Since the function $\varphi(x)$ is semiconvex $\{f\}$

$$2\varphi[f^{N+1}(x)] \leqslant \varphi[f^N(x)] + \varphi[f^{N+2}(x)]. \tag{22}$$

Subtracting $2\varphi[f^{N+1}(x)]$ from both sides of inequality (22) we obtain

$$0 \leqslant \varphi[f^N(x)] - 2\varphi[f^{N+1}(x)] + \varphi[f^{N+2}(x)],$$

whence, by (21)

$$0 < \varphi[f^{N+1}(x)] - \varphi[f^N(x)] \leqslant \varphi[f^{N+2}(x)] - \varphi[f^{N+1}(x)],$$

i. e.

$$\varphi[f^{N+2}(x)] > \varphi[f^{N+1}(x)].$$

By induction we obtain

$$\varphi[f^{n+1}(x)] > \varphi[f^n(x)] \quad \text{for} \quad n \geqslant N,$$

which proves that the sequence $\varphi[f^n(x)]$ is increasing for large n. On the other hand, if relation (21) does not hold for any N, it means that

$$\varphi[f^{n+1}(x)] \leqslant \varphi[f^n(x)]$$

for every n, which proves that the sequence $\varphi[f^n(x)]$ is decreasing.

Thus we have shown that the sequence $\varphi[f^n(x)]$ is monotonic for large n. Hence it follows that the inequality

$$|\varphi[f^n(x)] - \varphi[f^{n+1}(x)]| \leqslant |\varphi[f^n(x)] - \varphi[f^{n+2}(x)]|$$

holds for sufficiently large n, and hence, by (19), follows relation (20). And since x has been arbitrary, relation (20) holds for every $x \in (a, b)$. Thus from theorem I it follows that there may exist at most one solution of equation (1) semiconvex $\{f\}$ in (a, b), which was to be proved.

References

[1] J. Anastassiadis, *Fonctions semi-monotones et semi-convexes et solutions d'une équation fonctionnelle*, Bull. Sci. Math. (2), 76 (1952), p. 148-160.

[2] W. Krull, *Bemerkungen zur Differenzengleichung* $g(x+1)-g(x) = \varphi(x)$, Math. Nachr. 1 (1948), p. 365-376.

[3] M. Kuczma, *O równaniu funkcyjnym* $g(x+1)-g(x) = \varphi(x)$, Zeszyty Naukowe Uniw. Jagiell., Mat.-Fiz.-Chem. 4 (1958), p. 27-38.

[4] — *On the functional equation* $\varphi(x)+\varphi[f(x)] = F(x)$, Ann. Polon. Math. 6 (1959), p. 281-287.

[5] A. Mayer, *Konvexe Lösungen der Funktionalgleichung* $1/f(x+1) = xf(x)$, Acta Math. 70 (1939), p. 57-62.

Reçu par la Rédaction le 1. 6. 1959

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VIII (1960)

Remarque sur la note de A. B. Turowicz sur l'approximation des racines de nombres positifs

par Z. Mikołajska (Kraków)

Dans la note de A. B. Turowicz „Sur l'approximation des racines de nombres positifs" (1) on trouve la formule

$$x_{k+1} = \frac{(n-1)x_k^{n+1}+(n+1)Ax_k}{(n+1)x_k^n+(n-1)A}, \quad x_0 > 0, \tag{1}$$

pour l'approximation de la racine $\sqrt[n]{A}$ d'un nombre positif $A > 0$. A. B. Turowicz démontre que la suite (1) est monotone et converge vers $\sqrt[n]{A}$. Il donne aussi une évaluation de la rapidité de la convergence $|x_k - \sqrt[n]{A}| \to 0$.

