since $\frac{3}{2} \geqslant 1+1/n > 1$ for $n \geqslant 2$. Similarly

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k \zeta(k) > \frac{\varphi_k(n+1)}{\varphi_k(n)} > \frac{1}{\zeta(k)},$$

and

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k \zeta(2k) > \frac{\sigma_k(n+1)\varphi_k(n+1)}{\sigma_k(n)\varphi_k(n)} > \frac{1}{\zeta(2k)}.$$

In a similar manner if $a = -1$

$$\zeta(k) > \frac{\sigma_k(n-1)}{\sigma_k(n)} > \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{\zeta(k)},$$

$$\zeta(k) > \frac{\varphi_k(n-1)}{\varphi_k(n)} > \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{\zeta(k)},$$

and

$$\zeta(2k) > \frac{\sigma_k(n-1)\varphi_k(n-1)}{\sigma_k(n)\varphi_k(n)} > \left(\frac{1}{2}\right)^x \frac{1}{\zeta(2k)}.$$

I express my gratitude to Dr. M. V. Subbarao for his valuable guidance in preparing this paper.

Reference

[1] S. Swetharanyam, *On the function* $\sigma_k(n)$, Ann. Polon. Math. 4 (1958), p. 340-343.

Reçu par la Rédaction le 1. 2. 1959

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VIII (1960)

Über die korrekte Definition des Ranges eines nomographischen Polynoms und über die Stetigkeit und die Differenzierbarkeit der verallgemeinerten nomographischen Polynome

von J. Wojtowicz (Warszawa)

Der Begriff des Ranges eines nomographischen Polynoms, obwohl in jedem nomographischen Lehrbuch angewandt, ist bisher nicht korrekt definiert worden. Die von verschiedenen Verfassern aufgestellten Definitionen sind ungenau und sogar falsch. In der vorliegenden Arbeit wird eine korrekte Definition des Ranges eines nomographischen Polynoms aufgestellt.

Außerdem enthält die Arbeit Beweise der Sätze, welche in einem gewissen Sinne umgekehrt sind zu bekannten Sätzen über die Summe stetiger Funktionen und über die Differenzierbarkeit der Summe differenzierbarer Funktionen.

Definition. Als ein *nomographisches Polynom* wird eine Funktion von der Form

$$F(x_1, \ldots, x_k) \equiv \sum_{i=1}^{n} f_{i1}(x_1)\ldots f_{ik}(x_k) \tag{1}$$

bezeichnet.

Definition. Unter einem *Summanden* des nomographischen Polynoms versteht man den Ausdruck $f_{i1}(x_1)\ldots f_{ik}(x_k)$.

Definition. Ein nomographisches Polynom $\sum_{i=1}^{n} f_{i1}(x_1)\ldots f_{ik}(x_k)$ *ist von reduzierter Form in Bezug auf die Veränderliche* x_1, wenn die Funktionen $f_{i2}(x_2)\ldots f_{ik}(x_k)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ linear unabhängig sind.

Definition. Ein nomographisches Polynom *ist von reduzierter Form*, wenn es von reduzierter Form in Bezug auf jede Veränderliche x_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ ist.

Hilfssatz 1. *Jedes nomographische Polynom kann man in eine reduzierte Form in Bezug auf eine beliebige Veränderliche bringen ohne die Anzahl der Polynomsummanden zu vergrößern.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werden wir das Polynom (1) in reduzierte Form in Bezug auf die Veränderliche x_1 bringen.

Wenn die Funktionen $f_{i2}\dots f_{ik}$ $(i=1,2,\dots,n)$ linear unabhängig sind, so ist das Polynom (1) von reduzierter Form in Bezug auf die Veränderliche x_1.

Wenn die Funktionen $f_{i2}\dots f_{ik}$ für $i=1,2,\dots,n$ linear abhängig sind, so nehmen wir an, daß die Indices auf solche Weise geordnet sind, daß die ersten l Funktionen $f_{i2}\dots f_{ik}$ $(i=1,2,\dots,l)$ linear unabhängig und die übrigen von ihnen linear abhängig sind d. h.

$$f_{l+j,2}\dots f_{l+j,k}\equiv\sum_{i=1}^{l}a_{ij}f_{i2}\dots f_{ik},\quad \text{für}\quad j=1,2,\dots,n-l,$$

wo a_{ij} Zahlenkoeffizienten sind.

