ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VIII (1960)

Sur un problème aux limites de la théorie des fonctions analytiques

par D. SADOWSKA (Łódź)

1. Introduction. Les problèmes aux limites de la théorie des fonctions analytiques ont été étudiés par de nombreaux auteurs, entre autres par D. Hilbert, T. Carleman, F. Gahoff, J. Privaloff, B. Hvédelidsé, W. Pogorzelski (voir [5]). Ce dernier m'a proposé le problème dont la solution est le sujet de la présente note.

Supposons donné dans le plan de la variable complexe un ensemble de p courbes de Jordan fermées $L_1, L_2, \ldots, L_p$, n'ayant pas de points communs et limitant les domaines disjoints $S_1^-, S_2^-, \ldots, S_p^-$. Soit L_0 une courbe de Jordan fermée qui renferme toutes les courbes $L_1, L_2, \ldots, L_p$ sans les couper.

Désignons par S_0^- le domaine infini situé en dehors de la courbe L. et par S^+ le domaine limité par la courbe L_0 et les courbes $L_1, L_2, \ldots, L_{p0}$

2. Énoncé du problème. Il s'agit de trouver une fonction $\Phi(z)$ qui soit holomorphe séparément à l'intérieur de chacun des domaines $S^+, S_0^-, S_1^-, \ldots, S_p^-$ et dont les valeurs limites en tout point $t \in L = L_0 + L_1 + \ldots + L_p$ satisfassent à la condition

$$(1) \qquad \Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) + \int_L \frac{N_1(t,\tau)}{|t-\tau|^{\alpha_1}} \Phi^+(\tau)\,d\tau + \int_L \frac{N_2(t,\tau)}{|t-\tau|^{\alpha_2}} \Phi^-(\tau)\,d\tau.$$

$\Phi^+(t)$ désigne ici la valeur limite au point t du contour L de la fonction Φ par rapport au domaine S^+, tandis que $\Phi^-(t)$ désigne la valeur limite de la fonction $\Phi(z)$ par rapport au domaine $S^- = S_0^- + S_1^- + \ldots + S_p^-$ calculée au point $t \in L$; α_1, α_2 sont des nombres positifs inférieurs à l'unité.

On fera les hypothèses suivantes:

I. Les fonctions complexes $G(t)$ et $g(t)$, définies sur l'ensemble de points L, satisfont à la condition de Hölder

$$(2) \qquad |G(t) - G(t')| < K|t-t'|^{\mu},$$

$$(3) \qquad |g(t) - g(t')| < K|t-t'|^{\mu}.$$

On admet en outre que la fonction $G(t)$ ne prend sur L que des valeurs non nulles.

II. Les fonctions complexes de deux variables $N_1(t,\tau)$ et $N_2(t,\tau)$ sont définies pour tout couple de points t, τ de l'ensemble L et satisfont à la condition de Hölder de la forme

$$(4)\qquad |N_k(t,\tau)-N_k(t',\tau')| < A(|t-t'|^{\nu}+|\tau-\tau'|^{\mu}) \qquad (k=1,2),$$

où les exposants μ, ν remplissent la condition $0<\mu<\nu\leqslant 1$.

III. Les courbes $L_0, L_1, \ldots, L_p$ ont en tout point t une tangente continue.

3. Solution du problème. On peut affirmer, en se basant sur la solution connue du problème linéaire de Hilbert, que si la solution du problème posé (1) existe, la fonction $\Phi(z)$ satisfait en tout point intérieur z des domaines $S^+, S_0^-, \ldots, S_p^-$ à l'équation

$$(5)\qquad \Phi(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i}\int_L \Big\{g(\theta)+\int_L\Big(\frac{N_1(\theta,\tau)}{|\theta-\tau|^{\alpha_1}}\Phi^+(\tau)+ \frac{N_2(\theta,\tau)}{|\theta-\tau|^{\alpha_2}}\Phi^-(\tau)\Big)d\tau\Big\}\frac{d\theta}{\chi^+(\theta)(\theta-z)}+\chi(z)P(z).$$

