ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VIII (1960)

Congruences de droites à connexion projective

par A. Švec (Praha)

Dans ce travail j'étudie les congruences de droites à connexion projective arbitraire qui généralisent les congruences de droites plongées dans l'espace projectif à trois dimensions.

1. J'expliquerai d'abord ce que j'entends par *congruence de droites à connection projective*:

Soit σ un domaine dans l'espace euclidien à deux dimensions E_2; à chaque point $(u, v) \in \sigma$ je fais correspondre un espace projectif à trois dimensions $S_3 = S_3(u, v)$ (espace local) et dans celui-ci une droite $p = p(u, v)$. Soient maintenant (u_1, v_1), (u_2, v_2) deux points (qui peuvent coïncider) du domaine σ; à chaque arc γ qui les joint correspond alors une homographie entre les espaces $S_3(u_1, v_1)$ et $S_3(u_2, v_2)$. Ici le domaine $\sigma \subset E_2$ ne joue que le rôle d'un ensemble de paramètres et peut être remplacé par n'importe quel domaine, pourvu que celui-ci lui soit homéomorphe.

Analytiquement on peut procéder comme il suit: je choisis dans chaque espace local S_3 un repère, c'est-à-dire quatre points analytiques A_1, A_2, A_3, A_4 liés par la condition

$$[A_1, A_2, A_3, A_4] = 1 \tag{1.1}$$

de manière que la droite p passe par A_1, A_2. Ensuite je considère les équations

$$\begin{cases} \nabla A_i = \omega_{ij} A_j \quad (i, j = 1, \ldots, 4), \\ \omega_{ij} = a_{ij}(u, v)\, du + b_{ij}(u, v)\, dv, \\ \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{44} = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Soit alors γ un arc joignant les deux points (u_1, v_1), (u_2, v_2) donné par les équations paramétriques

$$\begin{gathered} u = u(t), \quad v = v(t), \\ u(0) = u_1, \quad v(0) = v_1, \quad u(1) = u_2, \quad v(1) = v_2. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Soit maintenant pour (3)

$$\omega_{ij} = p_{ij}\,dt;$$

le système (1.2) devient ainsi un système d'équations différentielles

$$\frac{dA_i}{dt} = p_{ij}A_j \quad (i, j = 1, \ldots, 4). \tag{1.4}$$

Soit $B_1, \ldots, B_4$ la solution de ce système pour $t = 1$, déterminée par les conditions initiales $(A_i)_{t=0} = A_i(u_1, v_1)$. Alors l'homographie $KB_i = A_i(u_2, v_2)$ est justement l'homographie en question entre $S_3(u_1, v_1)$ et $S_3(u_2, v_2)$.

A chaque courbe dans $\sigma \subset E_2$ on peut faire correspondre une surface réglée plongée dans $S_3(u_1, v_1)$ et cela d'une manière évidente: la courbe γ étant donnée par (1.3), la surface réglée est engendrée par la droite $[A_1A_2]$, où $A_1 = A_1(t)$, $A_2 = A_2(t)$ sont les solutions considérées du système (1.2). Je dis que la courbe γ donne une surface réglée R_γ de la congruence de droites L. La surface R_γ est développable si son développement dans un des espaces locaux de ses droites est une surface développable. L'équation différentielle des surfaces réglées développables de la congruence L est

$$[A_1A_2\nabla A_1\nabla A_2] \equiv \omega_{13}\omega_{24} - \omega_{14}\omega_{23} = 0. \tag{1.5}$$

Je me borne aux congruences *non paraboliques*, ces congruences étant décomposables en deux systèmes de surfaces développables. Je suppose que les surfaces développables sont $u = \text{const}$ et $v = \text{const}$. Soit une surface développable R $(u = c)$ de la congruence L et R^* son développement dans l'espace local d'une de ses droites $p(c, v)$. La surface R^* est développable et prenons un point de l'arête de rebroussement (ou le sommet dans le cas d'un cône) pour point A_1 du repère; le point A_2 peut être choisi d'une manière analogue.

De la définition des points A_1 et A_2 on obtient

$$[\nabla_v A_1, A_1, A_2] = 0 = [\nabla_u A_2, A_1, A_2] \tag{1.4}$$

ou

$$b_{13} = b_{14} = a_{13} = a_{14} = 0. \tag{1.5}$$

On a

$$\begin{aligned} \nabla A_1 &= \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2 + a_{13}du\,A_3 + a_{14}du\,A_4, \\ \nabla A_2 &= \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2 + b_{23}dv\,A_3 + b_{24}dv\,A_4; \end{aligned} \tag{1.6}$$

les points $a_{13}A_3 + a_{14}A_4$, $b_{23}A_3 + b_{24}A_4$ étant linéairement indépendants, on peut choisir les repères locaux de manière que les équations

$$\begin{aligned} \nabla A_1 &= \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2 + du\,A_3, \\ \nabla A_2 &= \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2 + dv\,A_4 \end{aligned} \tag{1.7}$$

soient vérifiées.

2. Je vais calculer les variations des formes ω_{ij} induites par les variations des repères locaux. Il est évident que je dois me restreindre aux variations qui conservent les équations (1.7).

Les variations les plus générales des repères sont

$$(\bar{A}) = (\alpha)(A), \tag{2.1}$$

où

$$(\bar{A}) = \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \vdots \\ \bar{A}_4 \end{pmatrix}, \quad (A) = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_4 \end{pmatrix}, \quad (\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

avec

$$|\alpha| = 1. \tag{2.3}$$

On peut écrire les équations (2.1) sous la forme

$$(\nabla A) = (\omega)(A). \tag{2.4}$$

Par un procédé analogue à celui d'E. Cartan on obtient

$$(\nabla\bar{A}) = (d\alpha)(A) + (\alpha)(\nabla A);$$

de $(\nabla\bar{A}) = (\bar{\omega})(\bar{A})$ j'obtiens $(\nabla A) = (\alpha)^{-1}\big((\bar{\omega})(\alpha) - (d\alpha)\big)(A)$ et

$$(\omega) = (\alpha)^{-1}\big((\bar{\omega})(\alpha) - (d\alpha)\big). \tag{2.5}$$

Maintenant je vais calculer les variations admissibles (celles qui conservent (1.7)). De la signification géométrique de la forme des équations (1.7) résulte que chaque transformation admissible des paramètres et des repères locaux doit être de la forme

$$u = u(\bar{u}), \quad v = v(\bar{v}), \tag{2.6}$$

$$\left\{ \begin{aligned} A_1 &= \varrho\bar{A}_1, \\ A_2 &= \sigma\bar{A}_2, \\ A_3 &= \alpha_{31}\bar{A}_1 + \alpha_{32}\bar{A}_2 + \alpha_{33}\bar{A}_3 + \alpha_{34}\bar{A}_4, \\ A_4 &= \alpha_{41}\bar{A}_1 + \alpha_{42}\bar{A}_2 + \alpha_{43}\bar{A}_3 + \alpha_{44}\bar{A}_4, \\ & \varrho\sigma(\alpha_{33}\alpha_{44} - \alpha_{34}\alpha_{43}) = 1. \end{aligned} \right. \tag{2.7}$$

Des équations (1.7) on obtient

$$(2.8)\quad \begin{cases} \varrho\nabla\bar{A}_1 \equiv \sigma\omega_{12}\bar{A}_2 + du(\alpha_{32}\bar{A}_2 + \alpha_{33}\bar{A}_3 + \alpha_{34}\bar{A}_4) \pmod{\bar{A}_1}, \\ \sigma\nabla\bar{A}_2 \equiv \varrho\omega_{21}\bar{A}_1 + dv(\alpha_{41}\bar{A}_1 + \alpha_{43}\bar{A}_3 + \alpha_{44}\bar{A}_4) \pmod{\bar{A}_2} \end{cases}$$

de sorte que

$$(2.9)\quad \begin{cases} \bar{\omega}_{12} = \varrho^{-1}\sigma\omega_{12} + \varrho^{-1}\alpha_{32}du, & \bar{\omega}_{13} = \varrho^{-1}\alpha_{33}du, & \bar{\omega}_{14} = \varrho^{-1}\alpha_{34}du, \\ \bar{\omega}_{21} = \varrho\sigma^{-1}\omega_{21} + \sigma^{-1}\alpha_{41}dv, & \bar{\omega}_{23} = \sigma^{-1}\alpha_{43}dv, & \bar{\omega}_{24} = \sigma^{-1}\alpha_{44}dv. \end{cases}$$

De $(2.9_{2,3,5,6})$ j'obtiens

$$\varrho^{-1}\alpha_{33}u' = 1, \qquad \alpha_{34} = \alpha_{43} = 0, \qquad \sigma^{-1}\alpha_{44}v' = 1$$

(où $u' = du/d\bar{u}$) et *les formules pour la transformation admissible la plus générale sont*

$$(2.10)\quad \begin{cases} A_1 = \varrho\bar{A}_1, \\ A_2 = \sigma\bar{A}_2, \\ A_3 = \alpha_{31}\bar{A}_1 + \alpha_{32}\bar{A}_2 + \varrho u'^{-1}\bar{A}_3, \\ A_4 = \alpha_{41}\bar{A}_1 + \alpha_{42}\bar{A}_2 + \sigma v'^{-1}\bar{A}_4 \end{cases}$$

où, d'après (2.3),

$$(2.11)\qquad \varrho^2\sigma^2 = u'v'.$$

De $(2.9_{1,4})$ résulte

$$\bar{\omega}_{12} \equiv \bar{a}_{12}d\bar{u} + \bar{b}_{12}d\bar{v} = \varrho^{-1}\sigma(a_{12}u'd\bar{u} + b_{12}v'd\bar{v}) + \varrho^{-1}\alpha_{32}u'd\bar{u},$$

$$\bar{\omega}_{21} \equiv \bar{a}_{21}d\bar{u} + \bar{b}_{21}d\bar{v} = \varrho\sigma^{-1}(a_{21}u'd\bar{u} + b_{21}v'd\bar{v}) + \sigma^{-1}\alpha_{41}v'd\bar{v}$$

de sorte que pour (2.6) et (2.10) on a

$$(2.12)\quad \begin{cases} \bar{a}_{12} = \varrho^{-1}\sigma u'a_{12} + \varrho^{-1}u'\alpha_{32}, & \bar{b}_{12} = \varrho^{-1}\sigma v'b_{12}, \\ \bar{a}_{21} = \varrho\sigma^{-1}u'a_{21}, & \bar{b}_{21} = \varrho\sigma^{-1}v'b_{21} + \sigma^{-1}v'\alpha_{41}. \end{cases}$$

Considérons maintenant la transformation des formes ω_{34} et ω_{43}. En substituant dans $(1.2_{3,4})$ j'obtiens

$$\alpha_{32}\nabla\bar{A}_2 + \varrho u'^{-1}\nabla\bar{A}_3 \equiv \sigma v'^{-1}\omega_{34}\bar{A}_4 \pmod{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3},$$

$$\alpha_{41}\nabla\bar{A}_1 + \sigma v'^{-1}\nabla\bar{A}_4 \equiv \varrho u'^{-1}\omega_{43}\bar{A}_3 \pmod{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_4}$$

de sorte que

$$\nabla\bar{A}_3 \equiv (\varrho^{-1}\sigma u'v'^{-1}\omega_{34} - \varrho^{-1}u'\alpha_{32}d\bar{v})\bar{A}_4 \pmod{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3},$$

$$\nabla\bar{A}_4 \equiv (\varrho\sigma^{-1}u'^{-1}v'\omega_{43} - \sigma^{-1}v'\alpha_{41}d\bar{u})\bar{A}_3 \pmod{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_4},$$

$$\bar{a}_{34}d\bar{u} + \bar{b}_{34}d\bar{v} = \varrho^{-1}\sigma u'v'^{-1}(a_{34}u'd\bar{u} + b_{34}v'd\bar{v}) - \varrho^{-1}u'\alpha_{32}d\bar{v},$$

$$\bar{a}_{43}d\bar{u} + \bar{b}_{43}dv = \varrho\sigma^{-1}u'^{-1}v'(a_{43}u'd\bar{u} + b_{43}v'd\bar{v}) - \sigma^{-1}v'\alpha_{41}d\bar{u}$$

et finalement

$$(2.13)\quad \begin{cases} \bar{a}_{34} = \varrho^{-1}\sigma u'^2v'^{-1}a_{34}, \qquad \bar{b}_{43} = \varrho\sigma^{-1}u'^{-1}v'^2b_{43}, \\ \bar{b}_{34} = \varrho^{-1}\sigma u'b_{34} - \varrho^{-1}u'\alpha_{32}, \\ \bar{a}_{43} = \varrho\sigma^{-1}v'a_{43} - \sigma^{-1}v'\alpha_{41}. \end{cases}$$