Das Polynom (1) kann man in der folgenden Form darstellen:

$$\sum_{i=1}^{l}f_{i2}\dots f_{ik}\Big(f_{i1}+\sum_{j=1}^{n-l}a_{ij}f_{l+j,1}\Big). \tag{2}$$

Man sieht also, daß das Polynom (2) von reduzierter Form in Bezug auf die Veränderliche x_1 ist, wobei die Anzahl der Summanden kleiner geworden ist. Wir bemerken, daß nach der Durchführung von k sukzessiven Reduktionen in Bezug auf die Veränderlichen $x_j, x_{j+1},\dots,x_k,x_1,\dots,x_{j-1}$ die Anzahl der Polynomsummanden gleich der ursprünglichen wird, also ist das erhaltene Polynom von reduzierter Form in Bezug auf jede Veränderliche.

Satz 1. *Ein jedes nomographische Polynom, welches nicht identisch Null ist, kann in eine reduzierte Form gebracht werden.*

Beweis. Es sei ein nomographisches Polynom von n Summanden gegeben. Wir realizieren sukzessiv k Reduktionen in Bezug auf jede einzelne Veränderliche und wiederholen einen solchen Zyklus von Reduktionen n mal. Da man höchstens $(n-1)\cdot k$ Reduktionen in der Weise durchführen kann, daß nach je k Reduktionen die Anzahl der Summanden erniedrigt wird, so kann keine der letzten k Reduktionen die Anzahl der Summanden weiter verkleinern. Es folgt daraus, daß das nomographische Polynom in eine reduzierte Form gebracht worden ist.

Bemerkung. Wenn das nomographische Polynom identisch Null ist, so betrachten wir als seine reduzierte Form die Null.

Hilfssatz 2. [1] *Wenn die Funktionen $A_i(x_1,\dots,x_k)$ $(i=1,2,\dots,n)$ gegeben in einem Bereich B_k, der durch die Ungleichungen $x_{t0}\leqslant x_t\leqslant x_{t1}$ $(t=1,2,\dots,k)$ definiert ist, linear unabhängig sind, so existiert ein solches System von Punkten $P_j(x_{1j},\dots,x_{kj})$, die zum Bereich B_k gehören, daß*

$$W_n=|A_i(P_j)|\neq 0\qquad (i=1,2,\dots,n;\ j=1,2,\dots,n).$$

[1] M. Warmus, *Nomographic functions*, Rozprawy Matematyczne 16 (1959).

Definition. Die Funktionen $f_i(x)$ $(i=1,2,\dots,n)$ definiert im Intervall $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ heißen *linear unabhängig im weiteren Sinn*, wenn aus der Gleichheit $c_0+\sum_{i=1}^{n}c_if_i(x)\equiv 0$, $c_i=0$ für $i=0,1,\dots,n$ folgt.

Bemerkung. Die Funktion vom konstanten Wert ist eine linear abhängige Funktion im weiteren Sinn.

Satz 2. *Wenn das nomographische Polynom $F(x_1,\dots,x_k)$ nicht identisch Null ist und man es auf zwei verschiedene reduzierte Formen in Bezug auf die Veränderliche x_t $F\equiv\sum_{i=1}^{n}f_{i1}\dots f_{ik}$ und $F\equiv\sum_{j=1}^{m}g_{j1}\dots g_{jk}$ bringen kann, so ist die Anzahl der im weiteren Sinne linear unabhängigen Funktionen f_{it} gleich den g_{it}.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man den Beweis für die Veränderliche x_1 durchführen. Wir setzen voraus, daß zwei Darstellungen des nomographischen Polynoms $F(x_1,\dots,x_k)$ in einer reduzierten Form in Bezug auf die Veränderliche x_1 existieren:

$$F(x_1,\dots,x_k)\equiv\sum_{i=1}^{n}f_{i1}\dots f_{ik}, \tag{3}$$

$$F(x_1,\dots,x_k)=\sum_{j=1}^{m}g_{j1}\dots g_{jk}. \tag{4}$$

Dann gilt identisch

$$\sum_{i=1}^{n}f_{i1}\dots f_{ik}\equiv\sum_{j=1}^{r}g_{j1}\dots g_{jk}. \tag{5}$$

