{\beta_2}{\gamma_2}, \frac{\beta_3}{\gamma_3}, \ldots, \frac{\beta_j}{\gamma_j}\right)$. On voit qu'il est bien facile de déterminer le nombre $L_g(m)$. Ajoutons que les relations suivantes sont vraies:

$$L_m(a) \leqslant L_m(ab) \leqslant L_m(a) + L_m(b),$$

$$L_p(ab) = L_p(a) + L_p(b), \qquad p = \text{l. n. prem.}$$

III. La fonction $\lambda_g(m)$

§ 6. Si l'on admet que $(g, m) = 1$, le nombre $\lambda_g(m)$ n'est autre que l'exposant auquel appartient le nombre g modulo m. Au lieu de $\lambda_g(m)$ nous écrirons, au besoin, λ. On a donc pour les nombres λ, g, m, la congruence

$$g^\lambda \equiv 1 \pmod{m}. \tag{19}$$

Sous la condition $(g, m) = 1$ le développement à base g du nombre rationnel l/m a une période pure (tous les termes sont réguliers).

Dans mon travail [1] j'ai énoncé différentes propriétés de la fonction $\lambda_g(m)$. Les propriétés IVa et IVb sont contenues dans les théorèmes suivants:

THÉORÈME IVa. *Si p est un nombre premier > 2, $(p, g) = 1$, a est un nombre naturel et $\nu = \nu_g(p)$ désigne le plus grand nombre naturel t satisfaisant à la congruence $g^\lambda \equiv 1 \pmod{p^t}$, où $\lambda = \lambda_g(p)$, on a*

$$\lambda_g(p^a) = \lambda_g(p) \qquad \textit{pour} \quad 1 \leqslant a \leqslant \nu,$$

$$\lambda_g(p^a) = p^{a-\nu}\cdot\lambda_g(p) \qquad \textit{pour} \quad a > \nu.$$

THÉORÈME IVb. *Si $p = 2$, $g = 4k \pm 1 = 2^{2+h}\cdot k' \pm 1$, où $(k', 2) = 1$, alors*

$\lambda_g(2) = 1$,

$$\lambda_g(2^a) = \lambda_g(2^2) = \begin{cases} 1 & \textit{pour} \quad g = 4k+1 \\ 2 & \textit{pour} \quad g = 4k-1 \end{cases} \qquad \textit{pour} \quad 1 < a \leqslant \nu = 2+h,$$

$$\lambda_g(2^a) = 2^{a-\nu} \qquad\qquad \textit{pour} \quad a > \nu.$$

Dans leur ensemble, ces deux théorémes expriment une certaine propriété de la fonction $\lambda_g(p^a)$ d'une façon assez compliquée et prolixe, se prêtant mal aux applications. En les modifiant, nous allons exprimer la même propriété de la fonction $\lambda_g(p^a)$ d'une manière uniforme, simple et commode.

§ 7. Considérons d'abord la fonction $\lambda_g(p^a)$ comme une suite $\{\lambda_g(p^a)\}$, $a = 1, 2, 3, \ldots$, et étudions celle-ci sur quelques exemples que nous écrivons sous forme du tableau suivant:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	ν
$\lambda_{10}(3^a)$	1	$\underline{1}$	3	3^2	3^3	3_4	3^5	3^6	3^7	3^8	...	2
$\lambda_8(3^a)$	2	$\underline{2}$	$2\cdot 3$	$2\cdot 3^2$	$2\cdot 3^3$	$2\cdot 3^4$	$2\cdot 3^5$	$2\cdot 3^6$	...			2
$\lambda_3(11^a)$	5	$\underline{5}$	$5\cdot 11$	$5\cdot 11^2$	$5\cdot 11^3$	$5\cdot 11^4$	$5\cdot 11^5$	$5\cdot 11^6$	...			2
$\lambda_2(5^a)$	$\underline{4}$	$4\cdot 5$	$4\cdot 5^2$	$4\cdot 5^3$	$4\cdot 5^4$	$4\cdot 5^5$	$4\cdot 5^6$	$4\cdot 5^6$	...			1
$\lambda_{33}(2^a)$	1	1	1	1	$\underline{1}$	2	2^2	2^3	2^4	2^5	...	5
$\lambda_{31}(2^a)$	1	2	2	2	2	$\underline{2}$	$2\cdot 2$	$2\cdot 2^2$	$2\cdot 2^3$	$2\cdot 2^4$	...	6

D'après ces exemples, il est clair que les termes de la suite $\{\lambda_g(p^a)\}$ forment, à partir d'un indice, une progression géométrique régulière de raison p et de premier terme $\lambda_g(p^\nu)$, où ν désigne le nombre des termes irréguliers de la suite $\{\lambda_g(p^a)\}$. Un terme quelconque de cette progression géométrique est donc de la forme:

$$\lambda_g(p^a) = p^{a-\nu}\lambda_g(p^\nu) \qquad \text{pour} \quad a > \nu. \tag{20}$$

Le terme $\lambda_g(p^\nu)$ peut être compté indifféremment comme terme irrégulier ou régulier; nous allons le considérer comme irrégulier. Dans la dernière colonne du tableau on trouve les valeurs du nombre ν pour les différentes suites; dans les suites elles-mêmes les termes $\lambda_g(p^\nu)$ sont soulignés.

En ce qui concerne les termes irréguliers dans la suite $\lambda_g(p^a)$, il faut distinguer deux cas: a. $p > 2$, b. $p = 2$. Dans le cas b on peut avoir: b_1. $g = 4k+1$, par exemple $g = 33$, et b_2. $g = 4k-1$, par exemple $g = 31$. Nous allons montrer que l'on a $\nu = \nu_g(2) = 2+h$ dans le cas b_1 et $\nu = \nu_g(2) = 3+h$ dans le cas b_2, où h est le nombre déterminé dans le théorème IVb.

En effet, dans le cas b_1 nous avons:

$$g-1 = 4k+1-1 = 4k = 2^2\cdot 2^h k' = 2^{2+h}k' \equiv 0 \pmod{2^{2+h}},$$

donc

$$g-1 \equiv 0 \pmod{2^a} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant a \leqslant 2+h,$$

$$g-1 \not\equiv 0 \pmod{2^a} \qquad \text{pour} \quad a > 2+h.$$

Par conséquent $\nu = 2+h$. Par exemple $\nu_{33}(2) = 5$.

Dans le cas b_2 nous avons:

$$g^2-1 = (4k-1)^2-1 = 8k(2k-1) = 2^3\cdot 2^h k'(2k-1) = 2^{3+h}\cdot k'(2k-1),$$

donc

$$g^2-1 \equiv 0 \pmod{2^\alpha} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant 3+h,$$

$$g^2-1 \not\equiv 0 \pmod{2^\alpha} \quad \text{pour} \quad \alpha > 3+h.$$

Par conséquent $\nu = 3+h$. Par exemple $\nu_{31}(2) = 6$.