Soit $\chi(z)$ la solution canonique donnée par les formules

$$(6)\qquad \chi(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Pi(z)}e^{\Gamma(z)}, & \text{si}\quad z\in S^+,\\ z^{-\varkappa}e^{\Gamma(z)}, & \text{si}\quad z\in S^-,\end{cases}$$

où

$$(7)\qquad \pi(z) = (z-a_1)^{\lambda_1}(z-a_2)^{\lambda_2}\ldots(z-a_p)^{\lambda_p},$$

$$G_0(t) = t^{-\varkappa}\Pi(t)G(t), \qquad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\log G_0(t)}{t-z}\,dt,$$

a_ν désigne ici un point arbitraire de l'intérieur du domaine S_ν^-, $\nu = 1, 2, \ldots, p$, tandis que le point $z=0$ se trouve à l'intérieur du domaine S^+.

Le symbole $\varkappa$, dit indice du problème, désigne la somme $\varkappa = \sum_{\nu=0}^{p}\lambda_\nu$, où $2\pi\lambda_\nu = \big(\arg G(t)\big)_{L_\nu}$ est l'accroissement subi par l'argument de la fnoction $G(t)$ dans tout son parcours sur la courbe fermée L_ν (dans le sens positif pour $\nu=0$ et dans le sens négatif pour $\nu = 1, 2, \ldots, p$). Il résulte des formules (6) et (7) que la solution canonique $\chi(z)$ est non nulle dans tout le plan. En outre, d'après l'hypothèse (2) et la propriété connue de l'intégrale de Cauchy, cette solution a en tout point t de l'ensemble L des valeurs limites $X^{\pm}(t)$ qui sont soumises à la condition de Hölder de la forme

$$(8)\qquad |X^{\pm}(t)-X^{\pm}(t')| < B|t-t'|^{\mu}.$$

Soit $P(z)$ une fonction entière arbitraire. Désignons par C le coefficient de Hölder de cette fonction sur les courbes L:

$$(9)\qquad |P(t)-P(t')| < C|t-t'|^{\mu}.$$

Si la fonction $\Phi(z)$ est une solution du problème posé, ses valeurs limites (supposées continues) qui seront désignées par

$$(10)\qquad \varphi_1(t) = \Phi^+(t), \qquad \varphi_2(t) = \Phi^-(t),$$

satisferont, d'après les formules de Plemelj, en tout point $t\in L$ au système d'équations à forte singularité de la forme suivante

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}\Big(g(t)+\int_L\sum_{k=1,2}\frac{N_k(t,\tau)\varphi_k(\tau)}{|t-\tau|^{\alpha_k}}d\tau\Big)+\frac{\chi^+(t)}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)d\tau}{\chi^+(\tau)(\tau-t)}+ \frac{\chi^+(t)}{2\pi i}\int_L\frac{d\theta}{\chi^+(\theta)(\theta-t)}\Big(\int_L\sum_{k=1,2}\frac{N_k(\theta,\tau)\varphi_k(\tau)}{|\theta-\tau|^{\alpha_k}}d\tau\Big)+\chi^+(t)P(t),$$

$$(11)\qquad \varphi_2(t) = -\frac{1}{2}\frac{\chi^-(t)}{\chi^+(t)}\Big(g(t)+\int_L\sum_{k=1,2}\frac{N_k(t,\tau)\varphi_k(\tau)}{|t-\tau|^{\alpha_k}}d\tau\Big)+ \frac{\chi^-(t)}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)d\tau}{\chi^+(\tau)(\tau-t)}+\frac{\chi^-(t)}{2\pi i}\int_L\frac{d\theta}{\chi^+(\theta)(\theta-t)}\times \Big(\int_L\sum_{k=1,2}\frac{N_k(\theta,\tau)\varphi_k(\tau)}{|\theta-\tau|^{\alpha_k}}d\tau\Big)+\chi^-(t)P(t).$$

Passons à présent à l'étude du système d'équations (11), en y traitant les fonctions φ_1 et φ_2 comme fonctions inconnues. On appliquera aux seconds membres de ces équations le théorème suivant dû à Mouskhelichvili (voir [5], p. 61).

