ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VIII (1960)

Sur l'intégrale de Cauchy pour un arc fermé à l'infini

par D. Przeworska-Rolewicz (Warszawa)

Introduction. Dans ce travail nous étudierons les propriétés d'une intégrale de Cauchy

$$(*)\qquad \int_L \frac{u(t,\tau)}{\tau-t}\,d\tau,$$

où L désigne un arc régulier, fermé par le point à l'infini.

En outre nous résoudrons l'équation intégrale non linéaire singulière

$$(**)\qquad u(t)=\lambda\int_L \frac{K[t,\tau,u(\tau)]\,d\tau}{\tau-t}$$

et nous étudierons le problème aux limites de Hilbert.

N. I. Mouskhelichvili [2] a étudié l'intégrale $(*)$ en supposant que la ligne d'intégration L est un axe réel. Dans ce cas il a supposé que la fonction $u(t,\tau)$ vérifie une condition de Hölder et en outre l'inégalité

$$(***)\qquad |u(t,\tau)|<\frac{c}{|\tau|^{\alpha}+c'}.$$

c, c', α sont des constantes positives. Cette supposition implique que l'intégrale $(*)$ a un sens. Nous démontrerons, en admettant une hypothèse plus générale que $(***)$, que l'intégrale $(*)$ aura le sens de la valeur principale de Cauchy.

1. Les arcs réguliers fermés á l'infini. Soit le plan Z de la variable complexe $z=x+iy$, complété par le point à l'infini, et un point $z_0=x_0+$ $+iy_0$ arbitrairement fixé. Considérons la transformation homographique suivante:

$$(1)\qquad w=\frac{1}{z-z_0}\qquad (w=\xi+i\eta).$$

Pour les arcs L ne passant pas par le point z_0, la transformation (1) est une homéomorphie.

DÉFINITION 1. Un arc L, fermé par le point à l'infini, est *régulier*, si l'homographie (1) (où z_0 est un point arbitraire non situé sur l'arc L) transforme cet arc en un arc fermé L^* régulier au sens ordinaire (c'est-à-dire admettant une tangente continue en tout point).

L'homographie (1) est composée d'une inversion (de centre au point $z_0 = x_0+iy_0$) et d'une symétrie, d'où il résulte le critérium suivant de la régularité d'un arc L à l'infini:

Pour que l'arc L fermé à l'infini soit régulier, il faut et il suffit que:

1° la direction de la tangente au point $z = x+iy$ sur l'arc L tende vers une direction déterminée c'est-à-dire que le quotient des dérivées x'/y' tende vers une limite déterminée, finie ou non), si le point z tend vers l'infini dans une direction arbitraire sur l'arc L.

2° Les limites des cosinus directeurs (qui existent dans ce cas) du vecteur $\overrightarrow{z_0z}$ (où z_0 est un point arbitrairement fixé, non situé sur l'arc L)

$$\lim_{z\to\infty}\frac{x-x_0}{|z-z_0|}, \quad \lim_{z\to\infty}\frac{y-y_0}{|z-z_0|} \qquad (z\in L) \tag{2}$$

admettent des valeurs opposées pour les deux directions de l'arc L.

2. L'intégrale de Cauchy. Supposons que l'arc L de Jordan soit fermé par le point à l'infini et régulier. Désignons par S^+ et S^- les domaines du plan Z situés par rapport à la direction positive de la ligne L de même que les demi-plans supérieur et inférieur de la variable complexe le sont par rapport à la direction positive de l'axe réel. Considérons une fonction définie par l'intégrale impropre (si elle existe):

$$U(z) = \int_L \frac{u(\tau)}{\tau-z}\,d\tau = \lim_{N\to\infty}\int_{L_N}\frac{u(\tau)}{\tau-z}\,d\tau, \tag{3}$$

où L_N désigne une partie d'arc L située à l'intérieur du cercle $|z| \leqslant N$.

THÉORÈME 1. *Si l'arc L de Jordan, fermé à l'infini, est régulier, les égalités suivantes sont satisfaites*:

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-z} = \begin{cases} +\pi i, & si \quad z\in S^+, \\ -\pi i, & si \quad z\in S^-. \end{cases} \tag{4}$$

Démonstration. Désignons par t_1 et t_2 les points communs de l'arc L et du cercle $|z| \leqslant N$, et supposons que le point t_2 soit postérieur au point t_1. Nous avons

$$\int_{L_N}\frac{d\tau}{\tau-z} = \log\frac{|t_2-z|}{|t_1-z|} + i\arg[(t_2-z)-\arg(t_1-z)]. \tag{4'}$$

L'arc L étant, par hypothèse, régulier à l'infini, les vecteurs $\overrightarrow{zt_1}$ et $\overrightarrow{zt_2}$ tendent vers les demi-droites de sens opposés, si $N\to\infty$. Il en résulte que le premier terme de la somme (4') tend vers zéro, si $N\to\infty$, le second tend vers $+\pi i$ si $z\in S^+$ et vers $-\pi i$ si $z\in S^-$ et $N\to\infty$.