Dans le cas a où $p > 2$, on peut écrire pour les termes irréguliers l'égalité:

$$\lambda_g(p^\alpha) = \lambda_g(p),$$

mais on a aussi l'égalité: $\lambda_g(p^\alpha) = \lambda_g(p^\nu)$ pour $1 \leqslant \alpha \leqslant \nu$.

Les théorèmes IVa et IVb ainsi modifiés peuvent être énoncés sous la forme suivante, où l'on a remplacé α par δ:

THÉORÈME IV A. *Si p est un nombre premier arbitraire, $(g, p) = 1$, et ν est le nombre des termes irréguliers de la suite $\{\lambda_g(p^\delta)\}$, $\delta = 1, 2, 3, \ldots$, on a les relations suivantes*: 1. *pour les termes réguliers*:

(21) $$\lambda_g(p^\delta) = p^{\delta-\nu}\cdot\lambda_g(p^\nu) \quad \textit{pour} \quad \delta > \nu;$$

2. *pour les termes irréguliers*:

(22) $$\lambda_g(p^\delta) = \lambda_g(p^\nu) = \lambda_g(p) \quad \textit{pour} \quad 1 \leqslant \delta \leqslant \nu;$$

et

(23) $$\lambda_g(2^\delta) = \lambda_g(2^\nu) = \lambda_g(2^2) = 2\cdot\lambda_g(2) \quad \textit{pour} \quad 1 < \delta \leqslant \nu,$$

dans le cas $g = 4k-1$.

Ainsi, il n'y a que le cas $p = 2$, $g = 4k-1$ qui fasse exception à la règle générale, et cela seulement pour les termes irréguliers.

Le nombre ν et la fonction $\nu_g(p)$

§ 8. Dans la fonction $\lambda_g(p^\delta)$ figure le nombre ν qui joue un rôle important non seulement dans la théorie de la fonction $\lambda_g(m)$, mais aussi ailleurs, comme nous le verrons tout à l'heure. Il y a donc intérêt à l'étudier de plus près. Comme il dépend des deux grandeurs: g et p, il est fonction de celles-ci, ce que nous exprimerons en écrivant: $\nu = \nu_g(p)$, $(g, p) = 1$.

Dans certains cas simples le nombre ν est assez facile à déterminer. Nous l'avons déjà fait pour b. $p = 2$. On a alors:

(24)

$$\left.\begin{array}{l} b_1.\ \text{pour } g = 4k+1 = 2^{2+h}k'+1 \\ b_2.\ \text{pour } g = 4k-1 = 2^{2+h}k'-1 \end{array}\right\} \quad (k', 2) = 1, \quad \begin{array}{l} \nu = 2+h = 2+L_2(k), \\ \nu = 3+h = 3+L_2(k). \end{array}$$

D'une manière analogue on calcule ν pour a. $p > 2$ et $g = pk\pm 1$:

(25) $$\left.\begin{array}{l} a_1.\ \text{pour } g = pk+1 = p^{1+h}k'+1 \\ a_2.\ \text{pour } g = pk-1 = p^{1+h}k'-1 \end{array}\right\} \quad (p, k') = 1,$$

$$\nu = 1+h = 1+L_p(k).$$

§ 9. On vérifie aussi aisément les relations suivantes:

(26) $$\left.\begin{array}{l} \text{dans les cas } a_1 \text{ et } b_1\text{: } \lambda_g(p^\delta) = \lambda_g(p) = 1 \\ \text{dans les cas } a_2 \text{ et } b_2\text{: } \lambda_g(p^\delta) = \lambda_g(p) = 2 \end{array}\right\} \quad \text{pour } 1 \leqslant \delta \leqslant \nu$$

$$\text{sauf le cas:} \quad \lambda_g(2) = 1.$$

§ 10. Etudions maintenant l'allure de la fonction $\nu_g(2)$ pour $g = 3, 5, 7, 9, \ldots$ On a le tableau suivant:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
h	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0	2	0	1	0	4	...
$g = 4k+1$	5	9	13	17	21	25	29	33	...								
$g = 4k-1$	3	7	11	15	19	23	27	31	...								
$\nu = 2+h$	2	3	2	4	2	3	2	...									
$\nu = 3+h$	3	4	3	5	3	4	3	...									

La suite $\{h\} = \{L_2(k)\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ joue ici un rôle essentiel. La suite analogue $\{L_3(k)\}$ pour $\nu_g(3)$ est

(27) $$L_3(k) = 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 3, \ldots$$

§ 11. Une étude spéciale doit être faite pour la suite $\nu_2(p_n)$, où

$$p_n = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots \text{ (suite des nombres premiers).}$$

Voici quelques uns des premiers termes de cette suite:

(28) $$\nu_2(p_n) = 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots$$

Cette suite joue un rôle important à cause du théorème relatif aux nombres de Mersenne et de Fermat que j'ai établi dans mon travail [1]; ces nombres ont, en effet, les propriétés suivantes:

(29) Si $M_p = 2^p - 1 = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, alors $1 \leqslant \alpha_i \leqslant \nu_2(p_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

(30) Si $F_n = 2^{2^n} + 1 = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i}$, alors $1 \leqslant \alpha_i \leqslant \nu_2(p_i)$, $i = 1, 2, \ldots, t$.

Le résultat essentiel de ce théorème s'exprime évidemment par les inégalités qui limitent supérieurement les exposants α_i.

Quelques propriétés de la fonction $\lambda_g(m)$

§ 12. Le théorème IVA permet d'établir quelques nouvelles propriétés de la fonction $\lambda_g(m)$, ce que nous allons faire maintenant.

COROLLAIRE I. *Pour tout nombre premier p on a la relation*

$$\lambda_g(p^\delta) = p^{\delta-\delta_0} \cdot \lambda_g(p^{\delta_0}) \quad \textit{pour} \quad \delta > \delta_0 > \nu.$$

Démonstration. En tenant compte de l'inégalité $\delta > \delta_0 > \nu$ nous pouvons écrire, en vertu du théorème IVA:

$$\lambda_g(p^\delta) = p^{\delta-\nu}\lambda_g(p^\nu) = p^{\delta-\delta_0+\delta_0-\nu} \cdot \lambda_g(p^\nu) = p^{\delta-\delta_0} \cdot \lambda_g(p^{\delta_0}),$$

ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME V. *Pour tout nombre $P = p^\alpha$ (p — nombre premier) on a la relation*: $\lambda_g(P^\delta) = P^{\delta-\vartheta} \cdot \lambda_g(P^\vartheta)$ *pour* $\delta > \vartheta = \{\nu/\alpha\} = L_{p^\alpha}(p^\nu)$.