Si la fonction $K(t,\tau)$ définie sur la courbe L est de la forme

$$K(t,\tau)=\frac{\Psi(t,\tau)}{|t-\tau|^{a}},\qquad 0\leqslant a<1,$$

où la fonction $\Psi(t,\tau)$ est assujettie à la condition de Hölder par rapport aux variables t et τ, on peut écrire

$$\int_L\frac{d\theta}{\theta-\tau}\int_L K(\theta,\tau)\,d\tau=\int_L d\tau\int_L\frac{K(\theta,\tau)}{\theta-t}\,d\theta; \tag{12}$$

la formule (12) découle de la transformation de Poincaré-Bertrand [6].

Les équations (11) (dans l'hypothèse que les fonctions $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ satisfont à la condition de Hölder) peuvent alors s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t)&=\frac{1}{2}\Big(g(t)+\int_L\sum_{k=1,2}\frac{N_k(t,\tau)\varphi_k(\tau)}{|t-\tau|^{a_k}}\,d\tau\Big)+\frac{\chi^+(t)}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)\,d\tau}{\chi^+(\tau)(\tau-t)}+\\
&\quad+\frac{\chi^+(t)}{2\pi i}\int_{L(\tau)}\sum_{k=1,2}\Big(\int_{L(\theta)}\frac{N_k(\theta,\tau)\,d\theta}{\chi^+(\theta)(\theta-t)|\theta-\tau|^{a_k}}\Big)\varphi_k(\tau)\,d\tau+\chi^+(t)P(t),\\
\varphi_2(t)&=-\frac{1}{2}\frac{\chi^-(t)}{\chi^+(t)}\Big(g(t)+\int_L\sum_{k=1,2}\frac{N_k(t,\tau)\varphi_k(\tau)}{|t-\tau|^{a_k}}\,d\tau\Big)+\\
&\quad+\frac{\chi^-(t)}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)\,d\tau}{\chi^+(\tau)(\tau-t)}+\frac{\chi^-(t)}{2\pi i}\times\\
&\quad\times\int_{L(\tau)}\sum_{k=1,2}\Big(\int_{L(\theta)}\frac{N_k(\theta,\tau)\,d\theta}{\chi^+(\theta)(\theta-t)|\theta-\tau|^{a_k}}\Big)\varphi_k(\tau)\,d\tau+\chi^-(t)P(t).
\end{aligned}\tag{13}$$

Posons pour simplifier l'écriture

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)\,d\tau}{\chi^+(\tau)(\tau-t)}, \tag{14}$$

$$f_k(t,\tau)=\frac{N_k(t,\tau)}{|t-\tau|^{a_k}}\qquad(k=1,2), \tag{15}$$

$$F_k(t,\tau)=\int_{L(\theta)}\frac{N_k(\theta,\tau)}{\chi^+(\theta)(\theta-t)|\theta-\tau|^{a_k}}\,d\theta\qquad(k=1,2). \tag{16}$$

Les équations (13) auront alors la forme

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t)&=\frac{g(t)}{2}+\chi^+(t)\big(f(t)+P(t)\big)+\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_L\sum_{k=1,2}\Big(\frac{\chi^+(t)}{\pi i}F_k(t,\tau)+f_k(t,\tau)\Big)\varphi_k(\tau)\,d\tau,\\
\varphi_2(t)&=-\frac{1}{2}\frac{\chi^-(t)}{\chi^+(t)}g(t)+\chi^-(t)\big(f(t)+P(t)\big)+\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_L\sum_{k=1,2}\Big(\frac{\chi^-(t)}{\pi i}F_k(t,\tau)-\frac{\chi^-(t)}{\chi^+(t)}f_k(t,\tau)\Big)\varphi_k(\tau)\,d\tau.
\end{aligned}\tag{17}$$

Nous allons prouver que les équations (17) sont à faibles singularités.

En effet, les fonctions $F_k(t,\tau)$, définies par la formule (16), peuvent être mises sous la forme

$$F_k(t,\tau)=\int_L\frac{f_k^*(\theta,\tau)}{(\theta-t)(\tau-\theta)}\,d\theta\qquad(k=1,2), \tag{18}$$

où

$$f_k^*(\theta,\tau)=\frac{N_k(\theta,\tau)}{\chi^+(\theta)}\cdot\frac{\theta-\tau}{|\theta-\tau|^{a_k}}\qquad(k=1,2). \tag{19}$$

Or, d'après un théorème dû à Mouskhelichvili ([5], p. 18, th. 5), les fonctions $(\theta-\tau)/|\theta-\tau|^{a_k}$ satisfont à la condition de Hölder, avec l'exposant $1-a_k$, par rapport aux deux variables.

