ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VIII (1960)

Sur une propriété périodique des fonctions $\tilde{B}$ presque-périodiques

par A. S. Kovanko (Lvov)

Dans une note récente [3] j'ai démontré une propriété des fonctions B_w presque-périodiques [1, 4], cette propriété pouvant être considérée comme une nouvelle définition de ces fonctions. Nos idées se rattachent à celles de R. Doss [2].

Nous étudierons dans cette note des propriétés analogues pour les fonctions „$\tilde{B}$ presque-périodiques" [4]. La démonstration se rattachera directement aux résultats de la note [3].

I. § 1. Notations, définitions et théorèmes préliminaires. Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions complexes d'une variable réelle x sur $(-\infty < x < +\infty)$ $(f, \varphi \in L_w [w \geqslant 1])$.

Définissons la distance $D^E_{B_w}(f, \varphi)$ entre f et φ par la formule suivante:

$$D^E_{B_w}(f, \varphi) = \overline{\lim_{T\to\infty}} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x) - \varphi(x)|^w C_E(x)\, dx \right\}^{1/w},$$

où $C_E(x)$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble E. Si $E = (-\infty, \infty)$, nous rejetons l'indice E en écrivant: $D^E_{B_w}(f, \varphi) = D_{B_w}(f, \varphi)$. Posons encore

$$\sigma_{na}[f(x)] = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x + ka),$$

et introduisons la fonction coupée $[f(x)]_N$ par les conditions suivantes:

$$[f(x)]_N = \begin{cases} f(x), & \text{si} \quad |f(x)| < N, \\ N \dfrac{f(x)}{|f(x)|}, & \text{si} \quad |f(x)| \geqslant N. \end{cases}$$

§ 2. Définition 1 [4]. $f(x) \in \tilde{B}$ p. p. ($\tilde{B}$-presque-périodique), si, quel que soit ε $(0 < \varepsilon < 1)$, on peut trouver un polynôme trigonométrique

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k x}$$

tel que $|f(x)-P_n(x)| < \varepsilon$ pour toutes les valeurs de x, sauf peut-être pour un ensemble $E_{n\varepsilon}$ tel que

$$\delta_B E_{n\varepsilon} < \varepsilon, \quad \text{où} \quad \delta_B E = D_{B_1}^{E}(1,0) = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{|E(-T,+T)|}{2T}.$$

Définition 2 [1, 3, 4]. $f(x) \in B_w$ p. p. (B_w-presque-périodique) si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k x}$$

tel que $D_{Bw}(f(x), P_n(x)) < \varepsilon$.

Définition 3 [4]. $f(x) \in B_w$ u. s. (B_w-uniformément sommable) si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tel que $D_{Bw}^{E}(f(x), 0) < \varepsilon$ si $\delta_B E < \eta$.

Définition 4 [4]. $f(x) \in \tilde{B}$ a. b. ($\tilde{B}$ asymptotiquement bornée) si, quel que soit ε $(0 < \varepsilon < 1)$, on peut trouver un nombre $N_0 > 0$ tel que l'ensemble E_N des valeurs de x, où $[f]_N \neq f$, possède la propriété: $\delta_B E_N < \varepsilon$, si $N > N_0$.

Définition 5 [3, 4]. Une suite $\{f_n(x)\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ est dite *convergente „$\tilde{B}$ — en mesure" vers $f(x)$ sur $(-\infty < x < +\infty)$*, si, quel que soit ε $(0 < \varepsilon < 1)$, il existe un nombre $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ tel que $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ pour toutes les valeurs de x, sauf peut-être pour un ensemble $E_{n\varepsilon}$ tel que $\delta_B E_{n\varepsilon} < \varepsilon$ si $n > n_0$.

Remarque. Dans toutes nos définitions il s'agit, bien entendu, de fonctions mésurables définies sur $(-\infty < x < +\infty)$.