De (8.12) et (8.13) on a

$$(2.14)\quad \begin{cases} \bar{a}_{12} - \bar{b}_{34} = \varrho^{-1}\sigma u'(a_{12} - b_{34}) + 2\varrho^{-1}u'\alpha_{32}, \\ \bar{b}_{21} - \bar{a}_{43} = \varrho\sigma^{-1}v'(b_{21} - a_{43}) + 2\sigma^{-1}v'\alpha_{41}. \end{cases}$$

En utilisant les fonctions arbitraires α_{32}, α_{41} je peux choisir les repères de manière que

$$(2.15)\qquad a_{12} = b_{34}, \qquad b_{21} = a_{43}.$$

J'écris:

$$(2.16)\quad \begin{cases} a_{12} = b_{34} = h, \quad b_{21} = a_{43} = k, \\ b_{12} = \alpha_1, \quad a_{21} = \alpha_2, \quad a_{34} = \beta_2, \quad b_{43} = \beta_1 \end{cases}$$

d'accord avec les notations de M. Čech (*Transformations développables des congruences des droites*, Čech. mat. žurnal 6 (81) (1956), p. 260-286).

Les équations fondamentales de la congruence L sont

$$(2.17)\quad \begin{cases} \nabla A_1 = \omega_{11}A_1 + (h\,du + \alpha_1 dv)A_2 + du\,A_3, \\ \nabla A_2 = (\alpha_2 du + k\,dv)A_1 + \omega_{22}A_2 + dv\,A_4, \\ \nabla A_3 = \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3 + (\beta_2 du + h\,dv)A_4, \\ \nabla A_4 = \omega_{41}A_1 + \omega_{42}A_2 + (k\,du + \beta_1 dv)A_3 + \omega_{44}A_4. \end{cases}$$

La condition (2.15) restreint les transformations admissibles des repères (2.10) par les relations

$$(2.18)\qquad \alpha_{32} = \alpha_{41} = 0$$

ce qui donne

$$(2.19)\quad \begin{cases} \bar h = \varrho^{-1}\sigma u' h, & \bar k = \varrho\sigma^{-1} v' k, \\ \bar\alpha_1 = \varrho^{-1}\sigma v' \alpha_1, & \bar\alpha_2 = \varrho\sigma^{-1} u' \alpha_2, \\ \bar\beta_1 = \varrho\sigma^{-1} u'^{-1} v'^2 \beta_1, & \bar\beta_2 = \varrho^{-1}\sigma u'^2 v'^{-1}\beta_2. \end{cases}$$

3. Dans ce N° je vais établir *le degré de généralité des congruences de droites à connexion projective*. Je distinguerai plusieurs cas, dont la signification géométrique deviendra claire dans la suite. Je me borne aux congruences pour lesquelles

$$(3.1)\quad \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \neq 0.$$

Type I. Il comprend les congruences pour lesquelles

$$(3.2)\quad hk \neq 0.$$

Pour particulariser les repères locaux j'utilise les fonctions auxiliaires ϱ, σ, α_{31}, α_{42}. Je demande que le repère soit choisi de sorte que

$$(3.3)\quad h = k = 1.$$

Les transformations des repères admissibles sont limitées par les conditions nouvelles

$$(3.4)\quad \varrho^{-1}\sigma u' = \varrho\sigma^{-1} v' = 1.$$

De (3.4) on a $u'v' = 1$, de (2.11) résulte $\varrho\sigma = \varepsilon = \pm 1$. De (3.4_1) j'obtiens $\varepsilon\varrho^{-2}u' = 1$ ou $u' = \varepsilon\varrho^2$. Comme $u' = f(\bar u)$, $v' = g(\bar v)$, u' et v' doivent être constantes de sorte que ϱ et σ le sont également. On peut écrire

$$(3.5)\quad \varrho = c,\quad \sigma = \varepsilon c^{-1},\quad u' = \varepsilon c^2,\quad v' = \varepsilon c^{-2},\quad \varepsilon = \pm 1,\quad 0 \neq c = \text{const}.$$

Les équations $(2.19_{3\text{-}6})$ deviennent

$$(3.6)\quad \bar\alpha_1 = c^{-4}\alpha_1,\quad \bar\alpha_2 = c^4\alpha_2,\quad \bar\beta_1 = c^{-4}\beta_1,\quad \bar\beta_2 = c_1^4\beta_2$$

et les transformations admissibles des paramètres et des repères locaux sont

$$(3.7)\quad u = \varepsilon c^2\bar u + c_1,\quad v = \varepsilon c^{-2}\bar v + c_2\quad (c_1, c_2 = \text{const})$$

et $(\alpha_{31} = a,\ \alpha_{42} = b)$

$$(3.8)\quad A_1 = c\bar A_1,\quad A_2 = \varepsilon c^{-1}\bar A_2,\quad A_3 = a\bar A_1 + \varepsilon c^{-1}\bar A_3,\quad A_4 = b\bar A_2 + c\bar A_4.$$

Je vais calculer les variations des formes ω_{32}, ω_{41} pour (3.7) et (3.8). De (1.2) on a

$$c\nabla\bar A_1 \equiv \varepsilon c^{-1}\omega_{12}\bar A_2\ (\operatorname{mod}\bar A_1, \bar A_3, \bar A_4),$$
$$\varepsilon c^{-1}\nabla\bar A_2 \equiv c\omega_{21}\bar A_1\ (\operatorname{mod}\bar A_2, \bar A_3, \bar A_4),$$
$$a\nabla\bar A_1 + \varepsilon c^{-1}\nabla\bar A_3 \equiv (\varepsilon c^{-1}\omega_{32} + b\omega_{34})\bar A_2\ (\operatorname{mod}\bar A_1, \bar A_3, \bar A_4),$$
$$b\nabla\bar A_2 + c\nabla\bar A_4 \equiv (c\omega_{41} + a\omega_{43})\bar A_1\ (\operatorname{mod}\bar A_2, \bar A_3, \bar A_4),$$

ce qui donne

$$(3.9)\quad \begin{cases} \bar\omega_{32} = \omega_{32} + \varepsilon cb\omega_{34} - c^{-1}a\omega_{12}, \\ \bar\omega_{41} = \omega_{41} + c^{-1}a\omega_{43} - \varepsilon cb\omega_{21} \end{cases}$$

et

$$(3.10)\quad \begin{cases} \bar a_{32} = \varepsilon c^2 a_{32} + c^3\beta_2 b - \varepsilon ca, \\ \bar b_{32} = \varepsilon c^{-2} b_{32} + c^{-1}b - \varepsilon c^{-3}\alpha_1 a, \\ \bar a_{41} = \varepsilon c^2 a_{41} + \varepsilon ca - c^3\alpha_2 b, \\ \bar b_{41} = \varepsilon c^{-2} b_{41} + \varepsilon c^{-3}\beta_1 a - c^{-1}b, \end{cases}$$

d'où

$$(3.11)\quad \begin{cases} \bar a_{32} + \bar a_{41} = \varepsilon c^2(a_{32} + a_{41}) + (\beta_2 - \alpha_2)c^3 b, \\ \bar b_{32} + \bar b_{41} = \varepsilon c^{-2}(b_{32} + b_{41}) + (\beta_1 - \alpha_1)\varepsilon c^{-3} a. \end{cases}$$

De (3.6) il s'ensuit que les relations $\alpha_1 = \beta_1$ et $\alpha_2 = \beta_2$ ont une signification géométrique; il y a lieu de distinguer les cas suivants:

Type Ia. On a

$$(3.12)\quad \alpha_1 \neq \beta_1,\quad \alpha_2 \neq \beta_2,$$

j'utilise les fonctions auxiliaires a, b et je choisis le repère de manière que

$$(3.13)\quad a_{32} + a_{41} = b_{32} + b_{41} = 0$$

ce qui donne

$$(3.14)\quad a = b = 0,$$

et les transformations admissibles sont

$$(3.15)\quad A_1 = c\bar A_1,\quad A_2 = \varepsilon c^{-1}\bar A_2,\quad A_3 = \varepsilon c^{-1}\bar A_3,\quad A_4 = c\bar A_4;$$

elles dépendent d'une constante et de ε. Dans les équations (2.17) on peut choisir arbitrairement les fonctions

$$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, a_{11}, a_{22}, a_{33}, b_{11}, b_{22}, b_{33}, a_{31}, b_{31}, a_{42}, b_{42}, a_{32}, b_{32};$$

les congruences du type Ia *dépendent de seize fonctions de deux variables.*

Type Ib. On a

$$\alpha_1 \neq \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2 \tag{3.16}$$

(ou $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 \neq \beta_2$). De (3.11_2) il s'ensuit que l'on peut choisir

$$b_{32} + b_{41} = 0, \tag{3.17}$$

ce qui donne

$$a = 0. \tag{3.18}$$

De ($3.10_{1,3}$) j'obtiens, d'après (3.16) et (3.18),

$$\bar{a}_{32} - \bar{a}_{41} = \varepsilon c^2 (a_{32} - a_{41}) + 2c^3 \alpha_2 b \tag{3.19}$$

et l'on peut choisir

$$a_{32} - a_{41} = 0, \tag{3.20}$$

ce qui donne

$$b = 0 \tag{3.21}$$

On voit que *les congruences du type* Ib *dépendent de quinze fonctions de deux variables.*

Type Ic. On a

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2. \tag{3.22}$$

A l'aide de la fonction a j'obtiens

$$a_{32} = 0, \tag{3.23}$$

d'où

$$a = \varepsilon c^2 \beta_2 b. \tag{3.24}$$

Les équations ($3.10_{2\text{-}4}$) donnent

$$\begin{cases} \bar{b}_{32} = \varepsilon c^{-2} b_{32} + c^{-1}(1 - \alpha_1\alpha_2) b, \\ \bar{a}_{41} = \varepsilon c^2 a_{41}, \\ \bar{b}_{41} = \varepsilon c^{-2} b_{41} + c^{-1}(\alpha_1\alpha_2 - 1) b. \end{cases} \tag{3.25}$$

Dans le cas où

$$\alpha_1\alpha_2 \neq 1 \tag{3.26}$$

on peut choisir le repère de sorte qu'on ait

$$b_{32} = 0, \tag{3.27}$$

ce qui donne

$$a = b = 0. \tag{3.28}$$

De là résulte que *les congruences du type* Ic, *pour lesquelles* $\alpha_1\alpha_2 \neq 1$, *dépendent de quatorze fonctions de deux variables.*

Les exemples traités ci-dessus montrent sans doute suffisamment le procédé à suivre pour établir le degré de généralité; c'est pourquoi je ne le ferai pas pour tous les cas possibles.

4. Pour point de départ des considérations suivantes je prends les équations (2.17) et (2.19). J'introduis la notion de *congruence corrélative à la congruence de droites à connexion projective* L; je l'appelle *dualisation* L^*. Je considère tout espace S_3, figurant dans la définition de la congruence de droites à connexion projective, comme un espace corrélatif Σ_3, où la droite π est déterminée par le faisceau de plans dont l'axe est la droite $p \in S_3$ de la congruence L; l'homographie qui existe entre deux espaces Σ_3, correspondant à une certaine courbe γ, est la même que celle qui existe entre les espaces corrélatifs correspondants S_3.