Démonstration. Il résulte du théorème IVA que l'on a, pour $\alpha\delta > \nu$, c'est-à-dire pour $\delta > \vartheta = \{\nu/\alpha\}$:

$$\lambda_g(P^\delta) = \lambda_g(p^{\alpha\delta}) = p^{\alpha\delta-\nu} \cdot \lambda_g(p^\nu) = p^{\alpha\delta-\alpha\vartheta+\alpha\vartheta-\nu} \cdot \lambda_g(p^\nu)$$
$$= p^{\alpha\delta-\alpha\vartheta} \cdot p^{\alpha\vartheta-\nu} \cdot \lambda_g(p^\nu) = (p^\alpha)^{\delta-\vartheta} \cdot \lambda_g(p^{\alpha\vartheta}) = P^{\delta-\vartheta} \cdot \lambda_g(P^\vartheta)$$

ce qu'il fallait démontrer.

En posant $\alpha = 1$ dans le théorème V on obtient le théorème IV A.

La suite $\{\lambda_g(P^\delta)\}$, $\delta = 1, 2, 3, \ldots$ est, à partir du terme $\lambda_g(P^\vartheta)$, une progression géométrique de raison P; le nombre des termes irréguliers de cette suite est ϑ.

COROLLAIRE II. *Pour tout nombre $P = p^\alpha$ on a la formule*

$$\lambda_g(P^\delta) = P^{\delta-\delta_0} \cdot \lambda_g(P^{\delta_0}) \quad \textit{pour} \quad \delta > \delta_0 > \vartheta.$$

Démonstration. Pour $\delta > \delta_0 > \vartheta$ on a, en vertu du théorème V:

$$\lambda_g(P^\delta) = P^{\delta-\vartheta} \cdot \lambda_g(P^\vartheta) = P^{\delta-\delta_0+\delta_0-\vartheta} \cdot \lambda_g(P^\vartheta) = P^{\delta-\delta_0} \cdot \lambda_g(P^{\delta_0}),$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ 13. Considérons maintenant le nombre $m^\delta = \prod_{i=1}^{k} P_i^\delta = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i\delta}$, $(m, g) = 1$. En vertu de la propriété IIIc de la fonction $\lambda_g(m)$ énoncée dans mon travail [1], on a la relation:

$$\lambda_g(m^\delta) = [\lambda_g(P_1^\delta), \lambda_g(P_2^\delta), \ldots, \lambda_g(P_k^\delta)].$$

Serait-il possible d'écrire la fonction $\lambda_g(m^\delta)$ sous la forme

(31) $$\lambda_g(m^\delta) = m^{\delta-\mu} \cdot \lambda_g(m^\mu) \quad \text{pour} \quad \delta > \mu,$$

analogue aux expressions déjà obtenues pour $\lambda_g(p^\delta)$ et $\lambda_g(P^\delta)$? En posant $\delta = 1, 2, 3, \ldots$ nous aurions pour $\lambda_g(m^\delta)$ une suite qui, commençant par μ termes irréguliers, serait une progression géométrique régulière de raison m. Or, on établit aisément qu'il en est bien ainsi; dans ce but il suffit d'observer que les suites $\{\lambda_g(P_i^\delta)\}$, $i = 1, 2, \ldots$, $\delta = 1, 2, 3, \ldots$, forment chacune, à partir du rang $\vartheta_i = \{\nu_i/\alpha_i\}$, des progressions géométriques de raisons P_i premières entre elles. Par conséquent, la suite $\lambda_g(m^\delta)$, étant la suite de leurs plus petits communs multiples, forme, à l'exception d'un certain nombre de termes irréguliers par lesquels elle commence, une progression géométrique de raison égale à $[P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k] = m$. La relation (31) est ainsi démontrée. La plus grande difficulté consistera à établir une formule exprimant le nombre μ des termes irréguliers de la suite $\lambda_g(m^\delta)$.

Le nombre μ

§ 14. Considérons d'abord un exemple.

EXEMPLE. Soit $m = 200 = 2^3 \cdot 5^2$, $g = 3$. Alors

$$\lambda_g(m^\delta) = \lambda_3(200^\delta) = [\lambda_3(2^{3\delta}), \lambda_3(5^{2\delta})],$$

δ	1	2	3	4	$\ldots\ \delta$
$\lambda_3(2^{3\delta})$	2	2^4	2^7	2^{10}	$\ldots\ 2^{3\delta-2}$
$\lambda_3(5^{2\delta})$	$2^2\cdot 5$	$2^2\cdot 5^3$	$2^2\cdot 5^5$	$2^2\cdot 5^7$	$\ldots\ 2^2\cdot 5^{2\delta-1}$
$\lambda_3(200^\delta)$	$2^2\cdot 5$	$2^4\cdot 5^3$	$2^7\cdot 5^5$	$2^{10}\cdot 5^7$	$\ldots\ 2^{3\delta-2}\cdot 5^{2\delta-1}$
donc	$2\cdot 10$	$2\cdot 10^3$	$2^2\cdot 10^5$	$2_3\cdot 10^7$	$\ldots\ 2000\cdot 200^{\delta-2}$ pour $\delta > 2$

Dans l'exemple ci-dessus la suite $\{\lambda_3(200^\delta)\}$, $\delta = 1, 2, 3, \ldots$ commence par 2 termes irréguliers: $\lambda_3(200) = 20$, $\lambda_3(200^2) = 2000$; les termes suivants forment une progression géométrique régulière de raison $= 200$ et de premier terme $= \lambda_3(200^2)$. On a donc

$$\lambda_3(200^\delta) = 200^{\delta-2} \cdot \lambda_3(200^2) \quad \text{pour} \quad \delta > 2 = \mu.$$

On peut pourtant déterminer le nombre μ par le raisonnement suivant que nous utiliserons aussi dans le cas général. Comme $\lambda_g(m^\delta) = \lambda_3(200^\delta) = [\lambda_3(2^{3\delta}), \lambda_3(5^{2\delta})]$, on a pour δ suffisamment grand:

$$\lambda_3(200^\delta) = [2^{3\delta-2}, 2^2\cdot 5^{2\delta-1}] = [2^{3\delta-2}\cdot 5^0;\ 2^2\cdot 5^{2\delta-1}].$$

Pour les δ ainsi choisis les inégalités suivantes auront lieu simultanément:

$$3\delta-2 \geqslant 2, \quad \text{d'où} \quad \delta > \delta_1 = \left\{\frac{2+2}{3}\right\} = 2,$$

$$2\delta-1 \geqslant 0, \quad \text{d'où} \quad \delta > \delta_2 = \left\{\frac{1}{2}\right\} = 1.$$

Ces deux inégalités seront satisfaites simultanément pour $\delta > \mu = \max(\delta_1, \delta_2) = 2$ et le nombre μ est ainsi déterminé.