§ 3. Propriété 1. (I) *Si $f \in \tilde{B}_w$ p. p., on a $f \in B$ p. p.*

Propriété 2. (I) *Si f est bornée et $f \in \tilde{B}$ p. p., on a $f \in B_w$ p. p. pour tout $w \geqslant 1$.*

Propriété 3. (I) *Si $f \in \tilde{B}$ p. p., on a $[f]_N \in B_w$ p. p., quel que soit $N > 0$ et $w \geqslant 1$.*

Propriété 4. (I) *Si $f \in \tilde{B}$ p. p., on a $f \in \tilde{B}$ a. b.*

Propriété 5. (I) *Si $f \in \tilde{B}$ p. p. il existe, quel que soit ε $(0 < \varepsilon < 1)$ un ensemble relativement dense de presque-périodes $\tau = \tau(\varepsilon)$ et un nombre $\eta > 0$ tels que $|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$ pour $|t-\tau| < \eta$ et pour toutes les valeurs de x, sauf peut-être pour un ensemble E_t tel que $\delta_B E_t < \varepsilon$.*

§ 4. Enonçons maintenant une nouvelle définition des fonctions B_w p. p.

Définition (A_w) [3]. $f \in A_w$, si $f(x)$ possède les propriétés suivantes:

1. (A_w) $f(x) \in B_w$ u. s.

2. (A_w) Quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\eta > 0$ et un ensemble relativement dense de nombres $\{\tau\}$ tels que $|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$ pour $|t-\tau| < \eta$ et pour toutes les valeurs de x, sauf peut-être pour un ensemble E_t tel que $\delta_B E_t < \varepsilon$.

3. (A_w) Quel que soit $a > 0$, il existe une fonction périodique $f^{(a)}(x)$ de période a, presque partout finie et telle que $\{\sigma_{na}[f(x)]\}$, $n = 1, 2, \ldots$, converge „$\tilde{B}$ en mesure" vers $f^{(a)}(x)$.

Nous avons démontré dans [3] le théorème suivant:

Théorème I. *La classe A_w est identique à celle des fonctions B_w p. p.*

(Par conséquent la définition A_w peut être considérée comme une nouvelle définition des fonctions B_w-presque-périodiques).

II. Introduisons une classe de fonctions mesurables définies sur $(-\infty < x < +\infty)$ comme il suit:

Définition $(\tilde{A})$: $f(z) \in \tilde{A}$, si $f(x)$ possède les propriétés suivantes:

1. $(\tilde{A})$ $f(x) \in \tilde{B}$ a. b.

2. $(\tilde{A})$ Quel que soit ε $(0 < \varepsilon < 1)$, il existe un nombre $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ et un ensemble relativement dense de nombres $\{\tau\}$ tels que $|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$ pour $|t-\tau| < \eta$ et pour toutes les valeurs de x, sauf peut-être pour un ensemble E_t tel que $\delta_B E_t < \varepsilon$.

3. $(\tilde{A})$ Quels que soient $a > 0$ et $N > 0$, il existe une fonction mesurable périodique $f^{(a)}(x)$ de période a telle que $\sigma_{na}\{[f(x)]_N\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ converge „$\tilde{B}$ en mesure" vers $f^{(a)}(x)$.

Théorème II (fondamental). *La classe des fonctions $\tilde{A}$ est identique à celle des fonctions $\tilde{B}$ p. p.*

Démonstration. 1. Démontrons en premier lieu que $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ p. p. Soit $f(x) \in \tilde{A}$; alors, à cause de la propriété 1 $(\tilde{A})$, nous avons $f(x) \in \tilde{B}$ a. b., c'est-à-dire, quel que soit ε $(0 < \varepsilon < 1)$ nous pouvons prendre $N > 0$ assez grand pour que l'inégalité suivante soit remplie:

$$|f(x) - [f(x)]_N| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

pour toutes les valeurs de x, sauf peut-être pour un ensemble E_N tel que $\delta_B E_N < \varepsilon/2$.