Si j'introduis, comme d'habitude, les plans analytiques

$$\begin{cases} E_1 = [A_2A_3A_4], & E_2 = -[A_1A_3A_4], \\ E_3 = [A_1A_2A_4], & E_4 = -[A_1A_2A_3] \end{cases} \tag{4.1}$$

on a pour la dualisation formée par les droites $\pi(u, v) = [E_3E_4]$ les équations fondamentales

$$\begin{vmatrix} \nabla E_3 = -\omega_{33}E_3 - (k\,du + \beta_1 dv)E_4 - du\,E_1, \\ \nabla E_4 = -(\beta_2 du + h\,dv)E_3 - \omega_{44}E_4 - dv\,E_2, \\ \nabla E_1 = -\omega_{31} - \omega_{41}E_4 - \omega_{11}E_1 - (\alpha_2 du + k\,dv)E_2, \\ \nabla E_2 = -\omega_{32}E_3 - \omega_{42}E_4 - (h\,du + \alpha_1 dv)E_1 - \omega_{22}E_2. \end{vmatrix} \tag{4.2}$$

Les foyers A_1, A_2 de la congruence L engendrent deux *variétés de König*, on voit facilement que les foyers de la dualisation L^* sont E_3, E_4. Dans la transformation $L \to L^*$ les surfaces développables se correspondent; nous l'appellerons *transformation* (ou *correspondance*) *développable.*

J'oriente la congruence L en prenant pour premier resp. second foyer A_1 resp. A_2 de sorte que E_3 resp. E_4 est le premier resp. second foyer de la dualisation L^*. J'ai choisi les notations de manière qu'un changement d'orientation soit exprimé analytiquement par la substitution

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & du & dv & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 & h & k \\ A_2 & A_1 & A_4 & A_3 & E_2 & E_1 & E_4 & E_3 & dv & du & \alpha_2 & \alpha_1 & \beta_2 & \beta_1 & k & h \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

et la dualité par la substitution

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & du & dv & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 & h & k \\ E_3 & E_4 & E_1 & E_2 & A_3 & A_4 & A_1 & A_2 & -du & -dv & \beta_1 & \beta_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & k & h \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Je vais trouver, par exemple, *les équations des courbes asymptotiques de toutes les surfaces focales.* Les asymptotiques de la surface (A_1) sont

$$(A_1 A_2 A_3 \nabla^2 A_1) = 0$$

ce qui donne

$$\beta_2 du^2 + 2h\,du\,dv + \alpha_1 dv^2 = 0. \tag{4.5}$$

La substitution (4.3) conduit à l'équation des asymptotiques de la surface (A_2)

$$\alpha_2 du^2 + 2k\,du\,dv + \beta_1 dv^2 = 0, \tag{4.6}$$

les asymptotiques de la surface (E_3) resp. (E_4) sont (4.6) resp. (4.5). On a:

La première (seconde) surface focale de la congruence L et la seconde (première) surface focale de la dualisation L^* sont en correspondance asymptotique. Pour que les tangentes de la première resp. de la seconde surface focale soient harmoniquement conjuguées par rapport aux courbes $du = 0$ et $dv = 0$ il faut et il suffit que l'on ait

$$h = 0 \quad \textit{resp.} \quad k = 0. \tag{4.7}$$

5. Je vais étudier les invariants différentiels les plus simples d'une congruence de droites à connexion projective; je vérifie l'invariance de la forme des équations (2.19). Les invariants fondamentaux sont *les formes élémentaires*

$$i_1 = \frac{h\,du}{\alpha_1 dv}, \quad i_2 = \frac{k\,dv}{\alpha_2 du}, \tag{5.1}$$

$$i_1^* = \frac{k\,du}{\beta_1 dv}, \quad i_2^* = \frac{h\,dv}{\beta_2 du}. \tag{5.2}$$

Il est facile d'en trouver la signification géométrique. Il est possible d'introduire dans la congruence L quatre couches de surfaces réglées $\Lambda_{ij} = 0$ $(i, j = 1, 2)$ de manière que la couche $\Lambda_{ij} = 0$ découpe sur la i-ème surface focale les polaires de la couche $\omega_j = 0$ $(\omega_1 = du,\ \omega_2 = dv)$ par rapport aux asymptotiques. Les équations des couches sont

$$\begin{cases} \Lambda_{11} \equiv h\,du + \alpha_1 dv = 0, & \Lambda_{12} \equiv \beta_2 du + h\,dv = 0, \\ \Lambda_{21} \equiv k\,du + \beta_1 dv = 0, & \Lambda_{22} \equiv \alpha_2 du + k\,dv = 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Soit une couche Λ arbitraire $(du = \psi_1 \omega,\ dv = \psi_2 \omega)$, alors les birapports D_{ij} des couches $du = 0$, $dv = 0$, Λ et $\Lambda_{ij} = 0$ sont

$$D_{11} = i_1, \quad D_{12} = i_2^{*-1}, \quad D_{21} = i_1^*, \quad D_{22} = i_2^{-1}. \tag{5.4}$$

J'appelle *formes ponctuelles (planaires) de première (seconde) espèce les formes i_r (i_s^*).*

Les invariants scalaires de la congruence L sont *l'invariant de Wälsch*

$$I = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_1 \beta_2} \tag{5.5}$$

et *les invariants de torsion de première et de seconde espèce*

$$I_1 = \frac{h^2}{\alpha_1 \beta_2}, \quad I_2 = \frac{k^2}{\alpha_2 \beta_1}. \tag{5.6}$$

La signification géométrique de l'invariant de Wälsch est la même que celle d'une congruence plongée dans l'espace projectif plan. La signification des invariants (5.6) est donnée par les formules

$$I_1 = i_1 i_2^*, \quad I_2 = i_2 i_1^*. \tag{5.7}$$

Dans le cas où $hk \neq 0$, on a

$$I = \frac{i_1^* i_2^*}{i_1 i_2}. \tag{5.8}$$

Les formes invariantes les plus importantes de la congruence L sont *la forme ponctuelle et la forme planaire*

$$\varphi = \alpha_1 \alpha_2 du\,dv, \quad \varphi^* = \beta_1 \beta_2 du\,dv \tag{5.9}$$

et *les formes focales de première et de seconde espèce*

$$F_1 = \alpha_1 \beta_1 \frac{dv^3}{du}, \quad F_2 = \alpha_2 \beta_2 \frac{du^3}{dv}, \tag{5.10}$$

liées par les relations

$$\varphi\varphi^* = F_1 F_2, \quad \varphi = I\varphi^*. \tag{5.11}$$

Le sens géométrique de ces formes est le même que pour les congruences dans l'espace projectif plan.

Enfin je vais trouver deux autres formes invariantes de la congruence L qui sont très importantes pour l'étude de la déformation projective.

Mon point de départ sont les équations fondamentales (2.17), les transformations des repères locaux étant (2.10)-(2.18). Si j'écris

$$a_{31} = a, \quad a_{42} = b, \tag{5.12}$$

j'aurai, en substituant dans (2.17)

$$d\varrho\bar{A}_1 + \varrho\nabla\bar{A}_1 \equiv (\omega_{11}\varrho + adu)\bar{A}_1 \; (\mathrm{mod}\,\bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4),$$

$$d\sigma\bar{A}_2 + \sigma\nabla\bar{A}_2 \equiv (\omega_{22}\sigma + bdv)\bar{A}_2 \; (\mathrm{mod}\,\bar{A}_1, \bar{A}_3, \bar{A}_4),$$

$$a\nabla\bar{A}_1 + d(\varrho u'^{-1})\bar{A}_3 + \varrho u'^{-1}\nabla\bar{A}_3 \equiv \omega_{33}\varrho u'^{-1}\bar{A}_3 \; (\mathrm{mod}\,\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_4),$$

$$b\nabla\bar{A}_2 + d(\sigma v'^{-1})\bar{A}_4 + \sigma v'^{-1}\nabla\bar{A}_4 \equiv \omega_{44}\sigma v'^{-1}\bar{A}_4 \; (\mathrm{mod}\,\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3),$$

d'où

$$\varrho_v v' + \varrho\bar{b}_{11} = \varrho b_{11} v',$$

$$\sigma_u u' + \sigma\bar{a}_{22} = \sigma a_{22} u',$$

$$\varrho_v u'^{-1}v' + \varrho u'^{-1}\bar{b}_{33} = \varrho u'^{-1} b_{33} v',$$

$$\sigma_u u' v'^{-1} + \sigma v'^{-1}\bar{a}_{44} = \sigma v'^{-1} a_{44} u'$$

et finalement

$$\begin{cases} \bar{b}_{11} = v' b_{11} - (\log\varrho)_v v', & \bar{a}_{22} = u' a_{22} - (\log\sigma)_u u', \\ \bar{b}_{33} = v' b_{33} - (\log\varrho)_v v', & \bar{a}_{44} = u' a_{44} - (\log\sigma)_u u' \end{cases} \tag{5.13}$$

et

$$\bar{b}_{11} - \bar{b}_{33} = v'(b_{11} - b_{33}), \quad \bar{a}_{22} - \bar{a}_{44} = u'(a_{22} - a_{44}), \tag{5.14}$$

d'où résulte *l'invariance des formes*

$$\psi_1 = (a_{22} - a_{44})\,du, \quad \psi_2 = (b_{11} - b_{33})\,dv. \tag{5.15}$$

La signification géométrique directe de ces formes est inconnue.

6. Je vais traiter un autre objet de mes recherches c'est-à-dire l'étude des *transformations développables des congruences de droites à connexion projective*. Soit une congruence L dont les repères locaux sont spécialisés de sorte que les équations (2.17) soient vérifiées; soit une autre congruence L^x dont les repères sont spécialises d'une manière analogue. Toutes les expressions associées à la congruence L^x sont désignées par un astérisque. Entre les deux congruences je suppose donnée une correspondance développable (elle transforme donc chaque surface développable

de la congruence L en une surface développable de la congruence L^x). Il est possible de définir une telle correspondance par les équations

$$u^x = u, \quad v^x = v. \tag{6.1}$$

Les congruences L et L^x étant en correspondance développable, leurs dualisations le sont également.

Je vais déterminer *l'homographie tangente* de la correspondance $L \to L^x$ cette homographie K étant définie par les relations

$$K[A_1^x A_2^x] = [A_1 A_2], \quad K\nabla[A_1^x A_2^x] = \nabla[A_1 A_2] + \Theta[A_1 A_2] \tag{6.2}$$

de sorte qu'elle réalise pour chaque couple de droites correspondantes un contact analytique des congruences L et L^x. Les foyers se correspondent mutuellement et l'homographie tangente a la forme

$$\begin{cases} KA_1^x = \varrho A_1, \\ KA_2^x = \varrho^{-1}A_2, \\ KA_3^x = c_{31}A_1 + c_{32}A_2 + c_{33}A_3 + c_{34}A_4, \\ KA_4^x = c_{41}A_1 + c_{42}A_2 + c_{43}A_3 + c_{44}A_4, \end{cases} \tag{6.3}$$

$$\varrho \neq 0, \quad c_{33}c_{44} - c_{34}c_{43} = 1 \tag{6.4}$$

et on a

$$K[A_1^x A_2^x] = [A_1 A_2]. \tag{6.5}$$

De

$$\nabla[A_1 A_2] = (\omega_{11} + \omega_{22})[A_1 A_2] - du[A_2 A_3] + dv[A_1 A_4], \tag{6.6}$$

et d'une équation analogue pour $\nabla[A_1^x A_2^x]$, j'obtiens, en substituant dans (6.2_2),

$$K\nabla[A_1^x A_2^x] = \nabla[A_1 A_2] + (\tau_{11} + \tau_{22} + \varrho^{-1}c_{31}du + \varrho c_{42}dv)[A_1 A_2]. \tag{6.7}$$

Comme dans la suite, j'écris

$$\tau_{ij} = \omega_{ij}^x - \omega_{ij}. \tag{6.8}$$

De (6.7) j'obtiens finalement

$$c_{34} = c_{43} = 0, \quad c_{33} = \varrho, \quad c_{44} = \varrho^{-1}. \tag{6.9}$$

L'homographie K entre les espaces locaux corrélatifs est

$$(6.10)\quad \begin{cases} KE_3^x = \varrho^{-1}E_3, \\ KE_4^x = \varrho E_4, \\ KE_1^x = -\varrho^{-2}c_{31}E_3 - c_{41}E_4 + \varrho^{-1}E_1, \\ KE_2^x = -c_{32}E_3 - \varrho^2 c_{42}E_4 + \varrho E_2 \end{cases}$$

de sorte qu'elle est tangente à la correspondance $L^* \to L^{x*}$ entre les dualisations.

