ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VIII (1960)

Sur l'approximation des racines de nombres positifs

par A. B. Turowicz (Tyniec)

1. Dans une note publiée dans le Journal of the American Statistical Society, vol. 37 (1942), „Machine method for the extraction of cube root", M. Otis E. Lancaster a démontré que la suite $\{x_k\}$ définie par

$$(1) \qquad x_{k+1} = \frac{a_k^3+2A}{x_k^3+\frac{1}{2}A}\cdot\frac{x_k}{2}$$

converge rapidement vers $\sqrt[3]{A}$. (1)

La formule de M. Lancaster est un cas particulier d'une formule générale qui permet de calculer rapidement les racines de degré quelconque.

2. Soit $A>0$, $x_0>0$ arbitraire. Nous allons démontrer que *la suite définie par*

$$(2) \qquad x_{k+1} = \frac{(n-1)x_k^{n+1}+(n+1)Ax_k}{(n+1)x_k^n+(n-1)A},$$

pour $n\geqslant 2$ entier positif, converge vers $\sqrt[n]{A}$.

En effet, on vérifie facilement que

$$(3) \qquad x_{k+1}-\sqrt[n]{A} = \frac{(x_k-\sqrt[n]{A})^3\cdot\sum_{j=0}^{n-2}(n-j-1)(j+1)x_k^{n-j-2}\cdot\sqrt[n]{A}^j}{(n+1)k_k^n+(n-1)A},$$

$$(4) \qquad \operatorname{sgn}(x_{k+1}-\sqrt[n]{A}) = \operatorname{sgn}(x_0-\sqrt[n]{A}).$$

On a

$$(5) \qquad x_{k+1}-x_k = \frac{2x_k(A-x_k^n)}{(n+1)x_k^n+(n-1)A}$$

donc, d'après (4) et (5),

$$(6) \qquad \operatorname{sgn}(x_{k+1}-x_k) = -\operatorname{sgn}(x_0-\sqrt[n]{A}).$$

---

(1) La note de M. Lancaster ne m'est connue que du compte rendu paru dans Mathematical Reviews 3 (1942), p. 276.

Les relations (4) et (6) impliquent que

$$(7)\qquad \begin{cases} x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_k > \ldots \sqrt[n]{A} & \text{pour} \quad x_0 > \sqrt[n]{A}, \\ x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots \sqrt[n]{A} & \text{pour} \quad x_0 < \sqrt[n]{A}. \end{cases}$$

La relation (2) donne:

$$(8)\qquad x_k = \sqrt[n]{A} \quad \text{pour} \quad x_0 = \sqrt[n]{A}.$$

La suite $\{x_k\}$ converge donc pour tout x_0 positif. Soit $x = \lim x_k$. En passant à la limite dans l'égalité (2) on trouve

$$(9)\qquad x = \frac{(n-1)x^{n+1} + (n+1)Ax}{(n+1)x^n + (n-1)A}, \qquad x = \sqrt[n]{A}.$$

3. Désignons par a le plus petit, par b le plus grand des nombres x_0 et $\sqrt[n]{A}$. D'après (3) et (7) il vient

$$(10)\qquad |x_{k+1} - \sqrt[n]{A}| < \frac{|x_k - \sqrt[n]{A}|^3 \sum_{j=0}^{n-2} (n-j-1)(j+1) b^{n-2}}{2n a^n},$$

$$|x_{k+1} - \sqrt[n]{A}| < |x_k - \sqrt[n]{A}|^3 \cdot \frac{n^2-1}{12} \frac{b^{n-2}}{a^n}.$$

La convergence de la suite $\{x_k\}$ est donc cubique. Les approximations des racines données par la méthode de Newton s'expriment par la formule

$$(11)\qquad y_{k+1} = \frac{(n-1)y_k^n + A}{n y_k^{n-1}}.$$

La convergence de la suite (11) étant carrée, la suite $\{x_k\}$ converge plus rapidement.

Prenons par exemple $n = 2$, $A = 3$, $x_0 = 2$. Alors

$$x_1 = \frac{26}{15} = 1{,}7333\ldots, \qquad x_2 = 1{,}7320508074\ldots$$

avec neuf places décimales exactes.

Posons $n = 5$, $A = 100$, $x_0 = 2{,}5$. Comme $\left(\frac{5}{2}\right)^5 = \frac{3125}{32}$, on a

$$\sqrt[5]{100} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt[5]{\frac{3200}{3125}} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt[5]{1 + \frac{3}{125}} < \frac{5}{2}\left(1 + \frac{3}{625}\right),$$

$$0 < \sqrt[5]{100} - \frac{5}{2} < \frac{3}{250},$$

$$\frac{n^2-1}{12} \cdot \frac{b^{n-2}}{a^n} = \frac{5^2-1}{12} \cdot \frac{\sqrt[5]{100^3}}{\left(\frac{5}{2}\right)^5} = 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \frac{100}{\sqrt[5]{100^2}} < 200 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^7 < \frac{1}{3},$$

donc

$$|x_1 - \sqrt[5]{100}| < \left(\frac{3}{250}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} < 6 \cdot 10^{-7}.$$

4. Il est facile de donner des formules d'approximation des racines dont le degré de convergence est supérieur à 3.

Déterminons la formule de récurrence

$$(12)\qquad z_{k+1} = \frac{\alpha z_k^{2n+1} + \beta A z_k^{n+1} + \gamma A^2 z_k}{z_k^{2n} + \delta A z_k^n + \varepsilon A^2}$$

de telle manière que la suite $\{z_k\}$ engendrée par (12) soit convergente vers $\sqrt[n]{A}$ et que le degré de convergence soit égal à 5.