Unter den Funktionen g_{j1} existiert ein System von r $(r\leqslant m)$ im weiteren Sinn linear unabhängiger Funktionen derart, daß die übrigen $m-r$ Funktionen g_{j1} von ihnen linear abhängig im weiteren Sinne sind. Wir nehmen an die Indices seien so geordnet, daß die Funktionen g_{j1} für $j=1,2,\dots,r$ im weiteren Sinn linear unabhängig sind.

Die Identität (5) können wir in der Form

$$\sum_{i=1}^{n}f_{i1}A_i(x_2,\dots,x_k)\equiv\sum_{j=1}^{r}g_{j1}B_j(x_2,\dots,x_k)+B_0(x_2,\dots,x_k) \tag{6}$$

darstellen. Die Funktionen A_i sind laut Voraussetzung linear unabhängig.

Auf Grund des Hilfssatzes 2 existiert ein System von n Punkten $P_l(x_2, \ldots, x_k)$ derart, daß die Determinante $|A_i(P_l)| \neq 0$. Setzen wir die Koordinaten der Punkte P_l in die Gleichung (6) ein, so erhalten wir n lineare Gleichungen mit n Unbekanten f_{i1}, mit einer von Null verschiedenen Determinante.

Durch Auflösung erhalten wir

$$f_{i1} \equiv \sum_{j=1}^{r} a_{ji} g_{j1} + a_{0i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

wo a_{ji} Zahlenkoeffizienten sind.

Es werde $m \leqslant n$ angenommen. Wir betrachten die Matrix $M = [a_{ji}]$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, r)$, deren Rang p heißen möge, wobei die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{p1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1p} & a_{2p} & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden sei.

1. Wir untersuchen den Fall $p = r$. In diesem Falle ist das System der ersten r Gleichungen in Bezug auf g_{j1} lösbar:

$$g_{j1} \equiv \sum_{i=1}^{r} b_{ij} f_{i1} + b_{0j},$$

wo b_{ij} Zahlen bedeuten. Wenn wir die so berechneten g_{j1} in die übrigen $n-r$ Gleichungen des Systems (5) einsetzen, so zeigt es sich, daß die Funktionen f_{i1} für $i = r+1, \ldots, n$ von den ersten r im weiteren Sinn linear abhängig sind. Man sieht also, daß höchstens p Funktionen linear unabhängig im weiteren Sinn sind.

2. Wir untersuchen den Fall $p \leqslant r$. Betrachten wir die Determinante

$$W_q = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{p1} & f_{11} - a_{01} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1p} & a_{2p} & \ldots & a_{pp} & f_{p1} - a_{0p} \\ a_{1q} & a_{2q} & \ldots & a_{pq} & f_{q1} - a_{0q} \end{vmatrix} \qquad (q = p+1, \ldots, n).$$

Nach der Theorie der linearen Gleichungssysteme sind alle Determinanten W_q gleich Null. Man sieht, daß die Funktionen f_{q1} $(q = p+1, \ldots, n)$ von den Funktionen f_{i1} $(i = 1, \ldots, p)$ linear abhängig im weiteren Sinne sind. Folglich sind höchstens p Funktionen f_{i1} linear unabhängig im weiteren Sinn. Wir bezeichnen mit s die Anzahl der im weiteren Sinn linear unabhängigen Funktionen f_{i1}. Man sieht, daß immer

$$s \leqslant r. \tag{8}$$

In analoger Weise können wir beweisen, daß

$$s \geqslant r \tag{9}$$

ist. Zu diesem Zwecke genügt es die Identität (5) in der Form

$$\sum_{j=1}^{m} g_{j1} D_j(x_2, \ldots, x_k) \equiv \sum_{i=1}^{s} f_{i1} C_i(x_2, \ldots, x_k) + C_0(x_2, \ldots, x_k)$$

darzustellen. Aus (8) und (9) folgt die Gleichheit $s = r$.