7. Des équations (5.3), (2.17) et (4.2) on voit facilement que la droite

$[A_1A_3]$	est tangente à la couche	$A_{11} = 0$	de la surface	(A_1),
$[A_2A_4]$	,,	$A_{22} = 0$	,,	(A_2),
$[E_3E_1]$	,,	$A_{21} = 0$	,,	(E_3),
$[E_4E_2]$	,,	$A_{12} = 0$	,,	(E_4)

ce qui caractérise les droites considérées.

L'équation

$$(7.1)\qquad c_{32} = 0 \quad \text{resp.} \quad c_{41} = 0$$

caractérise les homographies tangentes qui transforment la tangente $[A_1A_3]$ resp. $[A_2A_4]$ associée à la congruence L en la tangente analogue de la congruence L^x; le lecteur trouvera facilement la signification corrélative des équations (7.1). J'appelle une homographie (6.3) ou (6.10), satisfaisant à (7.1_1) resp. (7.1_2), *demi-canonique de première resp. de seconde espèce*; une homographie satisfaisant à (7.1) est appelée *demi-canonique*. Les équations de l'homographie demi-canonique s'écrivent sous la forme

$$(7.2)\quad \begin{cases} KA_1^x = \varrho A_1, \\ KA_2^x = \varrho^{-1}A_2, \\ KA_3^x = c_{31}A_1 + \varrho A_3, \\ KA_4^x = c_{42}A_2 + \varrho^{-1}A_4; \end{cases}$$

cette homographie conduit aux équations suivantes

$$(7.3)\quad K\nabla A_1^x = \varrho\nabla A_1 + (\varrho\tau_{11} + c_{31}du)A_1 + (\overline{\varrho^{-1}h^x - \varrho h}du + \overline{\varrho^{-1}a_1^x - \varrho a_1}dv)A_2,$$

$$(7.4)\quad K\nabla A_2^x = \varrho^{-1}\nabla A_2 + (\varrho^{-1}\tau_{22} + c_{42}dv)A_2 + (\overline{\varrho a_2^x - \varrho^{-1}a_2}du + \overline{\varrho k^x - \varrho^{-1}k}dv)A_1,$$

$$(7.5)\quad K\nabla E_3^x = \varrho^{-1}\nabla E_3 + (\varrho^{-2}c_{31}du - \varrho^{-1}\tau_{33})E_3 + (\overline{\varrho^{-1}k - \varrho k^x}du + \overline{\varrho^{-1}\beta_2 - \varrho\beta_1^x}dv)E_4,$$

$$(7.6)\quad K\nabla E_4^x = \varrho\nabla E_4 + (\varrho^2 c_{42}dv - \varrho\tau_{44})E_4 + (\overline{\varrho\beta_2 - \varrho^{-1}\beta_2^x}du + \overline{\varrho h - \varrho^{-1}h^x}dv)E_3.$$

Dans la suite je vais définir quelques notions importantes. Soient deux congruences L, L^x en correspondance (qui ne doit pas être développable). Dans chaque espace local de la congruence L choisissons (ou déterminons d'une certaine manière) un point A et dans l'espace local de la droite correspondante choisissons d'une manière analogue un point A^x. Je suppose l'existence d'un système d'homographies K entre les espaces locaux des droites correspondantes, telles que les équations

$$(7.7)\qquad KA^x = \mu A, \quad K\nabla A^x = \mu\nabla A + (\cdot)A + B$$

aient lieu. Je peux introduire un opérateur qui associe à chaque tangente $[A\nabla A]$ de la surface de König (A) la droite $[A, B]$:

$$(7.8)\qquad \lambda\{[A, \nabla A]\} = [A, B].$$

Je suppose que la correspondance $p \to \lambda\{p\}$ est la correspondance entre les droites géométriques telle que $\lambda\{\varrho p\} = \lambda\{p\}$ où p est une tangente et ϱ un facteur arbitraire. J'appelle la droite (7.8) *droite K-linéarisante* de la tangente $[A, \nabla A]$; si les points A, B coïncident j'appelle l'expression $[A, B]$ *droite incertaine*. L'opérateur λ s'appelle *transformation K-linéarisante*.

La signification géométrique de la transformation linéarisante est la suivante: Soit $\underset{0}{\sigma}, \underset{0}{\sigma^x}$ un couple d'espaces locaux se correspondant des congruences L et L^x, soit $A_0 \in \underset{0}{\sigma}$ et $A_0^x \in \underset{0}{\sigma^x}$. Soit $\underset{0}{K}$ l'homographie du système des homographies considérées $K = K(u, v)$ telle que $\underset{0}{K}\underset{0}{\sigma^x} = \underset{0}{\sigma}$. Soit γ une courbe arbitraire de la variété de König (A) passant par le point $(\underset{0}{A})$, et soit γ^x la courbe correspondante de la variété (A^x), la tangente à la courbe γ (resp. γ^x) au point $\underset{0}{A}$ (resp. $\underset{0}{A^x}$) soit t (resp. t^x).

Les cas suivants sont possibles:

1. $\lambda\{t\}$ est une droite certaine et différente de t; dans ce cas les projections des courbes γ et $\underset{0}{K}\gamma^x$ par rapport à un point arbitraire $(\neq \underset{0}{A})$ de la droite $\lambda\{t\}$ ont un contact analytique d'ordre 1 (les courbes γ et $\underset{0}{K}\gamma^x$ n'ayant pas de contact géométrique d'ordre 1);

2. $\lambda\{t\}$ coïncide avec t; les courbes γ et $\underset{0}{K}\gamma^x$ ont au point $\underset{0}{A}$ un contact géométrique d'ordre 1 et il n'existe pas de point $C \in \underset{0}{\sigma}$ tel que les projections des courbes γ et $\underset{0}{K}\gamma^x$ par rapport à ce point aient un contact analytique d'ordre 1.

3. $\lambda\{t\}$ est une droite incertaine; les courbes γ et $K\gamma^x_0$ ont au point A_0 un contact analytique d'ordre 1.

Compte tenu des équations (7.3)-(7.6) je peux introduire quatre transformations linéarisantes dont les opérateurs seront désignés par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1^*, \lambda_2^*$. La congruence L (et, de même, la dualisation L^*) est décomposée en deux couches de surfaces développables d'équation $du\,dv = 0$ ce qui donne sur chaque surface focale $(A_1), (A_2), (E_3), (E_4)$ un réseau $du\,dv = 0$. Les tangentes d'une couche de ce réseau sont les droites de la congruence ($p \in L$ et $p^* \in L^*$); cette couche s'appelle *couche principale*. La seconde couche s'appelle *secondaire* et ses tangentes aux surfaces (A_1), $(A_2), (E_3), (E_4)$ sont t_1, t_2, t_1^*, t_2^*. On a donc

$$\left\{\begin{aligned} t_1 &= [A_1, hA_2+A_3], & t_2 &= [A_2, kA_1+A_4],\\ t_1^* &= [E_3, kE_4+E_1], & t_2^* &= [E_4, hE_3+E_2]. \end{aligned}\right. \tag{7.9}$$

D'après (6.3)-(6.6) j'obtiens

$$\lambda_1\{p\} = (\varrho^{-1}a_1^x - \varrho a_1)p, \qquad \lambda_1\{t_1\} = (\varrho^{-1}h^x - \varrho h)p, \tag{7.10}$$

$$\lambda_2\{p\} = (\varrho a_2^x - \varrho^{-1}a_2)p, \qquad \lambda_2\{t_2\} = (\varrho k^x - \varrho^{-1}k)p, \tag{7.11}$$

$$\lambda_1^*\{p^*\} = (\varrho^{-1}\beta_1 - \varrho\beta_1^x)p^*, \qquad \lambda_1^*\{t_1^*\} = (\varrho^{-1}k - \varrho k^x)p^*, \tag{7.12}$$

$$\lambda_2^*\{p^*\} = (\varrho\beta_2 - \varrho^{-1}\beta_2^x)p^*, \qquad \lambda_2^*\{t_2^*\} = (\varrho h - \varrho^{-1}h^x)p^*. \tag{7.13}$$

Il s'ensuit des équations précédentes que les transformations linéarisantes dépendent seulement du choix de l'homographie $(6{,}3_{1,2})$ entre les droites $p^* \in L^*$ et $p^{x*} \in L^{x*}$ resp. du choix de l'homographie $(7{,}2_{1,2})$ entre les droites $p \in L$ et $p^x \in L^x$ des dualisations, mais elles ne dépendent pas de c_{31} et c_{42}. Soit λ un des opérateurs λ_i, λ_i^* et t une des droites p, p^*, t_i, t_i^* $(i = 1, 2)$, si j'ai choisi ϱ de sorte que $\lambda\{t\} = 0$ je dis, pour abréger, que t est *$\lambda(\varrho)$-principale* ou *λ-principale*.

Il est possible d'introduire une autre forme invariante de la congruence L

$$T = i_1 i_2 \varphi = i_1^* i_2^* \varphi^* = hk\,du\,dv, \tag{7.14}$$

que j'appelle *forme torsale*. De deux congruences en correspondance développable (6.1) dont les formes ponctuelles ou planaires ou focales de première resp. de seconde espèce sont égales, je dis qu'elles sont en *déformation ponctuelle* ou *planaire* ou *focale de première resp. de seconde espèce*. Dans le cas de l'égalité des formes (5.1_1) je dis qu'il y a *déformation ponctuelle de première espèce* et il en est de même pour les autres formes (5.1_2), (5.2).

Les résultats principaux de ce N° sont contenus dans la table suivante où l'on trouvera à gauche le nom de la déformation et à droite la condition suffisante et nécessaire pour que les congruences soient en déformation correspondante. Cette condition est exprimée par l'existence d'une homographie tangente demi-canonique (ou bien l'existence d'une fonction ϱ) telle que la condition citée soit satisfaite:

1. déformation ponctuelle	p est λ_1- et λ_2-principale,
2. déformation planaire	p^* est λ_1^*- et λ_2^*-principale,
3. déf. focale de 1re espèce	p est λ_1-principale et p^* est λ_1^*-principale,
4. déf. focale de 2de espèce	p est λ_2-principale et p^* est λ_2^*-principale,
5. déf. ponctuelle de 1re espèce	p et t_1 sont λ_1-principales ou bien p est λ_1-principale et t_2^* est λ_2^*-principale

6-8. déf. ponctuelle de 2de espèce et déf. planaires de 1re et 2de espèce: la condition est la même que dans le cas 5;

9. déformation torsale	t_1 est λ_1-principale et t_2 est λ_2-principale ou t_1 est λ_1-principale et t_1^* est λ_1^*-principale ou t_2^* est λ_2^*-principale et t_2 est λ_2-principale ou t_2^* est λ_2^*-principale et t_1^* est λ_1^*-principale.