En prenant maintenant $\delta > \mu = 2$, nous aurons bien:

$$\begin{aligned}\lambda_3(200^\delta) &= [2^{3\delta-3\mu+3\mu-2};\ 2^2\cdot 5^{2\delta-2\mu+2\mu-1}] = [(2^3)^{\delta-\mu}\cdot 2^{3\mu-2};\ (5^2)^{\delta-\mu}\cdot 5^{2\mu-1}\cdot 2^2] \\ &= (2^3\cdot 5^2)^{\delta-\mu}[2^{3\mu-2};\ 5^{2\mu-1}\cdot 2^2] = 200^{\delta-\mu}[\lambda_3(2^{3\mu}), \lambda_3(5^{2\mu})] \\ &= 200^{\delta-\mu}\cdot\lambda_3(200^\mu).\end{aligned}$$

Nous passons maintenant à l'étude du cas général: $m = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$, $(m, g) = 1$. Considérons d'abord le nombre $\lambda_g(N) = W$, où $N = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\nu_i}$ et ν_i a la signification donnée auparavant.

En vertu de la propriété IIIc de la fonction $\lambda_g(m)$ (cf. [1]) nous avons:

$$\lambda_g(N) = [\lambda_g(p_1^{\nu_1}), \lambda_g(p^{\nu_2}), \ldots, \lambda_g(p_k^{\nu_k})]. \tag{32}$$

En mettant en évidence les facteurs p_i dans la factorisation canonique du nombre $\lambda_g(p_j^{\nu_j})$, $j = 1, 2, 3, \ldots, k$, nous aurons:

$$\lambda_g(p_j^{\nu_j}) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\gamma_{ij}}\cdot h_j, \tag{33}$$

où $(h_j, N) = 1$. Les nombres γ_{ij}, $i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3, \ldots$, peuvent, même tous, être nuls; les nombres γ_{ii} sont tous nuls, à l'exception du cas $p = 2$ et $g = 4k-1$, où $\gamma_{11} = 1$. Nous garderons les nombres γ_{ii} pour ne pas nuire à la symétrie des résultats.

Il est bien connu que, pour trouver le plus petit commun multiple de plusieurs nombres, il faut effectuer leur factorisation canonique et ensuite prendre les facteurs correspondants avec les plus grand exposants.

Posons:

$$\gamma_i = \max(\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \gamma_{i3}, \ldots, \gamma_{ik}), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, k, \tag{34}$$

$$H = [h_1, h_2, \ldots, h_k]. \tag{35}$$

Nous avons donc:

$$\lambda_g(N) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\gamma_i}\cdot H, \tag{36}$$

où $(H, N) = (H, m) = 1$.

Remarque 4. A cause de la notation $\lambda_g(N) \doteq W$ on observe aisément que $\prod_{i=1}^{k} p_i^{\gamma_i} = \overline{W}_m$ et $H = W_m$.

Remarque 5. En vertu du théorème IVA nous avons aussi les relations $\lambda_g(N) = \lambda_g(\prod_{i=1}^{k} p_i) = \lambda_g(m')$ et $\lambda_g(N) = \lambda_g(2\cdot\prod_{i=1}^{k} p_i) = \lambda_g(2m')$ si $p_1 = 2$, $g = 4k-1$, puisque $\lambda_g(p_i^{\nu_i}) = \lambda_g(p_i)$ pour $p_i > 2$ et $\lambda_g(2^\nu) = 2\cdot\lambda_g(2)$ pour $g = 4k-1$.

§ 15. Soit maintenant $m = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$ et $m^\delta = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i\delta}$. Nous avons donc:

$$\lambda_g(m^\delta) = [\lambda_g(p_1^{a_1\delta}), \lambda_g(p_2^{a_2\delta}), \ldots, \lambda_g(p_k^{a_k\delta})]. \tag{37}$$

Pour δ suffisamment grand on a les relations:

$$\lambda_g(p_i^{a_i\delta}) = p_i^{a_i\delta-\nu_i}\cdot\lambda_g(p_i^{\nu_i}) = p_1^{\gamma_{1i}}p_2^{\gamma_{2i}}\ldots p_i^{a_i\delta-\nu_i+\gamma_{ii}}\ldots p_k^{\gamma_{ki}}\cdot h_i \tag{38}$$

pour $i = 1, 2, 3, \ldots, k$, où $(h_i, m) = 1$. Par conséquent, si δ est suffisamment grand, on doit avoir les inégalités:

$$a_i\delta-\nu_i+\gamma_{ii} \geqslant \gamma_i \tag{39}$$

d'où résultent les inégalités

$$\delta \geqslant \delta_i = \left\{\frac{\nu_i+\gamma_i-\gamma_{ii}}{a_i}\right\} \tag{40}$$

pour $i = 1, 2, 3, \ldots, k$. Toutes ces inégalités seront satisfaites simultanément pour

$$\delta \geqslant \max(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_k) = \mu \tag{41}$$

et nous obtenons ainsi le nombre cherché μ.

§ 16. Le nombre μ peut être exprimé d'une manière concise au moyen de la fonction $L_g(m)$. Observons d'abord que l'égalité (40) peut s'écrire sous la forme

$$\delta_i = L_{p_i^{\alpha_i}}(p_i^{\nu_i+\gamma_i-\gamma_{ii}}). \tag{42}$$

De (40) nous obtenons, en vertu du théorème IV, l'égalité

$$\mu = L_{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}}\Big(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\nu_i+\gamma_i-\gamma_{ii}}\Big) = L_m\Big(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\nu_i+\gamma_i-\gamma_{ii}}\Big). \tag{43}$$

En tenant compte de ce que nous avons dit sur les nombres γ_{ii} et le nombre $\lambda_g(N) = W$, nous pouvons écrire les formules:

$$\mu = L_m\Big(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\nu_i+\gamma_i}\Big) = L_m(N\cdot\overline{W}_m) \tag{44a}$$

et

$$\mu = L_m\Big(\tfrac{1}{2}\prod_{i=1}^{k} p_i^{\nu_i+\gamma_i}\Big) = L_m(\tfrac{1}{2}N\cdot\overline{W}_m), \tag{44b}$$

si m est pair et $g = 4k-1$.