Definition. Unter dem *Range* des nomographischen Polynoms $\sum_{i=1}^{n} f_{i1}(x_1) \ldots f_{ik}(x_k)$ *in Bezug auf die Veränderliche* x_m verstehen wir die Anzahl r_m der im weiteren Sinn linear unabhängigen Funktionen $f_{im}(x_m)$ in einer beliebigen reduzierten Form des Polynoms in Bezug auf die Veränderliche x_m.

Definition. Der *Rang* eines nomographischen Polynoms ist die Summe r seiner Ränge in Bezug auf jede einzelne Veränderliche.

Bemerkung. Dem Polynom, welches identisch Null ist, schreiben wir den Rang Null zu.

Aus dem Satz 1 ist es ersichtlich, daß jedes nomographische Polynom einen bestimmten Rang hat; aus dem Satz 2 folgt, daß dieser Rang eindeutig bestimmt ist.

Hilfssatz 3. *Wenn die Funktionen* $F_j(x_1, \ldots, x_k) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i(x_1, \ldots, x_k)$ $(j = 1, \ldots, n)$ *(a_{ij} sind Zahlen) im Punkt* $P_0(x_{10}, \ldots, x_{k0})$ *stetig sind und die Determinante* $W = |a_{ij}| \neq 0$, *so sind alle Funktionen* $f_i(x_1, \ldots, x_k)$ *im Punkt* P_0 *stetig.*

Beweis. Weil $W \neq 0$, so $f_i(x_1, \ldots, x_k) \equiv \sum_{j=1}^{n} b_{ij} F_j(x_1, \ldots, x_k)$ $(i = 1, \ldots, n)$, wo b_{ij} Zahlen sind.

Die Funktionen $f_i(x_1, \ldots, x_k)$ sind somit als Summe stetiger Funktionen stetig.

Bemerkung. Der Hilfssatz überträgt sich sofort auf die Stetigkeit der Funktionen in einem Intervall.

Ähnlich wie den Hilfssatz 3 beweisen wir den

Hilfssatz 4. *Wenn die Funktionen* $F_j(x_1, \ldots, x_k) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i(x_1, \ldots, x_k)$ $(j = 1, \ldots, n)$ *(a_{ij} sind Zahlen) im Punkte* $P_0(x_{10}, \ldots, x_{k0})$ *stetige partielle*

Ableitungen bis zur Ordnung m in Bezug auf die Veränderliche x_p haben, und die Determinante $W = |a_{ij}| \neq 0$, so haben auch die Funktionen $f_i(x_1, \ldots, x_k)$ im Punkt P_0 stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung m in Bezug auf die Veränderliche x_p.

Bemerkung. Der Hilfssatz überträgt sich sofort auf die Differenzierbarkeit der Funktionen in einem Interwall.

Definition. Unter einem *verallgemeinerten nomographischen Polynom* verstehen wir eine Funktion von der Form

$$F(x_1, \ldots, x_k) \equiv \sum_{i=1}^{n} f_{i1}(x_{m_1}, \ldots, x_{l_1}) \ldots f_{ip}(x_{m_p}, \ldots, x_{l_p}),$$

wo die Mengen der Zahlen $m_1, \ldots, l_1; \ldots; m_p, \ldots, l_p$; paarweise fremd sind.

Definition. Ein verallgemeinertes nomographisches Polynom *ist von reduzierter Form in Bezug auf die Gesamtheit der Veränderlichen* $x_{m_1}, \ldots, x_{l_1}$, wenn die Funktionen $A_i \equiv f_{i2} \ldots f_{ip}$ linear unabhängig sind.

Satz 3. *Wenn das verallgemeinerte nomographische Polynom*

$$F(x_1, \ldots, x_k) \equiv \sum_{i=1}^{n} f_{i1}(x_{m_1}, \ldots, x_{l_1}) \ldots f_{ip}(x_{m_p}, \ldots, x_{l_p})$$

von reduzierter Form in Bezug auf die Gesamtheit der Veränderlichen $x_{m_1}, \ldots, x_{l_1}$ und eine stetige Funktion der Veränderlichen $x_{m_1}, \ldots, x_{l_1}$, für $x_{m_1} = x_{m_1,0}, \ldots, x_{l_1} = x_{l_1,0}$ bei beliebigen Werten der übrigen Veränderlichen ist, so sind die Funktionen $f_{i1}(x_{m_1}, \ldots, x_{l_1})$ stetig für $x_{m_1} = x_{m_1,0}, \ldots, x_{l_1} = x_{l_1,0}$.