Je m'occuperai par ex. de la première proposition: La condition nécessaire et suffisante pour que les congruences L et L^* soient en déformation ponctuelle est l'existence (pour chaque couple de droites correspondantes) d'une homographie demi-canonique pour laquelle p soit λ_1- et λ_2-principale. La condition pour l'existence d'une homographie demi-canonique aux propriétés considérées est l'existence d'un ϱ tel que

$$\varrho^{-1}a_1^x = \varrho a_1, \qquad \varrho a_2^x = \varrho^{-1}a_2. \tag{7.15}$$

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de ce ϱ est $a_1^x a_2^x = a_1 a_2$ ou bien l'égalité des formes ponctuelles ou enfin la déformation ponctuelle des congruences.

On peut introduire d'autres types de correspondances entre les congruences L et L^x. Le faisceau composé du réseau des courbes asymptotiques (4.5) et du réseau $du\,dv=0$ contient le réseau apolaire au réseau $du\,dv=0$ dont l'équation est

$$\beta_2 du^2+\alpha_1 dv^2=0; \tag{7.16}$$

on peut, de même, trouver le réseau

$$\alpha_2 du^2+\beta_1 dv^2=0. \tag{7.17}$$

Deux congruences pour lesquelles les courbes (7.16) et (7.16) (resp. (7.17) et (7.17)), se correspondent sont en déformation *quasi-asymptotique de première* (resp. *de seconde*) *espèce*. On peut continuer la table:

10. déf. quasi-asymptotique de 1re espèce	p est λ_1-principale et p^* est λ_2^*-principale,
11. déf. quasi-asymptotique de 2de espèce	p est λ_2-principale et p^* est λ_1^*-principale.

Les congruences L et L^x sont *en déformation asymptotique de première* resp. *de seconde espèce* si les courbes asymptotiques des premières resp. secondes surfaces focales se correspondent.

12. déf. asymptotique de 1re espèce	p et t sont λ_1-principales et p^*-est λ_2^*-principale ou bien p est λ_1-principale et p^* et t_2^* sont λ_2^*-principales,
13. déf. asymptotique de 2de espèce	p et t_2 sont λ_2-principales et p^* est λ_1^*-principale ou bien p est λ_2-principale et p^* et t_1^* sont λ_1^*-principales.

8. Enfin je vais étudier l'objet le plus important de mes recherches — *la déformation projective d'ordre deux des congruences de droites à connexion projective*. Il n'est pas nécessaire de parler de la notion de déformation projective, cette notion étant la même que pour les congruences plongées dans des espaces plans.

Soient donc deux congruences L et L^x en correspondance (6.1) dont les équations fondamentales sont (2.1) et (2.1). En supposant que les congruences considérées sont en déformation projective d'ordre deux, on a les équations (6.5), (6.7) et

$$K\nabla^2[A_1^xA_2^x]=\nabla^2[A_1A_2]+2(\tau_{11}+\tau_{22}+\varrho^{-1}c_{31}du+ \\ +\varrho c_{42}dv)\nabla[A_1A_2]+(\cdot)[A_1A_2] \tag{8.1}$$

pour l'homographie tangente (6.3)+(6.9).

On a

$$\begin{cases}\nabla[A_2A_3]=-\omega_{31}[A_1A_2]+\omega_{21}[A_1A_3]+(\omega_{22}+\omega_{33})[A_2A_3]+ \\ \qquad +\omega_{34}[A_2A_4]-dv[A_3A_4], \\ \nabla[A_1A_4]=\omega_{42}[A_1A_2]+\omega_{43}[A_1A_3]+(\omega_{11}+\omega_{44})[A_1A_4]+ \\ \qquad +\omega_{12}[A_2A_4]+du[A_3A_4]\end{cases} \tag{8.2}$$

de sorte qu'en tenant compte de (6.6) il vient

$$\nabla^2[A_1A_2]=(\cdot)[A_1A_2]+(\beta_1dv^2-\alpha_2du^2)[A_1A_3]+(\alpha_1dv^2- \\ -\beta_2du^2)[A_2A_4]+(d^2v+dv\overline{2\omega_{11}+\omega_{22}+\omega_{44}})[A_1A_4]- \\ -(d^2u+du\overline{\omega_{11}+2\omega_{22}+\omega_{33}})[A_2A_3]+ \\ +2du\,dv[A_3A_4] \tag{8.3}$$

et une équation analogue pour $\nabla^2[A_1^xA_2^x]$.

Pour deux congruences arbitraires (qui ne sont pas nécessairement en déformation projective) on a pour l'homographie (6.3)+(6.9) l'équation suivante:

$$K\nabla^2[A_1^xA_2^x]=\nabla^2[A_1A_2]+2(\tau_{11}+\tau_{22}+\varrho^{-1}c_{31}du+\varrho c_{42}dv)\nabla[A_1A_2]+ \\ +(\cdot)[A_1A_2]+\Phi_{13}[A_1A_3]+\Phi_{24}[A_2A_4]+\Phi_{14}[A_1A_4]+\Phi_{23}[A_2A_3] \tag{8.4}$$

où

$$\begin{cases}\Phi_{13}=(\alpha_2-\varrho^2\alpha_2^x)du^2-2\varrho c_{41}du\,dv+(\varrho^2\beta_1^x-\beta_1)dv^2, \\ \Phi_{24}=(\beta_2-\varrho^{-2}\beta_2^x)du^2+2\varrho^{-1}c_{32}du\,dv+(\varrho^{-2}\alpha_1^x-\alpha_1)dv^2,\end{cases} \tag{8.5}$$

$$\begin{cases}\Phi_{14}=(a_{44}^x-a_{22}^x-a_{44}+a_{22})du\,dv+(b_{44}^x-b_{22}^x-b_{44}+b_{22}-2\varrho c_{42})dv^2, \\ \Phi_{23}=(2\varrho^{-1}c_{31}-a_{33}^x+a_{11}^x+a_{33}-a_{11})du^2-(b_{33}^x-b_{11}^x-b_{33}+b_{11})du\,dv.\end{cases} \tag{8.6}$$

Les équations (8.4)-(8.6) joueront un rôle important dans la suite. Si les congruences L et L^x sont en déformation projective, les fonctions $c_{41}, c_{32}, c_{42}, c_{31}$ existent, de sorte que

$$\Phi_{13}=\Phi_{24}=\Phi_{14}=\Phi_{23}=0. \tag{8.7}$$

On a nécessairement

$$c_{41}=c_{32}=0, \tag{7.1}$$

$$2c_{31}=\varrho(a_{33}^x-a_{11}^x-a_{33}+a_{11}), \qquad 2c_{42}=\varrho^{-1}(b_{44}^x-b_{22}^x-b_{44}+b_{22}) \tag{8.8}$$

et l'on doit avoir

$$\alpha_1 = \varrho^{-2}\alpha_1^x, \qquad \alpha_2 = \varrho^2\alpha_2^x, \qquad \beta_1 = \varrho^2\beta_1^x, \qquad \beta_2 = \varrho^{-2}\beta_2^x, \tag{8.9}$$

$$a_{44}^x - a_{22}^x = a_{44} - a_{22}, \qquad b_{33}^x - b_{11}^x = b_{33} - b_{11}. \tag{8.10}$$

On démontre sans peine le

THÉORÈME. *La condition nécessaire et suffisante pour que les congruences L et L^x soient en déformation projective d'ordre deux est qu'elles soient en même temps en déformations*

1) *ponctuelle,*
2) *planaire,*
3) *focale de 1re espèce,*
4) *focale de 2de espèce,*
5) *quasi-asymptotique de 1re espèce,*
6) *quasi-asymptotique de 2de espèce,*
7) *définie par l'égalité des formes* ψ_1 (5.15_1),
8) *définie par l'égalité des formes* ψ_2 (5.15_2).

Les déformations 1)-6) *ne sont pas indépendantes: si les congruences sont en trois d'entre elles, elles le sont en même temps en toutes les six.*

Ce théorème présente une grande analogie avec celui de la théorie des congruences plongées dans les espaces plans, mais les conditions 7) et 8) sont nouvelles.

La signification géométrique des déformations 7) et 8) est encore inconnue, mais elle sera mise au point au N° 12. Il est intéressant que les expressions h, k ne jouent aucun rôle dans les conditions trouvées.

Les congruences L et L^x étant en déformation projective, l'homographie réalisant cette déformation est, d'après (6.3), (6.9), (7.1) et (8.8)

$$\begin{cases} KA_1^x = \varrho A_1, \\ KA_2^x = \varrho^{-1}A_2, \\ KA_3^x = \tfrac{1}{2}\varrho(a_{33}^x - a_{11}^x - a_{33} + a_{11})A_1 + \varrho A_3, \\ KA_4^x = \tfrac{1}{2}\varrho^{-1}(b_{44}^x - b_{22}^x - b_{44} + b_{22})A_2 + \varrho^{-1}A_4. \end{cases} \tag{8.11}$$

Les paramètres u, v restant fixes, on peut faire varier les repères locaux de la congruence L en utilisant les équations (2.10)+(2.18), où $u' = v' = 1$. J'écris μ au lieu de ϱ. En substituant dans (8.11), j'obtiens

$$\begin{cases} KA_1^x = \varrho\mu\bar{A}_1, \\ KA_2^x = \varrho^{-1}\sigma\bar{A}_2, \\ KA_3^x = \varrho(\tfrac{1}{2}\mu\,\overline{a_{33}^x - a_{33} - a_{11}^x + a_{11}} + \alpha_{31})\bar{A}_1 + \varrho\mu\bar{A}_3, \\ KA_4^x = \varrho^{-1}(\tfrac{1}{2}\sigma\overline{b_{44}^x - b_{44} - b_{22}^x + b_{22}} + \alpha_{42})\bar{A}_2 + \varrho^{-1}\sigma\bar{A}_4. \end{cases} \tag{8.12}$$

Par un choix convenable:

$$\begin{cases} \mu = \varrho^{-1}, \qquad \sigma = \varrho, \\ \alpha_{31} = \tfrac{1}{2}\varrho^{-1}(a_{33}^x - a_{33} - a_{11}^x + a_{11}), \qquad \alpha_{42} = \tfrac{1}{2}\varrho(b_{44}^x - b_{44} - b_{22}^x + b_{22}) \end{cases} \tag{8.13}$$

j'obtiens l'homographie (8.12) sous la forme

$$KA_1^x = \bar{A}_1, \qquad KA_2^x = \bar{A}_2, \qquad KA_3^x = \bar{A}_3, \qquad KA_4^x = \bar{A}_4. \tag{8.14}$$

De là résulte la proposition suivante:

Les congruences de droites L et L^x étant en déformation projective d'ordre deux on peut particulariser les repères locaux des congruences de sorte que l'homographie réalisant cette déformation ait la forme

$$KA_1^x = A_1, \qquad KA_2^x = A_2, \qquad KA_3^x = A_3, \qquad KA_4^x = A_4. \tag{8.15}$$

Par suite on a nécessairement

$$\varrho = 1, \qquad a_{33}^x - a_{11}^x = a_{33} - a_{11}, \qquad b_{44}^x - b_{22}^x = b_{44} - b_{22} \tag{8.16}$$

et les équations (8.10) et (8.9).

9. J'étudierai maintenant *les déformations ponctuelle et planaire* des congruences; en commençant par la déformation ponctuelle. Soient deux congruences L et L^x en correspondance développable, non nécessairement en déformation projective. Etendons la correspondance donnée entre L et L^x à une correspondance ponctuelle T de sorte qu'entre chaque couple de droites correspondantes $p \in L$, $p^x \in L^x$ soit réalisée une homographie qui fasse correspondre aux foyers de p ceux de p^x. Une telle extension est donnée par les égalités:

$$TA_1^x = \varrho A_1, \qquad TA_2^x = \varrho^{-1}A_2. \tag{9.1}$$

Je vais étudier les congruences en correspondance développable pour lesquelles il existe une extension ponctuelle T de la correspondance donnée telle que pour chaque couple de droites correspondantes on puisse trouver une homographie H entre les espaces locaux des droites considérées pour laquelle les conditions suivantes soient remplies: si $x_1A_1^x + x_2A_2^x$ est une courbe arbitraire γ dans la congruence L^x, $T\gamma$ la courbe correspondante $x_1\varrho A_1 + x_2\varrho^{-1}A_2$ et si $A \in \gamma$, on peut développer la courbe γ dans l'espace local de la congruence L^x qui contient A sur la courbe $'\gamma$, la courbe $T\gamma$ étant développée sur la courbe γ_1. Les courbes $H'\gamma$ et γ_1 ont un contact analytique d'ordre 1.