Remarquons d'abord que le numérateur et le dénominateur de (12) sont des polynomes homogènes en z_k et $\sqrt[n]{A}$, dont les degrés diffèrent de l'unité. La valeur de $\sqrt[n]{A}$ étant à calculer, les puissances de $\sqrt[n]{A}$, qui ne sont pas des puissances de A n'y figurent point.

Il faut donc que le numérateur de la fraction

$$(13)\qquad z_{k+1} - \sqrt[n]{A} = \frac{\alpha z_k^{2n+1} + \beta A z_k^{n+1} + \gamma A^2 z_k - \sqrt[n]{A}(z_k^{2n} + \delta A z_k^n + \varepsilon A^2)}{z_k^{2n} + \delta A z_k^n + \varepsilon A^2}$$

soit divisible par $(z_k - \sqrt[n]{A})^5$, c'est-à-dire qu'il s'annule avec ses quatre premières dérivées pour $z_k = \sqrt[n]{A}$.

Un calcul facile donne:

$$(14)\qquad z_{k+1} = \frac{(2n-1)(n-1)z_k^{2n+1} + 2(4n^2-1)Az_k^{n+1} + (2n+1)(n+1)A^2 z_k}{(2n+1)(n+1)z_k^{2n} + 2(4n^2-1)Az_k^n + (2n-1)(n-1)A}.$$

On peut démontrer que la suite $\{z_k\}$ converge vers $\sqrt[n]{A}$ et que le degré de convergence est 5.

On pourrait obtenir de même des formules de degré arbitraire. Cependant, ces formules devenant de plus en plus compliquées, elles ne seront pas utiles pour les calculs. La seconde approximation calculée au moyen de la formule (2) sera le plus souvent suffisamment exacte, tandis que la première, calculée au moyen de (14) ou d'une autre formule encore plus compliquée, ne le sera plus, le degré élevé de convergence n'ayant d'influence que sur les approximations ultérieures.

Ainsi la formule (2), qui est encore simple et fournit un algorithme rapidement convergent, paraît la plus avantageuse pour les calculs. Il semble qu'elle pourrait être adoptée (sans démonstration) dans l'enseignement secondaire.

5. Voyons maintenant si la formule (2) peut être appliquée dans le cas où A serait un nombre complexe, $A = re^{i\varphi}$, $r \neq 0$. Si

$$(15) \qquad x_0 = s_0 e^{i\vartheta}, \qquad \vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2p\pi}{n}, \qquad p = 0, 1, \ldots, (n-1),$$

on a

$$x_1 = \frac{(n-1)s_0^n e^{in\vartheta} + (n+1)re^{i\varphi}}{(n+1)s_0^n e^{in\vartheta} + (n-1)re^{i\varphi}} \cdot s_0 e^{i\vartheta} = \frac{(n-1)s_0^{n+1} + (n+1)rs_0}{(n+1)s_0^n + (n-1)r} e^{i\vartheta}.$$

En posant

$$s_1 = \frac{(n-1)s_0^{n+1} + (n+1)rs_0}{(n+1)s_0^n + (n-1)r},$$

on a $x_1 = s_1 e^{i\vartheta}$. On voit que toutes les approximations $x_1, x_2, x_3, \ldots$ auront le même argument ϑ, tandis que leurs modules $s_1, s_2, s_3, \ldots$ seront calculés au moyen de (2) en partant du module s_0. Donc, si x_0 a été choisi sur une des demi-droites (15), la suite $\{x_k\}$ converge vers la valeur respective de $\sqrt[n]{A}$.

Posons maintenant

$$(16) \qquad \vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{(2p+1)\pi}{n}, \qquad p = 0, 1, \ldots, (n-1).$$

On a

$$x_1 = \frac{-(n-1)s_0^{n+1} + (n+1)rs_0}{-(n+1)s_0^n + (n-1)r} \cdot e^{i\vartheta}.$$

On voit que l'argument de x_1 sera ϑ ou $\vartheta + \pi$. De même tous les x_k seront situées sur la droite qui contient la demi-droite correspondante (16).

Si n est un nombre pair, aucune de ces droites ne contient aucune des valeurs de $\sqrt[n]{A}$. Dans ce cas la suite $\{x_k\}$ ne converge pas vers $\sqrt[n]{A}$.

Si n est impair la suite $\{x_k\}$ sera indeterminée, si $-(n+1)s_0^n + (n-1)r = 0$, x_1 devenant infini.

Si x_0 appartient à un voisinage proche du point

$$\sqrt[n]{\frac{n-1}{n+1}}\, r \cdot e^{i\vartheta},$$

où ϑ satisfait à (16), même si x_0 est en dehors de la demi-droite (16), le module de x_1 sera très grand. Par conséquent il faudrait calculer plusieurs x_k pour obtenir une bonne approximation, même si la suite $\{x_k\}$ convergeait vers $\sqrt[n]{A}$.

Ces considérations montrent que la formule (2) a peu de valeur pratique pour le calcul des racines de nombres complexes: en choisissant x_0 au hasard, on risque d'obtenir une suite divergente ou une suite dont les termes initiaux ne donnent pas de bonne approximation. C'est pourquoi nous laissons ouverte la question de déterminer le domaine de convergence des suites (2) dans le plan complexe.

Reçu par la Rédaction le 24. 3. 1959