Si l'on tient compte des inégalités (4) et (8), on trouve que les fonctions (19) sont assujetties à la condition de Hölder écrite sous la forme

$$|f_k^*(\theta,\tau)-f_k^*(\theta',\tau')|<\mathrm{const}\cdot(|\theta-\theta'|^{\mu^*}+|\tau-\tau'|^{\mu^*}), \tag{20}$$

où $\mu^*=\min(\mu,1-a_k)$. Si l'on utilise la décomposition

$$\frac{1}{(\theta-t)(\tau-\theta)}=\frac{1}{\tau-t}\Big(\frac{1}{\theta-t}-\frac{1}{\theta-\tau}\Big),$$

les fonctions (18) peuvent se mettre sous la forme

$$F_k(t,\tau)=\frac{1}{\tau-t}\Big(\int_L\frac{f_k^*(\theta,\tau)}{\theta-t}\,d\theta-\int_L\frac{f_k^*(\theta,\tau)}{\theta-\tau}\,d\theta\Big)=\frac{\omega_k(t,\tau)-\omega_k(\tau,\tau)}{\tau-t}. \tag{21}$$

On voit facilement, d'après l'inégalité (20) et le théorème de Plemelj (voir [5], p. 54), que les fonctions $\omega_k(t,\tau)$, $k=1,2$, satisfont à la condition de Hölder avec l'exposant μ^*.

Il résulte de la formule (21) que les fonctions $F_k(t,\tau)$ sont à faible singularité pour $t=\tau$; elles peuvent notamment s'écrire

$$F_k(t,\tau) = \frac{N_k^*(t,\tau)}{|t-\tau|^{1-\mu'}}, \quad (k=1,2), \tag{22}$$

où $0<\mu'<\mu^*$ et les fonctions $N_k^*(t,\tau)$ remplissent la condition de Hölder, avec l'exposant $\mu^*-\mu'$, par rapport aux deux variables.

Ainsi nous avons prouvé que le système d'équations integrales (17) forme un système d'équations à faible singularité.

D'autre part le système (17) peut être ramené par une méthode connue à une èquation intégrale de Fredholm. Considérons un ensemble L_2 obtenu par une translation de l'ensemble $L_1 = L$. On suppose ici que les ensembles L_1 et L_2 n'ont pas de points communs. Soit $\tilde{f}(t)$ une fonction définie dans la région L_1+L_2 par les égalités

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t_1) &= \frac{g(t_1)}{2} + \chi^+(t_1)\big(f(t_1)+P(t_1)\big), \\ \tilde{f}(t_2) &= -\frac{1}{2}\,\frac{\chi^-(t_1)}{\chi^+(t_1)}\,g(t_1)+\chi^-(t_1)\big(f(t_1)+P(t_1)\big), \end{aligned} \tag{23}$$

où $t_2 \epsilon L_2$ est le point qui correspond à $t_1 \epsilon L_1$. Désignons par $M(t,\tau)$ une fonction du couple de points de la région L_1+L_2, définie par les formules

$$\begin{aligned} M(t_1,\tau_1) &= \frac{\chi^+(t_1)}{\pi i}F_1(t_1,\tau_1)+f_1(t_1,\tau_1), \\ M(t_2,\tau_2) &= \frac{\chi^-(t_1)}{\pi i}F_2(t_1,\tau_1)-\frac{\chi^-(t_1)}{\chi^+(t_1)}f_2(t_1,\tau_1), \\ M(t_1,\tau_2) &= \frac{\chi^+(t_1)}{\pi i}F_2(t_1,\tau_1)+f_2(t_1,\tau_1), \\ M(t_2,\tau_1) &= \frac{\chi^-(t_1)}{\pi i}F_1(t_1,\tau_1)-\frac{\chi^-(t_1)}{\chi^+(t_1)}f_1(t_1,\tau_1), \end{aligned} \tag{24}$$

où $t_1, \tau_1 \epsilon L_1$ et $t_2, \tau_2 \epsilon L_2$.