L'expression analytique des conditions énoncées est la suivante: les équations

$$\begin{cases} H(x_1A_1^x + x_2A_2^x) = x_1\varrho A_1 + x_2\varrho^{-1}A_2, \\ H\nabla(x_1A_1^x + x_2A_2^x) = \nabla(x_1\varrho A_1 + x_2\varrho^{-1}A_2) + \Theta(x_1\varrho A_1 + x_2\varrho^{-1}A_2) \end{cases} \tag{9.2}$$

ont lieu pour chaque x_1, x_2, du, dv. L'homographie H a nécessairement la forme

$$(9.3)\qquad \begin{cases} HA_1^x = \varrho A_1, \\ HA_2^x = \varrho^{-1} A_2, \\ HA_3^x = \beta_{31}A_1 + \beta_{32}A_2 + \beta_{33}A_3 + \beta_{34}A_4, \\ HA_4^x = \beta_{41}A_1 + \beta_{42}A_2 + \beta_{43}A_3 + \beta_{44}A_4. \end{cases}$$

En substituant dans (9.2) on obtient

$$\begin{aligned} &dx_1\varrho A_1 + dx_2\varrho^{-1}A_2 + x_1\omega_1^x\varrho A_1 + x_1\omega_{12}^x\varrho^{-1}A_2 + x_1 du(\beta_{31}A_1 + \beta_{32}A_2 + \\ &\quad + \beta_{33}A_3 + \beta_{34}A_4) + \\ &\quad + x_2\omega_{21}^x\varrho A_1 + x_2\omega_{22}^x\varrho^{-1}A_2 + x_2 dv(\beta_{41}A_1 + \beta_{42}A_2 + \beta_{43}A_3 + \beta_{44}A_4) \\ &= dx_1\varrho A_1 + x_1 d\varrho A_1 + dx_2\varrho^{-1}A_2 - x_2\varrho^{-2}d\varrho A_2 + x_1\varrho(\omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2 + \\ &\quad + duA_3) + x_2\varrho^{-1}(\omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2 + dvA_4) + \Theta x_1\varrho A_1 + \Theta x_2\varrho^{-1}A_2. \end{aligned}$$

En comparant les coefficients de x_iA_α $(i = 1, 2;\ \alpha = 1, 2, 3, 4)$ je trouve

$$(9.4)\qquad \begin{cases} \varrho\omega_{11}^x + \beta_{31}du = d\varrho + \varrho\omega_{11} + \varrho\Theta, \\ \varrho^{-1}\omega_{12}^x + \beta_{32}du = \varrho\omega_{12}, \\ \beta_{33}du = \varrho du, \\ \beta_{34}du = 0, \\ \varrho\omega_{21}^x + \beta_{41}dv = \varrho^{-1}\omega_{21}, \\ \varrho^{-1}\omega_{22}^x + \beta_{42}dv = -\varrho^{-2}d\varrho + \varrho^{-1}\omega_{22} + \varrho^{-1}\Theta, \\ \beta_{43}dv = 0, \\ \beta_{44}dv = \varrho^{-1}dv. \end{cases}$$

Enfin (en posant $\Theta = \Theta_1 du + \Theta_2 dv$) j'obtiens

$$(9.5)\qquad \begin{cases} \varrho a_{11}^x + \beta_{31} = \varrho_u + \varrho a_{11} + \varrho\Theta_1, \qquad \varrho b_{11}^x = \varrho_v + \varrho b_{11} + \varrho\Theta_2, \\ \varrho^{-1}h^x + \beta_{32} = \varrho h, \qquad \varrho^{-1}\alpha_1^x = \varrho\alpha_1, \\ \beta_{33} = \varrho, \\ \beta_{34} = 0, \\ \varrho\alpha_2^x = \varrho^{-1}\alpha_2, \qquad \varrho k^x + \beta_{41} = \varrho^{-1}k, \\ \varrho^{-1}a_{22}^x = -\varrho^{-2}\varrho_u + \varrho^{-1}a_{22} + \varrho^{-1}\Theta_1, \\ \varrho^{-1}b_{22}^x + \beta_{42} = -\varrho^{-2}\varrho_v + \varrho^{-1}b_{22} + \varrho^{-1}\Theta_2, \\ \beta_{43} = 0, \\ \beta_{44} = 0. \end{cases}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'homographies H (9.3) satisfaisant à (9.2) sont (9.5). Des équations $(9.5_{4,7})$ j'obtiens $\alpha_1^x\alpha_2^x = \alpha_1\alpha_2$ (ou $\varphi^x = \varphi$) de sorte que L et L^x doivent être en déformation ponctuelle. Si L et L^x sont en déformation ponctuelle je détermine ϱ d'une des équations (9.5_4) ou (9.5_7) et je détermine: Θ_1 de (9.5_9), Θ_2 de (9.5_2), β_{31} de (9.5_1), β_{22} de (9.5_3), β_{33} de (9.5_5), β_{34} de (9.5_6), β_{41} de (9.5_7), β_{42} de (9.5_{10}), β_{43} de (9.5_{11}) et β_{44} de (9.5_{12}); l'homographie H est déterminée univoquement, je dis qu'elle *réalise* une déformation ponctuelle des congruences L et L^x. *Dans ce qui précède j'ai donné une autre interprétation géométrique de la déformation ponctuelle.*

Supposons que les deux congruences L et L^x soient en déformation projective d'ordre 2 et que l'homographie qui réalise cette déformation soit (8.15). L et L^x sont nécessairement en déformation ponctuelle; je vais calculer l'homographie réalisant cette déformation. Je prends pour point de départ les équations (8.16), (8.9) et (8.10); en substituant dans (9.5) j'obtiens

$$(9.6)\qquad \begin{cases} a_{11}^x + \beta_{31} = a_{11} + \Theta_1, & & b_{11}^x = b_{11} + \Theta_2, \\ h^x + \beta_{32} = h, & \beta_{33} = 1, & \beta_{34} = 0, \\ k^x + \beta_{41} = k, & \beta_{43} = 0, & \beta_{44} = 1, \\ a_{22}^x = a_{22} + \Theta_1, & & b_{22}^x + \beta_{42} = b_{22} + \Theta_2. \end{cases}$$

L'homographie (9.3) est donc

$$(9.7)\qquad \begin{cases} HA_1^x = A_1, \\ HA_2^x = A_2, \\ HA_3^x = \beta_{31}A_1 + (h - h^x)A_2 + A_3, \\ HA_4^x = (k - k^x)A_1 + \beta_{42}A_2 + A_4 \end{cases}$$

où

$$(9.8)\qquad \beta_{31} = a_{11} - a_{22} - a_{11}^x + a_{22}^x, \qquad \beta_{42} = b_{22} - b_{11} - b_{22}^x + b_{11}^x.$$

On peut étendre tous ces résultats au cas corrélatif. Il est nécessaire de compléter la substitution (4.4):

$$(9.9)\qquad \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{22} & a_{11} & b_{11} & a_{22} & b_{22} & \omega_{33} & \omega_{44} & \text{etc} \\ -\omega_{33} & -\omega_{44} & a_{33} & b_{33} & a_{44} & b_{44} & -\omega_{11} & -\omega_{22} & \end{pmatrix},$$

ce qui résulte des équations (2.17) et (4.2).

Si les congruences L et L^x sont en déformation projective, on a pour une spécialisation convenable (8.16), (8.9) et (8.10). Les dualisations L^*

et L^{x*} sont aussi en déformation projective et l'homographie réalisant cette déformation est

$$KE_3^x = E_3, \quad KE_4^x = E_4, \quad KE_1^x = E_1, \quad KE_2^x = E_2 \tag{9.10}$$

et on voit que c'est l'homographie (8.15): *la déformation projective des congruences et de leurs dualisations est réalisée par la même homographie.*

Supposons que les congruences L et L^x soient en déformation projective; elles sont alors nécessairement en déformation planaire. J'obtiens l'homographie H^* réalisant la déformation planaire au moyen de la substitution (4.4)+(9.9) à (9.7); on a

$$\left\{\begin{aligned} H^*E_3^x &= E_3,\\ H^*E_4^x &= E_4,\\ H^*E_1^x &= \beta_{31}^* E_3 + (k-k^x)E_4 + E_1,\\ H^*E_2^x &= (h-h^x)E_3 + \beta_{24}^* E_4 + E_2 \end{aligned}\right. \tag{9.11}$$

où

$$\beta_{13}^* = a_{33} - a_{44} - a_{33}^x + a_{44}^x, \qquad \beta_{24}^* = b_{44} - b_{33} - b_{44}^x + b_{33}^x. \tag{9.12}$$

De (8.10) et (8.16) on tire

$$\left\{\begin{aligned} \beta_{13}^* &= a_{22}^x - a_{22} - a_{11}^x + a_{11} = \beta_{31},\\ \beta_{24}^* &= b_{22} - b_{22}^x + b_{11}^x - b_{11} = \beta_{42}. \end{aligned}\right. \tag{9.13}$$

De (4.1) j'obtiens

$$\begin{aligned} A_3 &= [E_4E_1E_2], \qquad A_4 = -[E_3E_1E_2],\\ A_1 &= [E_3E_4E_2], \qquad A_2 = -[E_3E_4E_1] \end{aligned} \tag{9.14}$$

de sorte que la forme ponctuelle de l'homographie (9.11) est

$$\left\{\begin{aligned} H^*A_1^x &= A_1,\\ H^*A_2^x &= A_2,\\ H^*A_3^x &= -\beta_{31}A_1 - (h-h^x)A_2 + A_3,\\ H^*A_4^x &= -(k-k^x)A_1 - \beta_{42}A_2 + A_4. \end{aligned}\right. \tag{9.15}$$

10. Maintenant je vais m'occuper de la notion de *déformation projective singulière*. Je suppose vérifiées les équations (8.16), (8.9), (8.10) et (8.15). On a

$$\left\{\begin{aligned} \nabla^2 A_1 &\equiv (d\omega_{12} + \omega_{12}\overline{\omega_{11} + \omega_{22}} + \omega_{32}du)A_2 +\\ &\quad + (d^2u + du\,\overline{\omega_{11} + \omega_{33}})A_3 + (dv\,\omega_{12} + du\,\omega_{34})A_4 \pmod{A_1},\\ \nabla^2 A_2 &\equiv (d\omega_{21} + \omega_{21}\overline{\omega_{11} + \omega_{22}} + \omega_{41}dv)A_1 +\\ &\quad + (d^2v + dv\,\overline{\omega_{22} + \omega_{44}})A_4 + (du\,\omega_{21} + dv\,\omega_{43})A_3 \pmod{A_2}. \end{aligned}\right. \tag{10.1}$$

Dans le cas des congruences plongées dans l'espace projectif on sait que l'homographie K réalisant la déformation projective des congruences L et L^x réalise de même un contact analytique d'ordre 1 des deux surfaces focales. Si elle réalise un contact analytique d'ordre 2 par ex. des premières surfaces focales, elle réalise nécessairement un contact analytique d'ordre 2 des secondes surfaces focales et la déformation projective est appelée singulière. M. E. Čech a introduit la notion de *déformation projective demi-singulière*; je vais étudier ces notions dans la suite.