Récapitulant les résultats obtenus nous avons le théorème suivant, valable dans le cas le plus général:

THÉORÈME VI. *Si* $m = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, $(m, g) = 1$, $N = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\nu_i}$, $\lambda_g(N) = W$ *et* μ *désigne le nombre des termes irréguliers de la suite* $\{\lambda_g(m^\delta)\}$ $(\delta = 1, 2, 3, \dots)$, *alors on a pour* $\delta > \mu$ *la formule*

$$\lambda_g(m^\delta) = m^{\delta-\mu}\cdot\lambda_g(m^\mu),$$

où le nombre μ *s'exprime généralement par la formule*

$$\mu = L_m(N\cdot\overline{W}_m),$$

sauf dans le cas où m *est pair et* $g = 4k-1$; *dans ce cas*

$$\mu = L_m(\tfrac{1}{2}N\cdot\overline{W}_m).$$

COROLLAIRE III. *Si* $(m, g) = 1$ *et* $\delta > \delta_0 > \mu$, *on a la relation*

$$\lambda_g(m^\delta) = m^{\delta-\delta_0}\cdot\lambda_g(m^{\delta_0}).$$

Les fonctions $\lambda_g(m^\delta)$ et $L_g(m^\delta)$ dans le cas où $(m, g) \neq 1$

§ 17. Dans ce cas général nous appliquons d'abord la factorisation relative des nombres m et g. Soit

$$m = m_g\cdot\overline{m}_g, \qquad g = \bar{g}_m\cdot g_m.$$

Le théorème II fournit alors les relations:

$$\lambda_g(m^\delta) = \lambda_g(m_g^\delta), \tag{45}$$

$$L_g(m^\delta) = L_{\bar{g}_m}(\overline{m}_g^\delta). \tag{46}$$

Ainsi le cas général, où $(m, g) > 1$, se ramène aux cas particuliers que nous avons déjà étudiés.

Détermination de $\lambda_g(m^\delta)$ et de $L_g(m^\delta)$ lorsque g est grand

§ 18. Lorsque g est grand par rapport à m le calcul des valeurs de ces fonctions peut être facilité par l'application du théorème I. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de calculer $\lambda_{910}(12^\delta)$ et $L_{910}(12^\delta)$. Comme $910 \equiv 10 \pmod{12}$, nous avons en appliquant le théorème I:

$$m_g = 12_{910} = 12_{10} = 3,$$

$$\overline{m}_g = \overline{12}_{910} = \overline{12}_{10} = 2^2 = 4.$$

Par conséquent

$$\lambda_{910}(12^\delta) = \lambda_{910}(3^\delta),$$

$$L_{910}(12^\delta) = L_{910}(2^{2\delta}) = L_2(2^{2\delta}) = 2\delta,$$

car il est évident que l'on a $\bar{g}_m = \overline{910}_4 = 2$.

Mais $\lambda_{910}(3^\delta) = 3^{\delta-\nu}\cdot\lambda_{910}(3^\nu)$ pour $\delta > \nu$.

Il ne reste plus qu'à calculer ν. En vertu de la propriété I de la fonction $\lambda_g(m)$ (cf. [1]), la congruence $g \equiv \bar{g} \pmod{m}$ implique

$$\lambda_g(m) = \lambda_{\bar{g}}(m), \text{ donc}$$

$$\lambda_{910}(3) = \lambda_4(3) = 1,$$

$$\lambda_{910}(9) = \lambda_{10}(9) = 1,$$

$$\lambda_{910}(27) = \lambda_{19}(27) \neq 1, \text{ par conséquent } \lambda_{910}(27) = 3.$$

Ainsi $\nu = 2$ et $\lambda_{910}(3^\delta) = 3^{\delta-2}$ pour $\delta > 2$.

IV. Les suites $\{\lambda_g(m)\}$ (m constant, $g = 2, 3, 4, \dots$) et $\{\lambda_{g^t}(m)\}$ $(t = 1, 2, \dots)$

§ 19. D'après la propriété I de la fonction $\lambda_g(m)$ que nous venons d'énoncer dans l'exemple précédent, la suite $\{\lambda_g(m)\}$, $g = 2, 3, 4, \dots$, est périodique et la longueur de la période est m. En vertu de la même propriété, la suite $\lambda_{g^t}(m)$ $(t = 1, 2, 3, \dots)$ doit être périodique, puisque la suite $\{g^t\} \bmod m$ est périodique, et la longueur de sa période est $\lambda = \lambda_g(m)$.

Soit

$$g^t \equiv g_t \,(\mathrm{mod}\, m); \tag{47}$$

pour $t = \lambda$ nous prendrons

$$g^\lambda \equiv g_\lambda = m+1 \,(\mathrm{mod}\, m). \tag{48}$$

En vertu de la propriété mentionnée nous avons les relations:

$$\lambda_{g^{\lambda+i}}(m) = \lambda_{g_i}(m), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots \tag{49}$$

On établit aisément l'égalité

$$\lambda_{g_i}(m) = \frac{\lambda}{(\lambda, i)}. \tag{50}$$

Exemples. Comme $\mathrm{R}\dfrac{2^t}{5} = \dot{2}, \dot{4}, \dot{3}, \dot{1}$ (pour $t = 1, 2, 3, \ldots$), on a

$$\lambda_{2^t}(5) = \dot{4}, \dot{2}, \dot{4}, \dot{1} \quad \text{pour} \quad t = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

De là $\lambda_{2^t}(5^\delta) = 5^{\delta-\nu_t}\cdot\lambda_{2^t}(5)$, où $\nu_t = \nu_{2^t}(5)$.

Comme $\mathrm{R}\dfrac{3^t}{5} = \dot{3}, \dot{4}, \dot{2}, \dot{1}$, on a $\lambda_{3^t}(5) = \dot{4}, \dot{2}, \dot{4}, \dot{1}$ et par suite $\lambda_{3^t}(5^\delta) = 5^{\delta-\nu_t}\cdot\lambda_{3^t}(5)$, où $\nu_t = \nu_{3^t}(5)$.

Les suites $\nu_{g^t}(p)$ et $\lambda_{g^t}(p)$, $t = 1, 2, 3, \ldots$

§ 20. Les derniers exemples conduisent à l'égalité générale:

$$\lambda_{g^t}(p^\delta) = p^{\delta-\nu_t}\cdot\lambda_{g^t}(p) \quad \text{pour} \quad \delta \geqslant \nu_t \tag{51}$$

où p désigne un nombre premier et $\nu_t = \nu_{g^t}(p)$. Il y a beaucoup d'intérêt à étudier les suites: $\lambda_{g^t}(p)$ et $\nu_{g^t}(p)$ lorsque $t = 1, 2, 3, \ldots$