Beweis. Die Funktionen $A_i = f_{i2} \ldots f_{ip}$ sind linear unabhängig. Auf Grund des Hilfssatzes 2 existiert ein solches System von Punkten $P_j(x_{m_2,j}, \ldots, x_{l_p,j})$, daß die Determinante $|A_i(P_j)| \neq 0$ ist. Durch Einsetzen in die Funktionen, erhalten wir $F_j \equiv \sum_{i=1}^{n} f_{i1} A_i(P_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$. Auf Grund des Hilfssatzes 3 sind alle Funktionen f_{i1} für $x_{m_1} = x_{m_1,0}, \ldots, x_1 = x_{10}$ stetig.

Bemerkung. Der Satz kann sofort auf die Stetigkeit in einem Intervall und andere Gesamtheiten der Veränderlichen ausgedehnt werden.

Zusatz. *Wenn ein verallgemeinertes nomographisches Polynom*

$$F(x_1, \ldots, x_k) \equiv \sum_{i=1}^{n} f_{i1}(x_{m_1}, \ldots, x_{l_1}) \ldots f_{ip}(x_{m_p}, \ldots, x_{lp})$$

von reduzierter Form in Bezug auf alle Gesamtheiten $x_{m_i}, \ldots, x_{l_i}$ $(i = 1, \ldots, p)$ der Veränderlichen und die Funktion $F(x_1, \ldots, x_k)$ stetig in einem Bereiche in Bezug auf alle Veränderlichen ist, so sind die Funktionen f_{is} $(s = 1, \ldots, p; i = 1, \ldots, n)$ in diesem Bereiche stetig.

Satz 4. *Wenn das verallgemeinerte nomographische Polynom*

$$F(x_1, \ldots, x_k) \equiv \sum_{i=1}^{n} f_{i1}(x_{m_1}, \ldots, x_{l_1}) \ldots f_{ip}(x_{m_p}, \ldots, x_{l_p})$$

von reduzierter Form in Bezug auf die Gesamtheit der Veränderlichen $x_{m_s}, \ldots, x_q, \ldots, x_{l_s}$ ist und die Funktion $F(x_1, \ldots, x_k)$ stetige partielle Ableitungen r-Ordnung in Bezug auf die Veränderliche x_q in einem Bereiche hat, so haben die Funktionen $f_{is}(x_{m_s}, \ldots, x_q, \ldots, x_{l_s})$ $(i = 1, \ldots, n)$ in diesem Bereiche stetige partielle Ableitungen r-Ordnung in Bezug auf die Veränderliche x_q.

Beweis. Bezeichnen wir

$$A_i(x_{m_1}, \ldots, x_{l_{s-1}}, x_{m_{s+1}}, \ldots, x_{l_p}) = f_{i1} \ldots f_{i,s-1} \cdot f_{i,s+1} \ldots f_{ip}.$$

So folgt

$$F \equiv \sum_{i=1}^{n} f_{is} A_i.$$

Die Funktionen A_i sind linear unabhängig, also existieren nach Hilfssatz 2 n derartige Punkte P_j, daß die Determinante $|A_i(P_j)| \neq 0$ ist. Wir haben $F_j \equiv \sum_{i=1}^{n} f_{is} A_i(P_j)$. Auf Grund des Hilfssatzes 4 haben die Funktionen f_{is} $(i = 1, \ldots, n)$ in dem gegebenen Bereiche stetige partielle Ableitungen r-Ordnung in Bezug auf die Veränderliche x_q.

Bemerkung. Da jedes nomographische Polynom zugleich ein verallgemeinertes nomographisches Polynom ist, so gelten die Sätze 3 und 4 auch für nomographische Polynome.

Reçu par la Rédaction le 17. 2. 1958