Pour l'homographie (8.15) on a

$$\left\{\begin{aligned} K\nabla A_1^x &= \nabla A_1 + \tau_{11}A_1 + (h^x - h)du\,A_2,\\ K\nabla A_2^x &= \nabla A_2 + \tau_{22}A_2 + (k^x - k)dv\,A_1. \end{aligned}\right. \tag{10.2}$$

Je dis que la déformation projective des congruences L et L^x est *faiblement demi-singulière de première resp. de seconde espèce* si l'homographie K réalise un contact analytique d'ordre 1 des premières resp. des secondes surfaces focales; une déformation qui est en même temps faiblement demi-singulière de première et de seconde espèce est dite *faiblement singulière* tout court. *La condition nécessaire et suffisante pour une demi-singularité faible de première resp. de seconde espèce est*

$$h^x = y \quad \textit{resp.} \quad k^x = k. \tag{10.3}$$

Des équations (5.1), (5.2), (8.16$_1$), (8.9) et (10.3) résulte le

Théorème. *Les congruences L et L^x étant en déformation projective, les quatre affirmations suivantes sont équivalentes:*

a) *la déformation projective est faiblement demi-singulière de première espèce;*

b) *L et L^x sont en déformation ponctuelle de première espèce;*

c) *L et L^x sont en déformation planaire de seconde espèce;*

d) *L et L^x ont les mêmes invariants de torsion de première espèce.*

On a un théorème analogue pour la demi-singularité de seconde espèce.

On peut caractériser d'une autre manière géométrique la demi-singularité faible de la déformation projective. Pour cela je considère les homographies K (8.15), H (9.7) et H^* (9.15). Soit

$$t^x = [A_1^xA_2^x] + \lambda[A_1^xA_3^x]$$

une tangente de la première surface focale; on a

$$\begin{aligned} Kt^x &= [A_1A_2] + \lambda[A_1A_3],\\ Ht^x &= [A_1A_2] + \lambda[A_1(A_3 + \overline{h - h^x}A_2)] = Kt^x + \lambda(h-h^x)p,\\ H^*t^x &= [A_1A_2] + \lambda[A_1(A_3 - \overline{h - h^x}A_2)] = Kt^x - \lambda(h-h^x)p. \end{aligned}$$

On a donc:

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que deux des homographies K, H et H^* (et alors nécessairement toutes les trois) déterminent la même homographie du faisceau des tangentes de la première (resp. seconde) surface focale est que la déformation projective des congruences L et L^x soit faiblement demi-singulière de première (resp. de seconde) espèce.*

Dans la suite, je supposerai que la déformation projective des L et L^x est faiblement singulière. On a les équations

$$(10.4)\qquad K\nabla A_1^x = \nabla A_1+\tau_{11}A_1,\qquad K\nabla A_2^x = \nabla A_2+\tau_{22}A_2$$

et

$$(10.5)\qquad \begin{cases} K\nabla^2 A_1^x = \nabla^2 A_1+2\tau_{11}\nabla A_1+(\cdot)A_1+\Phi_2 A_2,\\ K\nabla^2 A_2^x = \nabla^2 A_2+2\tau_{22}\nabla A_2+(\cdot)A_2+\Phi_1 A_1\end{cases}$$

où

$$(10.6)\qquad \begin{cases} \Phi_2 = \omega_{12}(\omega_{22}^x-\omega_{11}^x-\omega_{22}+\omega_{11})+du(\omega_{32}^x-\omega_{32})\\ \quad = (h\beta_{31}+a_{32}^x-a_{32})du^2+\\ \quad\quad +(a_1\beta_{31}-h\beta_{42}+b_{32}^x-b_{32})du\,dv-a_1\beta_{42}dv^2,\\ \Phi_1 = \omega_{21}(\omega_{11}^x-\omega_{22}^x-\omega_{11}+\omega_{22})+dv(\omega_{41}^x-\omega_{41})\\ \quad = -a_2\beta_{31}du^2+(a_2\beta_{42}-k\beta_{31}+a_{41}^x-a_{41})du\,dv+\\ \quad\quad +(k\beta_{42}+b_{41}^x-b_{41})dv^2.\end{cases}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que K réalise un contact analytique d'ordre deux des premières resp. secondes surfaces focales est

$$(10.7)\qquad \beta_{42}=0,\quad h\beta_{31}+a_{32}^x-a_{32}=0,\quad a_1\beta_{31}+b_{32}^x-b_{32}=0$$

resp.

$$(10.8)\qquad \beta_{31}=0,\quad a_2\beta_{42}+a_{41}^x-a_{41}=0,\quad k\beta_{42}+b_{41}^x-b_{41}=0.$$

Dans le cas où (10.7) ou bien (10.8) je dirai qu'il y a *déformation singulière de première ou de seconde espèce*, dans le cas (10.7)+(10.8) il y a *déformation singulière*. On voit facilement la différence entre ma théorie et celle des congruences plongées dans l'espace projectif où chaque déformation singulière de première espèce est en même temps singulière de seconde espèce.

11. Soient deux congruences de droites L et L^x à connexion projective en déformation projective singulière d'ordre 2. Donc les équations (8.16), (8.9), (8.10), (10.3), (10.9) et (10.10) sont vérifiées et on a

$$(11.1)\qquad \tau_{12}=\tau_{21}=\tau_{34}=\tau_{43}=\tau_{32}=\tau_{41}=0,$$

$$(11.2)\qquad \tau_{33}-\tau_{11}=\tau_{44}-\tau_{22}=\tau_{11}-\tau_{22}=0.$$

Les conditions $(1.2)+(1.2)^x+(11.2)$ sont équivalentes aux conditions

$$(11.3)\qquad \tau_{11}=\tau_{22}=\tau_{33}=\tau_{44}=0.$$

Le coefficient de A_1 omis dans (10.1_1) est $d\omega_{11}+\omega_{11}^2+\omega_{12}\omega_{21}+du\,\omega_{31}$, celui de A_2 dans (10.1_2) est $d\omega_{22}+\omega_{22}^2+\omega_{12}\omega_{21}+dv\,\omega_{42}$ de sorte que (10.4) et (10.5) entraînent

$$(11.4)\qquad K\nabla A_1^x=\nabla A_1,\qquad K\nabla A_2^x=\nabla A_2,$$

$$(11.5)\qquad K\nabla^2 A_1^x=\nabla^2 A_1+du\,\tau_{31}A_1,\qquad K\nabla^2 A_2^x=\nabla^2 A_2+dv\,\tau_{42}A_2.$$

On trouve facilement

$$(11.6)\qquad K\nabla^3 A_1^x=\nabla^3 A_1+3du\,\tau_{31}\nabla A_1+(\cdot)A_1+(-2du\,\omega_{12}\tau_{31}+\overline{+du\,\omega_{34}+dv\,\omega_{12}\tau_{42}})A_2-2du^2\tau_{31}A_3,$$

$$(11.7)\qquad K\nabla^3 A_2^x=\nabla^3 A_2+3dv\,\tau_{42}\nabla A_2+(\cdot)A_2+(-2dv\,\omega_{21}\tau_{42}+\overline{+du\,\omega_{21}+dv\,\omega_{43}\tau_{31}})A_1-2dv^2\tau_{42}A_4.$$

Je dis que la déformation projective considérée des congruences L et L^x est *fortement singulière* si l'homographie réalisant la déformation projective des congruences réalise en même temps un contact analytique d'ordre 3 des premières et des secondes surfaces focales.

Si K réalise un contact analytique d'ordre 3 des premières surfaces focales on obtient de (11.16)

$$(11.8)\qquad \tau_{31}=0,\qquad (du\,\omega_{34}+dv\,\omega_{12})\tau_{42}=0.$$

L'équation $du\,\omega_{34}+dv\,\omega_{12}=0$ donne les asymptotiques de la surface (A_1) resp. (A_1^x) de sorte que (11.8) donne

$$(11.9)\qquad \tau_{31}=\tau_{42}=0$$

et K réalise un contact analytique d'ordre 3 des secondes surfaces focales.

D'après (11.1), (11.3) et (11.9) j'obtiens le

Théorème principal. *Deux congruences de droites à connexion projective en déformation projective d'ordre 2 fortement singulière sont identiques.*

12. On connaît le rôle important de la représentation des droites de S_3 par les points d'une quadrique de S_5, appelée *quadrique de Klein*; une congruence de droites plongée dans S_3 est représentée par une surface de la quadrique de Klein. Je vais montrer qu'on peut aussi introduire une représentation analogue dans le cas des congruences à connexion projective.

Soit une congruence de droites à connexion projective L dont les équations fondamentales sont (2.17). A cette congruence soit associé un *espace de Klein* (ou K-espace) *à connexion projective* $K(L)$ de la manière suivante:

A chaque $(u, v)\epsilon\sigma$ correspond une droite $p(u, v)\epsilon L$ plongée dans l'espace local $\sigma(u, v)$; dans cet espace on a choisi un repère A_1, A_2, A_3, A_4. A ce point (u, v) je fais correspondre un espace projectif à cinq dimensions $S_5(u, v)$ avec une quadrique qui représente toutes les droites de l'espace local $\sigma(u, v)$. Le repère local de l'espace $S_5(u, v)$ soit formé par les droites analytiques $p_{ij} = [A_iA_j]$ $(i, j = 1, 2, 3, 4; i < j)$; j'écrirai souvent $p = p_{12}$. Donc dans chaque $S_5(u, v)$ j'obtiens sur la quadrique $K(u, v)$ un point particulier qui est la représentation de la droite correspondante de la congruence L. J'introduis dans l'ensemble des espaces $S_5(u, v)$ une connexion par les équations

$$\nabla p_{ij} = \omega_{ij}p_{kj} + \omega_{jk}p_{ik} \tag{12.1}$$

où on écrit $p_{ji} = -p_{ij}$.

Il est facile d'obtenir la signification géométrique de la connexion introduite: Soit dans σ un arc γ, donné par les équations $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t\epsilon I$, soit $\underset{0}{u} = u(\underset{0}{t})$, $\underset{0}{v} = v(\underset{0}{t})$ un point fixe de cet arc et pour chaque $t\epsilon I$ soit choisi une droite $q(t)$ dans chaque espace local $\sigma(u(t), v(t))$. Je suppose la surface réglée constituée par les droites $q(t)$ développée dans l'espace local $\underset{0}{\sigma} = \sigma(\underset{0}{u}, \underset{0}{v})$ à l'aide de la connexion de la congruence L. A chaque droite $q(t)$ de la surface π correspond dans l'espace correspondant $S_5(u(t), v(t))$ un point; ces points forment (pour tous les $t\epsilon I$) une courbe. En développant cette courbe dans l'espace $S_5(\underset{0}{u}, \underset{0}{v})$ à l'aide de la connexion (12.1) j'obtiens la courbe γ qui est la représentation de la surface réglée $\underset{0}{\pi}$ pour la représentation choisie de l'espace réglé de l'espace local $\underset{0}{\sigma}$ sur la quadrique $K(\underset{0}{u}, \underset{0}{v}) \subset S_5(\underset{0}{u}, \underset{0}{v})$.

La décomposition de la congruence L en deux systèmes de surfaces développables engendre un réseau sur $K(L)$. Ici $K(L)$ est naturellement une variété de König où les espaces locaux sont $S_5(u, v)$ de centres $p(u, v)$. Je suppose la particularisation des repères réalisée de manière que les équations fondamentales (2.17) soient vérifiées. On a pour $K(L)$ les équations (6.6), (8.2), (8.3); le plan tangent de la surface $K(L)$ (en considérant $K(L)$ comme une variété de König, il est légitime de parler d'une surface)

est $[p, p_{23}, p_{14}]$. Je vais trouver la dimension de l'espace osculateur. On a

$$\nabla^2[A_1A_2] = (\cdot)[A_1A_2]+(\cdot)[A_2A_3]+(\cdot)[A_1A_4]+\{\beta_1[A_1A_3]+ \\ +\alpha_1[A_2A_4]\}dv^2+2du\,dv[A_3A_4]-\{\alpha_2[A_1A_3]+\beta_2[A_2A_4]\}du^2$$

et la condition nécessaire et suffisante pour que l'espace osculateur soit à quatre dimensions est la dépendance linéaire des points

$$\beta_1p_{13}+\alpha_1p_{24},\ p_{34},\ \alpha_2p_{13}+\beta_2p_{24} \quad \text{ou} \\ \beta_1\beta_2-\alpha_1\alpha_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi = \varphi^* \quad \text{ou enfin} \quad I = 1. \tag{12.2}$$

Ce cas correspond au cas des congruences W plongées dans l'espace projectif. Une congruence W (dans S_3) est caractérisée d'une manière équivalente par le fait que la correspondance entre leurs surfaces focales est asymptotique. Ceci n'est pas vrai dans le cas général, mais la condition nécessaire et suffisante pour que l'espace osculateur de la congruence considérée soit à quatre dimensions est l'existence d'une correspondance quasi-asymptotique entre les deux surfaces focales.