Si les fonctions $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ satisfont aux équations (17), la fonction $\Phi(t)$ définie dans la région L_1+L_2 par les égalités

$$\varphi_1(t_1) = \Phi(t_1), \quad \varphi_2(t_1) = \Phi(t_2) \quad (t_1 \epsilon L_1,\ t_2 \epsilon L_2) \tag{25}$$

satisfait à l'équation

$$\Phi(t) = \tilde{f}(t) + \frac{1}{2}\int_{L_1+L_2} M(t,\tau)\Phi(\tau)\,d\tau \tag{26}$$

et réciproquement; si la fonction $\Phi(t)$ est une solution de l'équation (26), les valeurs de cette fonction définissent dans les régions L_1, L_2 le système (25) de deux fonctions dans la région L et ce système est une solution du système d'équations (17).

L'équation de Fredholm (26) est, en raison de la singularité des fonctions $F_k(t,\tau)$ définies par (22), une équation à faible singularité. Dans la théorie classique on montre que cette équation peut être ramenée à une équation intégrale itérée de noyau borné qui, dans le cas où $\lambda = \frac{1}{2}$ n'est pas une valeur caractéristique du noyau $M(t,\tau)$, est équivalente à l'équation (26).

En itérant l'équation (26) $n-1$ fois, on obtient

$$\Phi(t) = \tilde{f}_n(t) + (\tfrac{1}{2})^n \int_{L_1+L_2} M_n(t,\tau)\Phi(\tau)\,d\tau, \tag{27}$$

où

$$M_n(t,\tau) = \int_{L_1+L_2} M_{n-1}(t,s)M(s,\tau)\,ds,$$

$$\tilde{f}_n(t) = \tilde{f}(t) + \sum_{\nu=1}^{n} (\tfrac{1}{2})^\nu \int_{L_1+L_2} M_\nu(t,\tau)\tilde{f}(\tau)\,d\tau.$$

Lorsque $n > [1/\mu']$, les noyaux $M_n(t,\tau)$ seront bornés.

En vertu du premier théorème de Fredholm, l'équation (27) a une solution de la forme

$$\Phi(t) = \tilde{f}(t) + \tfrac{1}{2}\int_{L_1+L_2} \mathfrak{N}(t,\tau,\tfrac{1}{2})\tilde{f}(\tau)\,d\tau, \tag{28}$$

où $\mathfrak{N}(t,\tau,\frac{1}{2})$ est la somme du noyau résolvant par rapport au noyau $M_n(t,\tau)$ et de quelques noyaux itérés du noyau $M(t,\tau)$.

Dans le cas où $\lambda = \frac{1}{2}$ est une valeur caractéristique du noyau $M(t,\tau)$, la solution sous une forme connue existe uniquement si la fonction donnée $\tilde{f}(t)$ est orthogonale à toutes les solutions propres de l'équation associée

$$\psi(t) = (\tfrac{1}{2})^n \int_{L_1+L_2} \overline{M_n(\tau,t)}\,\psi(\tau)\,d\tau,$$

dont le noyau est conjugué au noyau $M_n(\tau,t)$, obtenu du noyau $M_n(t,\tau)$ par transposition des variables t, τ.

Ainsi nous avons résolu le système d'équations intégrales (17) par la méthode donnée plus haut. Afin de démontrer que les fonctions trouvées $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ sont aussi des solutions du système (11), et par conséquent du problème posé, il faudra encore prouver que ces fonctions satisfont à la condition de Hölder. Il suffit pour cela de prouver que les fonctions

$$I_k(t) = \int_L F_k(t,\tau)\varphi_k(\tau)\,d\tau \quad (k=1,2) \tag{29}$$

vérifient la condition de Hölder. Quant aux autres fonctions qui figurent aux seconds membres des équations (17), il est évident que toutes ces fonctions satisfont à la condition de Hölder soit en vertu des hypothèses faites au début, soit grâce au théorème de Privaloff-Plemelj.