$[f(x)]_N$, étant bornée, possède la propriété 1 (A_w).

De même $[f(x)]_N$ possède la propriété 2 (A_w), ce qui découle de la propriété 2 $(\tilde{A})$, à cause de l'inégalité évidente:

$$|[f(x+t)]_N - [f(x)]_N| \leqslant |f(x+t)-f(x)|,$$

qui a lieu pour toutes les valeurs de x et de t.

La propriété 3 $(\tilde{A})$ pour $f(x)$ est identique à la propriété 3 (A_w) pour $[f(x)]_N$.

Ainsi, à cause du théorème I, il s'ensuit que $[f(x)]_N \epsilon B_w$ p. p. puisque elle est de la classe (A_w). Mais, à cause de la propriété 1 (I), nous avons alors $[f(x)]_N \epsilon \tilde{B}$ p. p. Par suite, quel que soit ε $(0 < \varepsilon < 1)$, il existe un polynôme trigonométrique:

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k x}$$

tel que

$$|[f(x)]_N - P_n(x)| < \varepsilon/2 \tag{2}$$

pour toutes les valeurs de x, sauf peut-être pour un ensemble E_{Nn} tel que $\delta_B E_{Nn} < \varepsilon/2$.

De (1) et (2) nous tirons

$$|f(x)-P_n(x)| \leqslant |f(x)-[f(x)]_N| + |[f(x)]_N - P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

c'est-à-dire $|f(x)-P_n(x)| < \varepsilon$, pour toutes les valeurs de x, sauf peut-être pour l'ensemble $E_N + E_{Nn}$ tel que $\delta_B(E_N+E_{Nn}) < \varepsilon$. Mais cela veut dire que $f(x) \epsilon \tilde{B}$ p. p., et ainsi nous avons démontré que $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ p. p.

2. Démontrons ensuite que $\tilde{B}$ p. p. $\subset \tilde{A}$.

Soit $f(x) \epsilon \tilde{B}$ p. p., à cause de la propriété 4 (I), nous pouvons alors conclure que $f \epsilon \tilde{B}$, a. b., c'est-à-dire que $f(x)$ jouit de la propriété 1 $(\tilde{A})$.

La propriété 5 (I) d'une fonction $\tilde{B}$ p. p. est identique à la propriété 2 $(\tilde{A})$. De la propriété 3 (I) il s'ensuit que $[f(x)]_N \epsilon B_w$ p. p. Alors, à cause du théorème I, on a $[f(x)]_N \epsilon A_w$, donc la propriété 3 (A_w) est satisfaite pour $[f(x)]_N$; mais c'est précisément la propriété 3 $(\tilde{A})$ pour $f(x)$. Par suite $f(x)$ jouit de toutes les trois propriétés de la classe $\tilde{A}$. Donc $f(x) \epsilon \tilde{A}$, c'est-à-dire $\tilde{B}$ p. p. $\subset \tilde{A}$.

Ainsi, nous avons démontré d'une part que $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ p. p. et, de l'autre, que $\tilde{B}$ p. p. $\subset \tilde{A}$. Par suite $\tilde{A} \equiv \tilde{B}$ p. p. et notre théorème est complètement démontré.

Travaux cités

[1] A. Besicovitch and H. Bohr, *Almost-periodicity and general trigonometric series*, Acta Math. 57 (1931), p. 203-292.

[2] R. Doss, *On generalised almost-periodic functions*, Annals of Math. 59 (1954), p. 477-489.

[3] А. С. Кованко, *Об одном свойстве и новом определении обобщенных почти периодических функций А. С. Безиковича* Укр. мат. ж. 8. 3 (1956), p. 273-288.

[4] A. Kovanko, *Sur les classes de fonctions presque-périodiques généralisées*, Annali di Mat. 8 (1930), p. 1-24.

Reçu par la Rédaction le 18. 6. 1959