La correspondance entre L et L^x engendre une correspondance entre $K(L)$ et $K(L^x)$, l'homographie tangente (6.3)+(6.9) entre les espaces locaux $\sigma(u, v)$ et $\sigma^x(u, v)$ induit une homographie entre les espaces locaux $S_5(u, v)$ et $S_5^x(u, v)$. Pour cette correspondance (6.5), (6.7), et (8.4)+(8.5) sont vérifiées. On peut introduire une transformation K-linéarisante qui fait correspondre à chaque tangente de la surface $K(L)$ la droite

$$l\{[p, -du\,p_{23}+dv\,p_{14}]\} = [p, \Phi_{13}p_{13}+\Phi_{24}p_{24}+\Phi_{14}p_{14}+\Phi_{23}p_{23}] \tag{12.3}$$

on a donc

$$\left\{\begin{aligned} l\{[p, p_{23}]\} &= [p, (\alpha_2-\varrho^2\alpha_2^x)p_{13}+(\beta_2-\varrho^{-2}\beta_2^x)p_{24}+ \\ &\quad +(2\varrho^{-1}c_{31}-a_{33}^x+a_{33}+a_{11}^x-a_{11})p_{23}], \\ l\{[p, p_{14}]\} &= [p, (\varrho^2\beta_1^x-\beta_1)p_{13}+(\varrho^{-2}\alpha_1^x-\alpha_1)p_{24}+ \\ &\quad +(b_{44}^x-b_{44}-b_{22}^x+b_{22}-2\varrho c_{42})p_{14}]. \end{aligned}\right. \tag{12.4}$$

Les droites p, p_{13}, p_{24} (droites de l'espace σ, mais points de l'espace S_5!) ont une signification géométrique, les droites $[p, p_{23}]$, $[p, p_{14}]$, les plans $[p, p_{23}, p_{24}]$, $[p, p_{14}, p_{13}]$ et l'espace $[p, p_{23}, p_{24}, p_{14}]$ de S_5 en ont aussi une. Le lecteur trouvera facilement la signification des espaces

$$[p_{13}, p_{24}], \quad [p, p_{13}, p_{24}], \quad [p, p_{13}, p_{24}, p_{14}], \quad [p, p_{13}, p_{24}, p_{23}].$$

Si nous demandons l'existence d'une homographie H pour laquelle la droite linéarisante d'une certaine tangente soit située dans un des espaces introduits, nous obtenons une géométrisation nouvelle des conditions analytiques déjà considérées. Par ex. en postulant que les droites linéarisantes (12.4) soient situées dans le plan $[p, p_{13}, p_{24}]$, nous sommes conduits aux conditions (8.8) pour le choix de l'homographie tangente; dans la suite je supposerai cette condition remplie.

La condition nécessaire et suffisante pour que les droites linéarisantes de toutes les tangentes de la surface $K(L)$ soient situées dans l'espace $[p, p_{13}, p_{24}, p_{14}]$ resp. $[p, p_{13}, p_{24}, p_{23}]$ est que l'on ait $\Phi_{23} = 0$ resp. $\Phi_{14} = 0$ ou bien

$$(12.5) \qquad b_{33}^x - b_{11}^x = b_{33} - b_{11} \quad resp. \quad a_{44}^x - a_{22}^x = a_{44} - a_{22}$$

ou bien

$$(12.6) \qquad \Psi_2 = \Psi_2^x \quad resp. \quad \Psi_1 = \Psi_1^x$$

ce qui donne l'interprétation géométrique de l'égalité des formes (5.15) *de deux congruences en correspondance développable* (voir aussi mon Mémoire *Rémarques sur la théorie des congruences de droites*, Čechosl. mat. žurnal 7 (82) (1957), p. 66-72.

13. Dans ce qui précède j'ai étudié les congruences de droites comme un objet à part, maintenant je vais étudier les congruences plongées dans *l'espace réglé* (*à quatre dimensions*) *à connexion projective*, que je définis de la manière suivante:

Soit un domaine σ dans l'espace euclidien à quatre dimensions E_4, à chaque point $t \epsilon \sigma$ je fais correspondre un espace projectif $S_3(t)$ et dans celui-ci une droite $p(t)$. Dans chaque $S_3(t)$ soit un repère A_1, A_2, A_3, A_4 choisi de manière que la droite p passe par A_1, A_2. La connexion est donnée par les équations

$$(13.1) \qquad \nabla A_i = \omega_{ij} A_j \quad (i, j = 1, \ldots, 4), \quad \sum_1^4 \omega_{ii} = 0.$$

Les ω_{ij} sont des formes de Pfaff en du_i, u_i étant les coordonnées dans E_4; mais il est possible de considérer les ω_{ij} comme des formes en du_i (u_i étant les paramètres principaux) et $dv_1, \ldots, dv_r$ (v_k étant les paramètres secondaires).

Je désigne par δ le symbole de différentiation pour lequel les paramètres principaux restent constants, ensuite j'écris comme d'habitude $e_{ij} = \omega_{ij}(\delta)$. En vertu du choix fixe de la droite p dans chaque S_3 on a

$$(13.2) \qquad e_{13} = e_{14} = e_{23} = e_{24} = 0,$$

pour des raisons évidentes je supposerai que

$$(13.3) \qquad [\omega_{13}\omega_{14}\omega_{23}\omega_{24}] \neq 0.$$

Comme dans le cas d'un espace à connexion projective, on peut vérifier *les conditions d'intégrabilité*

$$(13.4) \qquad [d\omega_{ij}] = [\omega_{ik}\omega_{kj}] + R_{ij}^{\alpha\mu\beta\nu}[\omega_{\alpha\mu}\omega_{\beta\nu}]$$

où la sommation porte sur $k = 1, 2, 3, 4$; $\alpha, \beta = 1, 2$; $\mu, \nu = 3, 4$.

14. Je vais étudier *les congruences de droites dans un espace réglé à connexion projective.* Une congruence est évidemment donnée par les équations

$$(14.1) \qquad u_i = u_i(v_1, v_2), \quad i = 1, \ldots, 4.$$

(Pour l'analyse détaillée des différents types de congruences voir mon Mémoire *Congruences de droites dans l'espace réglé à connexion projective*, Čechosl. mat. žurnal 7 (82) (1957), p. 96-114.)

Je passe à l'étude des congruences non paraboliques, où il est possible de décomposer la congruence en deux systèmes de surfaces développables. Je suppose que A_1, A_2 sont les foyers et que $dv_1 dv_2 = 0$ sont des surfaces développables, de sorte qu'on obtient les équations fondamentales

$$(14.2) \qquad \begin{cases} \nabla A_1 = \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2 + \omega_1 A_3, \\ \nabla A_2 = \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_2 A_4, \end{cases}$$

où $\omega_1 = r_1 dv_1$, $\omega_2 = r_2 dv_2$. Le point de départ de mes recherches seront les équations

$$(14.3) \qquad \omega_{14} = \omega_{23} = 0,$$

dont on tire par différentiation extérieure

$$(14.4) \qquad \begin{cases} [\omega_{12}\omega_2] + [\omega_1\omega_{34}] - 2h[\omega_1\omega_2] = 0, \\ [\omega_{21}\omega_1] + [\omega_2\omega_{43}] + 2k[\omega_1\omega_2] = 0, \\ h = -\tfrac{1}{2}R_{14}^{1324}, \quad k = \tfrac{1}{2}R_{23}^{1324}. \end{cases}$$

J'écrirai pour simplifier $R_{ij}^{1324} = R_{ij}$, $R_{13} = R_1$, $R_{24} = R_2$. En appliquant un lemme d'E. Cartan on obtient de (14.4)

$$(14.5) \qquad \begin{cases} \omega_{12} = (a_0 + h)\omega_1 + a_1\omega_2, & \omega_{34} = \beta_2\omega_1 + (h - a_0)\omega_2, \\ \omega_{21} = a_2\omega_1 + (k - b_0)\omega_2, & \omega_{43} = (b_0 + k)\omega_1 + \beta_1\omega_2. \end{cases}$$

La différentiation extérieure des équations (14.4) donne

$$(14.6) \qquad [(dh + h\omega_{22} - \omega_{33})\omega_1\omega_2] = [(dk + k\omega_{11} - \omega_{44})\omega_1\omega_2] = 0,$$

il existe donc des dérivées „covariantes" h_i, k_i telles que

$$(14.7) \qquad \begin{cases} dh + h(\omega_{22} - \omega_{33}) = h_1\omega_1 + h_2\omega_2, \\ dk + k(\omega_{11} - \omega_{44}) = k_1\omega_1 + k_2\omega_2. \end{cases}$$

Des équations (14.5) on obtient par différentiation extérieure et en se servant de (14.7)

$$
(14.8)\quad \begin{cases}
[\omega_1(da_0+a_0\overline{\omega_{22}-\omega_{33}}+\omega_{32})]+[\omega_2(da_1+a_1\overline{2\omega_{22}-\omega_{11}-\omega_{44}})]+ \\
\qquad +(\cdot)[\omega_1\omega_2]=0, \\
[\omega_1(d\beta_2+\beta_2\overline{\omega_{11}+\omega_{44}-2\omega_{33}})]-[\omega_2(da_0+a_0\overline{\omega_{22}-\omega_{33}}+\omega_{32})]+ \\
\qquad +(\cdot)[\omega_1\omega_2]=0, \\
[\omega_1(da_2+a_2\overline{2\omega_{11}-\omega_{22}-\omega_{33}})]-[\omega_2(db_0+b_0\overline{\omega_{11}-\omega_{44}}-\omega_{41})]+ \\
\qquad +(\cdot)[\omega_1\omega_2]=0, \\
[\omega_1(db_0+b_0\overline{\omega_{11}-\omega_{44}}-\omega_{41})]+[\omega_2(d\beta_1+\beta_1\overline{\omega_{22}+\omega_{33}-2\omega_{44}})]+ \\
\qquad +(\cdot)[\omega_1\omega_2]=0,
\end{cases}
$$

de sorte qu'on a

$$
(14.9)\qquad \delta a_0=a_0(e_{33}-a_{22})-e_{32},\qquad \delta b_0=b_0(e_{44}-e_{11})+e_{41},
$$

$$
(14.10)\quad \begin{cases}
\delta a_1=a_1(e_{11}+e_{44}-2e_{22}), & \delta a_2=a_2(e_{22}+e_{33}-2e_{11}), \\
\delta\beta_1=\beta_1(2e_{44}-e_{22}-e_{33}), & \delta\beta_2=\beta_2(2e_{33}-e_{11}-e_{44}).
\end{cases}
$$

En vertu de (14.9) on peut poser

$$
(14.11)\qquad a_0=b_0=0.
$$

Il résulte des équations (2.17) et (14.5)+(14.11) qu'*on peut étendre tous les résultats de la théorie générale* (avec la notation analytique) *au cas des congruences polongées dans un espace réglé*. Pour ce qui concerne les questions spéciales, voir mon Mémoire cité plus haut.

Reçu par la Rédaction le 10. 1. 1958