Nous allons montrer dans cette note que l'idée essentielle utilisée par A. B. Turowicz pour établir la relation

$$\operatorname{sign}(x_k - x_{k+1}) = \operatorname{sign}(x_0 - \sqrt[n]{A}) \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

et la convergence

$$x_k \to \sqrt[n]{A} \tag{3}$$

peut facilement être appliquée au cas plus général de la suite $\{x_k\}$, définie par les formules suivantes:

$$x_k = \frac{x_{k-1}\{\psi(x_{k-1}) - \varphi(x_{k-1}^n - A)\}}{\psi(x_{k-1}) + \varphi(x_{k-1}^n - A)}, \quad x_0 > 0, \tag{4}$$

où les fonctions $\psi(x)$ et $\varphi(u)$ sont continues et satisfont aux relations suivantes:

$$\psi(x) + \varphi(x^n - A) > 0 \quad \text{pour} \quad x \geqslant 0, \tag{5}$$

$$\psi(x) - \frac{x+\sqrt[n]{A}}{x-\sqrt[n]{A}}\,\varphi(x^n - A) > 0 \quad \text{pour} \quad x^n \neq A, \tag{6}$$

$$\varphi(u) = -\varphi(-u), \quad \varphi(u) \text{ est monotone.} \tag{7}$$

(1) Ce volume p. 265-269.

On vérifie facilement que la suite (1) considérée par A. B. Turowicz constitue un cas particulier de la suite (4). On l'obtient en posant

$$(8)\qquad \varphi(u) = u, \qquad \psi(x) = nx^n + nA = n(x^n + A).$$

Il est évident que la fonction $\varphi(u)$, définie par (8), satisfait aux relations (7). Pour $n \geqslant 1$, $A > 0$ et $x \geqslant 0$ on a

$$n(x^n+A)+x^n-A = (n-1)(x^n+A)+2x^n > 0,$$

c'est-à-dire pour les fonctions définies par (8) on a (5). L'inégalité (6) résulte de la relation

$$\psi(x)-\varphi(x^n-A)\frac{x+\sqrt[n]{A}}{x-\sqrt[n]{A}} = n(x^n+A)-(x^n-A)\frac{x+\sqrt[n]{A}}{x-\sqrt[n]{A}}$$

$$= (n-1)(x^n+A)-2\sum_{j=1}^{n-1}\sqrt[n]{A^j}\,x^{n-j} > 0 \qquad (\text{pour } x \neq \sqrt[n]{A},\ x \geqslant 0,\ n \geqslant 2),$$

qui peut être démontrée par induction. Pour $n = 2$ on a

$$(x^2+A)-2\sqrt{A}x = (x-\sqrt{A})^2 > 0 \qquad \text{pour} \qquad x \neq \sqrt{A}.$$

Supposons que nous ayons démontré la formule pour $n = k$:

$$(k-1)(x^k+A) > 2\sum_{j=1}^{k-1}\sqrt[k]{A^j}\,x^{k-j} \qquad \text{pour} \qquad x \neq \sqrt[k]{A} \qquad (A > 0)$$

et considérons

$$k(x^{k+1}+a)-2\sum_{j=1}^{k}\sqrt[k+1]{a^j}\cdot x^{k+1-j} = W(x, a) \qquad (\text{par déf.}).$$

Posons $B = a^{k/(k+1)}$, c'est-à-dire $a = B^{(k+1)/k}$,

$$W(x, B^{(k+1)/k}) = k(x^{k+1}+a)-2x\sum_{j=1}^{k-1}\sqrt[k]{B^j}\cdot x^{k-j}-2xB$$

$$> x^{k+1}+ka-(k+1)xB = \gamma(x),$$

$$\gamma'(x) = (k+1)(x^k-B),$$

$$\gamma'(a^{1/(k+1)}) = \gamma'(B^{1/k}) = 0, \qquad \gamma'(x) > 0 \quad \text{pour} \quad x^k > B,$$

$$\gamma'(x) < 0 \quad \text{pour} \quad x^k < B,$$

$$\gamma(B^{1/k}) = 0,$$

d'où l'on tire $\gamma(x) > \gamma(B^{1/k}) = 0$ pour $x \neq B^{1/k} = a^{1/(k+1)}$ et $W(x, a) > 0$ pour $x \neq \sqrt[k+1]{a}$ (quel que soit $a > 0$).

Dans la suite nous allons donc démontrer (2) et (3) pour la suite donnée par la formule (4) et satisfaisant à (5), (6) et (7). A la fin de cette note nous évaluons la rapidité avec laquelle la suite $\{x_k\}$ converge vers $\sqrt[n]{A}$.