Soit $a = g^{t'}$, où $(t', p) = 1$; puisque $(g, p) = 1$, on a aussi $(a, p) = 1$. Soit $\lambda' = \lambda_a(p) = \lambda_a(p^2) = \ldots = \lambda_a(p^\nu) \neq \lambda_a(p^{\nu+1})$, où $\nu = \nu_a(p)$. On a donc les relations:

$$a^{\lambda'} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p^\nu), \tag{52}$$

$$a^{\lambda'} \not\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p^{\nu+1}), \tag{53}$$

$$\lambda_a(p^\delta) = p^{\delta-\nu}\cdot\lambda_a(p^\nu) = p^{\delta-\nu}\cdot\lambda_a(p) = p^{\delta-\nu}\cdot\lambda'. \tag{54}$$

Par conséquent on a aussi

$$a^{p\cdot\lambda'} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p^{\nu+1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

d'une façon générale:

$$a^{p^\tau\cdot\lambda'} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p^{\nu+\tau}), \tag{55}$$

$$a^{p^\tau\cdot\lambda'} \not\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p^{\nu+\tau+1}). \tag{56}$$

En posant maintenant $A = a^{p^\tau}$, on peut mettre les dernières relations sous la forme:

$$A^{\lambda'} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p^{\nu+\tau}), \tag{57}$$

$$A^{\lambda'} \not\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p^{\nu+\tau+1}). \tag{58}$$

De là résultent les égalités

$$\lambda_A(p) = \lambda_A(p^2) = \ldots = \lambda_A(p^{\nu+\tau}) = \lambda', \tag{59}$$

$$\lambda_A(p^\delta) = p^{\delta-\nu-\tau}\cdot\lambda_A(p) \quad \text{pour} \quad \delta > \nu+\tau. \tag{60}$$

Comme $a = g^{t'}$, on a: $A = g^{t'p^\tau} = g^t$, où $t = t'\cdot p^\tau$ et $(t', p) = 1$ par hypothèse. Donc $\tau = L_p(t)$.

La formule (59) peut alors s'écrire sous la forme;

$$\lambda_A(p) = \lambda_{g^t}(p) = \lambda' = \lambda_a(p) = \lambda_{g^{t'}}(p). \tag{61}$$

De là on obtient l'égalité

$$\lambda_{g^t}(p) = \lambda_{g^{t'}}(p). \tag{62}$$

En tenant compte de (61) on peut mettre (60) sous la forme

$$\lambda_{g^t}(p^\delta) = p^{\delta-\nu_t}\cdot\lambda_{g^{t'}}(p) \tag{63}$$

où

$$\nu_t = \nu_{g^t}(p) = \nu+\tau = \nu_a(p)+\tau = \nu_{g^{t'}}(p)+L_p(t).$$

Les résultats obtenus permettent d'énoncer le théorème suivant:

Théorème VII. *Si $(p, g) = 1$, $t = t'p^\tau$, $(t', p) = 1$; si g, t sont des nombres naturels, τ un nombre entier $\geqslant 0$ et p un nombre premier, on a les relations:*

$$\lambda_{g^t}(p) = \lambda_{g^{t'}}(p),$$

$$\nu_t = \nu_{g^t}(p) = \nu_{g^{t'}}(p)+\tau = \nu_{g^{t'}}(p)+L_p(t).$$

Il résulte de ce théorème que si $t' = \mathrm{const}$ et $t = t'\cdot p^\tau$, $\tau = 0, 1, 2, 3, \ldots$, alors ν_t est la suite des nombres naturels $\geqslant \nu_{g^{t'}}(p)$ et $\lambda_{g^t}(p) = \lambda_{g^{t'}}(p) = \mathrm{const}$. Si $t = 1, 2, 3, \ldots$, les grandeurs t' et τ seront variables; il en sera de même des grandeurs $\nu_{g^{t'}}(p)$ et $\lambda_{g^{t'}}(p)$.

Exemple. $g = 2$, $p = 5$, $t' = 2$, $t = 2\cdot 5^\tau$; alors

$$\nu_{g^{t'}}(p) = \nu_{2^2}(5) = 1; \qquad \lambda_{g^{t'}}(p) = \lambda_{2^2}(5) = 2,$$

donc

$$\nu_{g^t}(p) = \nu_{2^{2\cdot 5^\tau}}(5) = 1+\tau,$$

$$\lambda_{g^t}(p^\delta) = \lambda_{2^{2\cdot 5^\tau}}(5^\delta) = 5^{\delta-(1+\tau)}\cdot\lambda_{2^2}(5) = 2\cdot 5^{\delta-1-\tau}.$$

§ 21. Soit maintenant $P = p^\alpha$, où α désigne un nombre naturel. Alors

$$\lambda_{g^t}(P^\delta) = P^{\delta-\vartheta_t}\cdot\lambda_{g^t}(P^{\vartheta_t}) \qquad \text{pour} \qquad \delta \geqslant \vartheta_t = \vartheta_t(P),$$

où $\vartheta_t = \{\nu_{g^t}(p)/\alpha\}$. En vertu du théorème VII on a donc l'égalité:

$$\vartheta_t(P) = \vartheta_t(p^\alpha) = \left\{\frac{\nu_{g^{t'}}(p)+L_p(t)}{\alpha}\right\}. \tag{64}$$

Si $t = t'\cdot p^{c\tau}$, où $(t', p) = 1$, alors $L_p(t) = c\tau$, donc

$$\vartheta_t(P) = \left\{\frac{\nu_{g^{t'}}(p)+c\tau}{\alpha}\right\}. \tag{65}$$

Si de plus $c = u\alpha$, alors $\vartheta_t(P) = \{\nu_{g^{t'}}(p)/\alpha\}+u\tau$. Lorsque $\tau\to\infty$ on a aussi $\vartheta_t(P)\to\infty$.

§ 22. Soit ensuite: $m = \prod\limits_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, $T = \prod\limits_{i=1}^{k} p_i^{c_i}$, $t = t'\cdot T^\tau$ où $(t', T) = (t', m) = 1$. On a donc les relations: $L_{p_i}(t) = c_i\tau$; $\nu_{g^t}(p_i) = \nu_{g^{t'}}(p_i) + L_{p_i}(t) = \nu_{g^{t'}}(p_i)+c_i\tau$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots, k$, et $N_t = \prod\limits_{i=1}^{k} p_i^{\nu_{g^t}(p_i)} = \prod\limits_{i=1}^{k} p_i^{\nu_{g^{t'}}(p_i)}\cdot\prod\limits_{i=1}^{k} p_i^{c_i\tau} = N_t'\cdot T^\tau$, où $N_t' = \prod\limits_{i=1}^{k} p_i^{\nu_{g^{t'}}(p_i)}$.