Or, en se basant uniquement sur la continuité des fonctions $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$, on trouve

$$|I_k(t)-I_k(t')| = \left|\int\limits_L \left(\frac{N_k^*(t,\tau)}{|t-\tau|^{1-\mu'}} - \frac{N_k^*(t',\tau)}{|t'-\tau|^{1-\mu'}}\right)\varphi_k(\tau)\,d\tau\right|$$

$$\leqslant \int\limits_L \frac{|N_k^*(t,\tau)-N_k^*(t',\tau)|}{|t-\tau|^{1-\mu'}}|\varphi_k(\tau)|\,d\tau +$$

$$+\int\limits_L |N_k^*(t',\tau)|\left|\frac{1}{|t-\tau|^{1-\mu'}} - \frac{1}{|t'-\tau|^{1-\mu'}}\right||\varphi_k(\tau)|\,d\tau$$

$$< \mathrm{const}\cdot|t-t'|^{\mu^*} + \mathrm{const}\cdot|t-t'|^{\alpha},$$

où α est un nombre positif inférieur à $\frac{1}{2}$ (voir [4], p. 10). Il vient par conséquent

$$|I_k(t)-I_k(t')| < \mathrm{const}\cdot|t-t'|^{\theta\mu^*/2}, \quad \text{où} \quad 0<\theta<1. \tag{30}$$

Par suite, les solutions du système (17) sont aussi des solutions du système (11). Si dans la formule (5) on porte les fonctions trouvées $\Phi^+(t)$ et $\Phi^-(t)$, on obtiendra la fonction $\Phi(z)$ définie à l'intérieur des domaines $S^+, S_0^-, S_1^-, \ldots, S_p^-$, holomorphe séparément dans chacun d'eux, et dont les valeurs limites satisfont à la condition (1). Le problème posé au début se trouve ainsi résolu.

Travaux cités

[1] W. Pogorzelski, *Problème non linéaire d'Hilbert pour le système de fonctions*, Ann. Polon. Math. 2 (1955), p. 1-13.

[2] — *Problème aux limites d'Hilbert généralisé*, Ann. Polon. Math. 2 (1955), p. 136-144.

[3] — *Równania całkowe i ich zastosowania II*, Warszawa 1958.

[4] — *Badanie równań całkowych mocno osobliwych metodą punktu niezmienniczego*, Biuletyn W. A. T. 18 (1955), p. 3-85.

[5] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, Москва 1946.

[6] G. Bertrand, *Équation de Fredholm aux intégrales principales au sens de Cauchy*, Comptes Rendus de l'Acad., Paris 1921, vol. 172, p. 1458-1461.

Reçu par la Rédaction le 2. 5. 1959

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VIII (1960)

General solution of a functional equation

by M. Kuczma (Kraków)

The object of the present paper is the functional equation

$$\varphi[f(x)] = G(x, \varphi(x)), \tag{1}$$

where $\varphi(x)$ denotes the required function and $f(x)$ and $G(x,y)$ are given functions. We assume that the function $f(x)$ satisfies the relation

$$f[f(x)] \equiv x. \tag{2}$$

(Examples of such functions are: $c-x$, c/x, $\sqrt{c^2-x^2}$; S. Łojasiewicz [3] has given a construction of all functions fulfilling (2)).

The linear equation

$$\varphi[f(x)] = A(x)\varphi(x)+B(x)$$

with a function $f(x)$ fulfilling (2) has been treated by N. Gercevanoff [1]. In the present paper I give the general solution of equation (1) with a function $f(x)$ fulfilling (2).

§ 1. We shall discuss equation (1) in a set E such that $f(E) = E$. Using the terminology adopted in [2], we shall call such a set a *modulus-set* for the function $f(x)$. Let us decompose the set E into three sets E_0, E_1, E_2 such that

$$f(x) = x \quad \text{for} \quad x \in E_0,$$

$$f(x) > x \quad \text{for} \quad x \in E_1,$$

$$f(x) < x \quad \text{for} \quad x \in E_2.$$

Lemma I. *If the function $f(x)$ fulfils (2), then*

$$f(E_0) = E_0, \tag{3}$$

$$f(E_1) = E_2, \tag{4}$$

$$f(E_2) = E_1. \tag{5}$$