Démonstration des relations (2) **et** (3). Supposons que $A > 0$ et $x_0 > 0$. Envisageons la suite $\{x_k\}$ donnée par (4) et satisfaisant à (5), (6), (7). De la définition (4) il vient

$$x_k - x_{k-1} = \frac{x_{k-1}\{\psi(x_{k-1})-\varphi(x_{k-1}^n-A)\}-x_{k-1}\cdot\psi(x_{k-1})}{\psi(x_{k-1})+\varphi(x_{k-1}^n-A)} - \frac{x_{k-1}\cdot\varphi(x_{k-1}^n-A)}{\psi(x_{k-1})+\varphi(x_{k-1}^n-A)},$$

d'où, en vertu de (7),

$$x_k - x_{k-1} = \frac{2x_{k-1}\varphi(A-x_{k-1}^n)}{\psi(x_{k-1})+\varphi(x_{k-1}^n-A)}.$$

Par conséquent, $\psi(x_{k-1})+\varphi(x_{k-1}^n-A)$ étant positif (cf. (5)), on a

$$(9)\qquad \operatorname{sign}(x_k-x_{k-1}) = \operatorname{sign}(A-x_{k-1}^n) \qquad \text{pour} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Envisageons $x_k-\sqrt[n]{A}$. On a

$$(10)\qquad x_k-\sqrt[n]{A} = \frac{x_{k-1}\{\psi(x_{k-1})-\varphi(x_{k-1}^n-A)\}-\sqrt[n]{A}\{\psi(x_{k-1})+\varphi(x_{k-1}^n-A)\}}{\psi(x_{k-1})+\varphi(x_{k-1}^n-A)}$$

$$= \frac{(x_{k-1}-\sqrt[n]{A})\psi(x_{k-1})-(x_{k-1}+\sqrt[n]{A})\varphi(x_{k-1}^n-A)}{\psi(x_{k-1})+\varphi(x_{k-1}^n-A)}$$

$$= \frac{x_{k-1}-\sqrt[n]{A}}{\psi(x_{k-1})+\varphi(x_{k-1}^n-A)}\left\{\psi(x_{k-1})-\frac{x_{k-1}+\sqrt[n]{A}}{x_{k-1}-\sqrt[n]{A}}\varphi(x_{k-1}^n-A)\right\}.$$

En vertu de (6) et (5) on a donc

$$\operatorname{sign}(x_k-\sqrt[n]{A}) = \operatorname{sign}(x_{k-1}-\sqrt[n]{A}) = \operatorname{sign}(x_0-\sqrt[n]{A}) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

d'où, en vertu de (9), on obtient (2).

La suite $\{x_k\}$ donnée par (4) est donc monotone et l'on a un des cas suivants:

$$(11)\qquad 0 < \sqrt[n]{A} < \ldots < x_k < x_{k-1} < \ldots < x_2 < x_1 < x_0$$

ou

$$(11')\qquad 0 < x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < \sqrt[n]{A}.$$

Par conséquent la suite $\{x_k\}$ est convergente. Désignons par $\bar{x}$ la limite de la suite $\{x_k\}$. De la formule (4) on obtient pour $\bar{x}$ la relation

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}\{\psi(\bar{x}) - \varphi(\bar{x}^n - A)\}}{\psi(\bar{x}) + \varphi(\bar{x}^n - A)},$$

et par suite $\bar{x}\{\psi(\bar{x}^n - A)\} = -\bar{x}\varphi(\bar{x}^n - A)$ d'où, en vertu de (8) et (11), (11'), on tire $\bar{x} \neq 0$, $\bar{x}^n - A = 0$, c'est-à-dire $\bar{x} = \sqrt[n]{A}$.

Rapidité de la convergence de $|x_k - \sqrt[n]{A}| \to 0$. Pour évaluer la rapidité de la convergence $x_k \to \sqrt[n]{A}$ nous introduirons quelques notations. Posons par définition

$$\alpha = \min_{|x^n - A| \leqslant |x_0^n - A|} \{\psi(x) + \varphi(x^n - A)\}.$$

En vertu de (5) on a $\alpha > 0$.