En posant $\lambda_{g^t}(N_t) = W_t$ on peut écrire, d'après le théorème VI, l'égalité:

$$\lambda_{g^t}(m^\delta) = m^{\delta-\mu_t}\cdot\lambda_{g^t}(m^{\mu_t}) \qquad \text{pour} \qquad \delta \geqslant \mu_t = \mu_{g^t}(m)$$

où

$$\mu_t = \mu_{g^t}(m) = L_m\big(N_t\cdot(\overline{W}_t)_m\big) = L_m\big(N_t'\cdot T^\tau\cdot(\overline{W}_t)_m\big) \tag{66}$$

ou bien

$$\mu_{g^t}(m) = L_m\big((\tfrac{1}{2}N_t\cdot\overline{W}_t)_m\big) = L_m\big(\tfrac{1}{2}N_t'\cdot T^\tau\cdot(\overline{W}_t)_m\big) \tag{67}$$

dans le cas où $g = 4s-1$, m — pair et t — impair; cette dernière condition est nécessaire, car le nombre $G_t = g^t = (4s-1)^t$ n'est du type $4s-1$ que si t est impair.

En tenant compte de l'inégalité: $L_g(a) \leqslant L_g(ab) \leqslant L_g(a)+L_g(b)$ on peut écrire l'inégalité

$$L_m(T^\tau) \leqslant \mu_{g^t}(m) \leqslant L_m(T^\tau)+L_m\big(N_t'\,(\overline{W}_t)_m\big). \tag{68}$$

Mais en vertu du théorème IV on a les égalités

$$L_m(T^\tau) = \left\{\frac{c\tau}{a}\right\} \qquad \text{et} \qquad L_m(T) = \left\{\frac{c}{a}\right\}$$

où $\dfrac{c}{a} = \max\left(\dfrac{c_1}{\alpha_1}, \dfrac{c_2}{\alpha_2}, \dfrac{c_3}{\alpha_3}, \ldots, \dfrac{c_k}{\alpha_k}\right)$. L'inégalité (68) prend donc la forme

$$\left\{\frac{c\tau}{a}\right\} \leqslant \mu_{g^t}(m) \leqslant \left\{\frac{c\tau}{a}\right\} + L_m\big(N_t'\cdot(\overline{W}_t)_m\big).$$

Les considérations précédentes permettent d'énoncer le corollaire suivant:

Corollaire IV. *Si*

$$m = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}, \quad T = \prod_{i=1}^{k} p_i^{c_i}, \quad t = t'\cdot T^\tau, \quad (t', T) = 1, \quad N_t' = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\nu_{g^{t'}}(p_i)},$$

$$N_t = N_t'\cdot T^\tau, \quad W_t = \lambda_{g^t}(N_t), \quad L_m(T) = \left\{\frac{c}{a}\right\},$$

on a l'inégalité

$$\left\{\frac{c\tau}{a}\right\} \leqslant \mu_{g^t}(m) \leqslant \left\{\frac{c\tau}{a}\right\} + L_m\big(N_t'\cdot(\overline{W}_t)_m\big)$$

ou bien

$$\left\{\frac{c\tau}{a}\right\} \leqslant \mu_{g^t}(m) \leqslant \left\{\frac{c\tau}{a}\right\} + L_m\big(\tfrac{1}{2}N_t'\cdot(\overline{W}_t)_m\big)$$

dans le cas où $g = 4s-1$, m pair, t impair.

De ce corollaire il s'ensuit que $\mu_{g^t}(m) = \left\{\dfrac{c\tau}{a}\right\}+A_t$ où A_t est un nombre entier non négatif qui dépend de m, g, t.

Si $c_i = u\alpha_i$, alors $T = m^u$ et $L_m(T^\tau) = u\tau$. Si $\tau\to\infty$ on a aussi $\mu_{g^t}(m)\to\infty$.

Les nombres ν, ϑ, μ qui dépendent des nombres g, m, et devraient-semble-t-il-être toujours petits, peuvent pourtant prendre des valeurs arbitrairement grandes.

V. Application des fonctions $\lambda_g(m)$ et $L_g(m)$ à l'étude de la périodicité $\bmod m^k$ des suites $\{g^n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

§ 23. W. Sierpiński [3] a étudié la suite des nombres $\{2^n\}$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ et il a démontré que dans ces nombres les chiffres derniers, avant-derniers, ..., k-ièmes à partir du dernier forment des périodes. Les suites des nombres composés de $1, 2, \ldots, k$ chiffres à partir du dernier forment aussi des périodes. Ce sont les suites $\{2^n\} \bmod 10^k$. La longueur de ces périodes est $l_k = 4 \cdot 5^{k-1}$; chacune de ces périodes commence par le nombre 2^k.

R. Hampel [5] a obtenu des résultats analogues pour les suites $\{g^n\}$ pour $g = 3, 5, 11, 2^l$.

K. Tatarkiewicz [4] a généralisé ces résultats pour une base g quelconque. Il a démontré que l'on a pour toute base g l'inégalité

$$\frac{l_{k+1}}{l_k} \leqslant \frac{10}{(10, g)} \tag{69}$$

et que pour toute base g il existe un nombre $N(g)$, le plus petit, tel que l'on a pour $k > N(g)$ l'égalité

$$\frac{l_{k+1}}{l_k} = \frac{10}{(10, g)}. \tag{70}$$

§ 24. Le problème de l'étude de la périodicité $\bmod 10^k$ des suites $\{g^n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ est un cas particulier du problème de la périodicité $\bmod m^k$ de ces suites. L'application des fonctions $\lambda_g(m)$ et $L_g(m)$ facilite considérablement cette étude. Nous avons déjà vu au § 2 que $\lambda_g(m)$ *est le nombre des termes réguliers et* $L_g(m)$ *celui des termes irréguliers de la suite* $\{g^n\} \bmod m$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$.

Remarque. Les résultats gagnent en simplicité si l'on commence par $n = 0$ au lieu de $n = 1$.

Les formules (45) et (46), jointes au théorème VI, donnent ainsi la solution complète du problème proposé.

§ 25. Il est facile de montrer que les résultats obtenus par les auteurs cités plus haut peuvent être établis directement en utilisant les fonctions $\lambda_g(m^k)$ et $L_g(m^k)$.

Ainsi, nous avons:

1. $\lambda_2(10^k) = \lambda_2(5^k) = 5^{k-1} \cdot 4$ pour $k > 1$; $L_2(10^k) = L_2(2^k) = k$. (Résultat de W. Sierpiński).

2. $\lambda_3(10^k) = 10^{k-4} \cdot \lambda_3(10^4) = 10^{k-4} \cdot 500$ pour $k > 4$; $\lambda_3(10^k) = 4, 20, 100, 500$ pour $k = 1, 2, 3, 4$ respectivement; $L_3(10^k) = 0$. (Résultat de K. Tatarkiewicz).