Nous introduisons la fonction

$$\lambda(u) = \psi(u + \sqrt[n]{A})u - \varphi[(u + \sqrt[n]{A})^n - A](u + 2\sqrt[n]{A}).$$

Désignons par $\gamma(z)$ la fonction

$$\gamma(z) = \max(|\lambda(z)|, |\lambda(-z)|) \quad \text{pour} \quad z \geqslant 0.$$

Il est évident que $|\lambda(u)| \leqslant \gamma(|u|)$.

En vertu de (10) on a

$$(12) \qquad |x_k - \sqrt[n]{A}| \leqslant \frac{1}{\alpha}|\psi(x_{k-1})(x_{k-1} - \sqrt[n]{A}) - \varphi(x_{k-1}^n - A)(x_{k-1} + \sqrt[n]{A})|.$$

Posons $x_{k-1} - \sqrt[n]{A} = u$. Nous obtenons ainsi

$$|x_k - \sqrt[n]{A}| \leqslant \frac{1}{\alpha}|\lambda(x_{k-1} - \sqrt[n]{A})| \leqslant \frac{1}{\alpha}\gamma(|x_{k-1} - \sqrt[n]{A}|).$$

Il est évident qu'on peut remplacer $\gamma(z)$ par toute fonction $\bar{\gamma}(z) \geqslant \gamma(Z)$. Dans le cas envisagé par A. B. Turowicz on a

$$\lambda(u) = u[n(u + \sqrt[n]{A})^n + nA] - [(u + \sqrt[n]{A})^n - A](u + 2\sqrt[n]{A})$$
$$= \sum_{j=2}^{n+1}\Big[(n-1)\binom{n}{j-1} - 2\binom{n}{j}\Big]u^j(\sqrt[n]{A})^{n-j+1} = u^3\sum_{j=0}^{n-2}c_j u^j,$$

où

$$c_j = \Big[(n-1)\binom{n}{j+2} - 2\binom{n}{j+3}\Big](\sqrt[n]{A})^{n-j-2} \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-2),$$

et par suite

$$|x_k - \sqrt[n]{A}| \leqslant \frac{1}{\alpha}|u|^3\Big|\sum_{j=0}^{n-2}c_j u^j\Big| \leqslant p|u|^3 = p|x_{k-1} - \sqrt[n]{A}|^3,$$

où

$$p = \frac{1}{\alpha}\max_{|u| \leqslant |a_0 - \sqrt[n]{A}|}\Big|\sum_{j=0}^{n-2}c_j u^j\Big|.$$

C'est la formule obtenue par A. B. Turowicz. D'autre part, étant données $\gamma(z)$ et $\varphi(s)$ telles que $\varphi(u)$ satisfait à (7) et que $\lim_{u\to 0}\varphi(u)/u$ existe, $\lim_{z\to 0+}\gamma(z)/z$ existe et $\gamma(z) > 0$, pour $z \geqslant 0$ on peut choisir $\psi(z)$ satisfaisant à (5), (6) de manière qu'on ait

$$|x_k - \sqrt[n]{A}| \leqslant \beta\gamma(|x_{k-1} - \sqrt[n]{A}|).$$

Il suffit de poser

$$\psi(x) = \varphi(x^n - A)\frac{x + \sqrt[n]{A}}{x - \sqrt[n]{A}} + \frac{\gamma(|x - \sqrt[n]{A}|)}{|x - \sqrt[n]{A}|} \qquad \text{pour} \qquad x \neq \sqrt[n]{A},$$

γ étant positif il est évident que la relation (6) est satisfaite. On déduit l'inégalité (5) de la relation (7) et

$$\psi(x) + \varphi(x^n - A) = \varphi(x^n - A)\frac{x + \sqrt[n]{A} + x - \sqrt[n]{A}}{x - \sqrt[n]{A}} + \frac{\gamma(|x - \sqrt[n]{A}|)}{|x - \sqrt[n]{A}|} > 0$$

$$\text{pour} \quad x \neq \sqrt[n]{A}, \quad x > 0.$$

La constante β est égale à $1/\alpha$ où

$$\delta = \min_{|x^n - A| \leqslant |x_0^n - A|}\Big(\varphi(x^n - A)\frac{2x}{x - \sqrt[n]{A}} + \frac{\gamma(|x - \sqrt[n]{A}|)}{|x - \sqrt[n]{A})}\Big).$$

Reçu par la Rédaction le 16. 6. 1959