3. $\lambda_{31}(10^k) = 10^{k-6} \cdot \lambda_{31}(10^6) = 10^{k-6} \cdot 6250$ pour $k > 6$; $\lambda_{31}(10^k) = 1, 10, 50, 250, 1250, 6250$ pour $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $L_{31}(10^k) = 0$ (Résultat de K. Tatarkiewicz)

§ 26. Soit $l_{k+1}/l_k = \varrho_k$. Dans le cas général, c'est-à-dire pour la suite $\{g^n\} \bmod m^k$, on a $l_k = \lambda_g(m^k)$. On peut se poser la question: *comment la grandeur* ϱ_k *varie-t-elle?* Dans le cas général où $(g, m) \geqslant 1$ on a, en vertu de la formule (45): $\lambda_g(m^k) = \lambda_g(m_g^k)$, donc

$$\varrho_k = \frac{\lambda_g(m_g^{k+1})}{\lambda_g(m_g^k)}. \tag{71}$$

En étudiant le procédé par lequel on calcule les termes irréguliers de la suite $\lambda_g(m^k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, par exemple à l'aide du tableau (cf. § 14), nous constatons que l'on a l'inégalité $\varrho_k \leqslant m_g$ pour $1 \leqslant k \leqslant \mu$.

Puisque pour $k > \mu$ on a $\lambda_g(m_g^k) = m_g^{k-\mu} \cdot \lambda_g(m_g^\mu)$, il s'ensuit

$$\varrho_k = \frac{m_g^{k+1-\mu} \cdot \lambda_g(m_g^\mu)}{m_g^{k-\mu} \cdot \lambda_g(m_g^\mu)} = m_g. \tag{72}$$

Nous obtenons ainsi:

Corollaire V. *Si* $\varrho_k = \dfrac{\lambda_g(m^{k+1})}{\lambda_g(m^k)}$, *on a*

$$\varrho_k \leqslant m_g \quad \textit{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant \mu,$$
$$\varrho_k = m_g \quad \textit{pour} \quad k > \mu.$$

§ 27. Il est aisé de montrer que l'*on a l'inégalité*

$$m_g \leqslant \frac{m}{(m, g)}. \tag{73}$$

Démonstration. Puisque $m = m_g \cdot \overline{m}_g$, on a $m_g = m/\overline{m}_g$. Or, en vertu de (8), on a

$$(m, g) = (\overline{m}_g, \bar{g}_m) \leqslant \overline{m}_g,$$

donc $\dfrac{1}{(m, g)} \geqslant \dfrac{1}{\overline{m}_g}$ d'où il vient $\dfrac{m}{(m, g)} \geqslant \dfrac{m}{\overline{m}_g}$ et enfin $\dfrac{m}{(m, g)} \geqslant m_g$, ce qu'il fallait démontrer.

§ 28. L'égalité ne peut avoir lieu dans (73) que lorsque $(m, g) = \overline{m}_g$.

Nous allons montrer que dans le cas où $m = 10$, considéré par K. Tatarkiewicz, on a bien l'égalité.

En posant $g = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots$ nous avons $(10, g) = 1, 2, 1, 2, 5, 2, 1, 2, 1, 10, 1, 2, 1, \ldots$ et $\overline{10}_g = 1, 2, 1, 2, 5, 2, 1, 2, 1, 10, 1, 2, 1, \ldots$ Donc $(10, g) = \overline{10}_g$, d'où résulte l'égalité: $\varrho_k = 10/(10, g)$ pour $k > \mu$. Pourtant, pour $m = 12 = 2^2 \cdot 3$, un raisonnement analogue donne:

$$\begin{aligned} g &= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, \ldots \\ (12, g) &= 1, 2, 3, 4, 1, 6, 1, 4, 3, 2, 1, 12, 1, 2, \ldots \\ \overline{12}_g &= 1, 4, 3, 4, 1, 12, 1, 4, 3, 4, 1, 12, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

On a donc généralement: $(12, g) \neq \overline{12}_g$.

Travaux cités

[1] F. Jakóbczyk, *Les applications de la fonction $\lambda_g(n)$ à l'étude des fractions périodiques et de la congruence chinoise* $2^n \equiv 2 \pmod{n}$, Ann. U. M. C. S., Lublin — Polonia, vol. V, 6 (1951), p. 97-138.

[2] W. Sierpiński, *Teoria liczb*, Warszawa 1950.

[3] — *Sur les puissances du nombre* 2, Ann. Soc. Pol. Math. 23 (1950), p. 252-258.

[4] K. Tatarkiewicz, *Sur les puissances des entiers*, Ann. U. M. C. S., Lublin — Polonia, vol. VIII, 1 (1954), p. 5-23.

[5] R. Hampel, *Wyznaczanie najkrótszego okresu liczb* 3^n, 5^n, 11^n oraz $(2^l)^n$ mod 10^k, Zeszyty Nauk. Polit. Warszaw., Elektryka, 1 (1953), p. 95-102.

Reçu par la Rédaction le 16. 4. 1958

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
IX (1960)

Quelques propriétés des potentiels généralisés relatifs à l'équation parabolique définie sur une variété riemannienne

par H. Marcinkowska (Warszawa)

Introduction. F. Dressel [2] a étudié la solution fondamentale de l'équation générale du type parabolique

$$a^{ik}(t, x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} + b^i(t, x)\frac{\partial u}{\partial x^i} + c(t, x)u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{0.1}$$

où les coefficients a^{ik}, b^i, c sont des fonctions suffisamment régulières, définies pour les valeurs de t réelles appartenant à un intervalle borné et pour x appartenant à un domaine de l'espace euclidien à n dimensions. Dans le cas particulier de l'équation de la propagation de la chaleur cette solution fondamentale admet la forme bien connue [6]

$$(2\sqrt{\pi})^{-n}(x-y)^{-n/2}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2}{4(t-s)}\right) \qquad (t_0 < s < t < t_1;\ x, y \in E^n).$$

W. Pogorzelski [7] a obtenu la solution fondamentale de l'équation (0.1) en faisant sur les coefficients des hypothèses plus générales. S. Itô [5] a donné une autre généralisation en construisant la solution fondamentale dans le cas d'une équation définie sur une variété différentiable.

À l'aide de la solution fondamentale on peut définir les potentiels généralisés de volume et de double couche relatifs à l'équation (0.1). L. Slobodeckij [10] a étudié ces potentiels dans le cas de l'équation parabolique considérée dans un domaine de l'espace euclidien sous des hypothèses un peu plus faibles que celles de Dressel. Le potentiel de simple couche dans l'espace euclidien a été étudié par W. Pogorzelski [8] sous des hypothèses très faibles.

Dans cet article nous étudions quelques propriétés du potentiel de volume et de double couche relatif à l'équation parabolique définie sur une variété riemannienne. Pour affaiblir la singularité des intégrales qui font apparition après la dérivation, on utilise la condition de Hölder