THÉORÈME 2. *Si l'arc L de Jordan, fermé à l'infini, est régulier, si la densité complexe $u(\tau)$ est définie et continue pour tout $\tau\in L$, en outre si la limite (finie)*

$$\lim_{\tau\to\infty} u(\tau) = u(\infty) \tag{5}$$

existe et si l'inégalité suivante est satisfaite:

$$|u(\tau)-u(\infty)| < \frac{c}{|\tau|^a} \tag{5'}$$

(c, a sont des constantes positives données), alors l'intégrale impropre (3) *existe.*

Démonstration. Nous pouvons écrire

$$\int_{L_N}\frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau-z} = \int_{L_N}\frac{u(\tau)-u(\infty)}{\tau-z}\,d\tau + u(\infty)\int_{L_N}\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Désignons par τ_0 le point de l'arc L, le plus rapproché du point z, par σ la longueur de l'arc $\widehat{\tau_0\tau}$. Alors nous avons l'inégalité suivante (pour σ suffisamment grand):

$$\left|\frac{u(\tau)-u(\infty)}{\tau-z}\right| < \frac{c}{|\tau-z|\cdot|\tau|^a} < \frac{c'}{\sigma^{a+1}},$$

en profitant de la propriété que pour l'arc régulier à l'infini le rapport σ/τ admet une borne inférieure positive, si $\tau\to\infty$.

Il en résulte l'existence de la limite

$$\lim_{N\to\infty}\int_{L_N}\frac{u(\tau)-u(\infty)}{\tau-z}\,d\tau = \int_L\frac{u(\tau)-u(\infty)}{\tau-z}\,d\tau,$$

comme intégrale d'une fonction non bornée au sens de Riemann. Donc l'intégrale (3) existe au sens de la valeur principale de Cauchy à l'infini et nous avons, d'après le théorème 1,

$$U(z) = \int_L\frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau-z} = \begin{cases} \displaystyle\int_L \frac{u(\tau)-u(\infty)}{\tau-z}\,d\tau + u(\infty)\pi i, & si \quad z\in S^+, \\ \displaystyle\int_L \frac{u(\tau)-u(\infty)}{\tau-z}\,d\tau - u(\infty)\pi i, & si \quad z\in S^-. \end{cases}$$

Le théorème suivant est évident:

Théorème 3. *Si l'arc L et la fonction $u(\tau)$ satisfont aux conditions du théorème 2, la fonction $U(z)$, définie par l'intégrale* (3), *est holomorphe séparément dans les domaines S^+ et S^-.*

Nous étudierons maintenant les propriétés de l'intégrale (3) sur la ligne d'intégration L.

Définition 2. On appelle *valeur principale* d'une intégrale de Cauchy et on désigne par le symbole

$$\int\limits_L \frac{u(\tau)}{\tau-t}\,d\tau$$

la limite suivante (si elle existe et si elle est finie):

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{L-l_\varepsilon} \frac{u(\tau)}{\tau-t}\,d\tau \qquad (t\in L), \tag{6}$$

où $u(\tau)$ est une fonction complexe définie sur L, l_ε désigne une partie de l'arc L située à l'intérieur du cercle $|z-t|\leqslant\varepsilon$.

Théorème 4. *Si l'arc L de Jordan est fermé à l'infini et régulier, si la fonction complexe $u(\tau)$ définie sur l'arc L satisfait à l'inégalité suivante:*

$$|u(\tau)-u(\tau_1)| < c\left|\frac{1}{\tau-z_0}-\frac{1}{\tau_1-z_0}\right|^\mu \qquad (0<\mu<1) \tag{7}$$

(z_0 est un point arbitraire non situé sur l'arc L, c une constante positive fixée) et si la limite (5) *existe, alors la valeur principale* (6) *existe pour tout $t\in L$.*

Démonstration. Soient deux points arbitraires a et b situés sur l'arc L tels que l'arc l_ε avec le point t soit situé à l'intérieur de l'arc $\widehat{ab}$. Donc, nous pouvons écrire

$$\int\limits_{L-l_\varepsilon} \frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau-t} = \int\limits_{\widehat{ab}-l_\varepsilon} \frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau-t} + \int\limits_{L-\widehat{ab}} \frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau-t}. \tag{8}$$

D'après la condition généralisée de Hölder (7), on sait qu'il existe une limite de la première intégrale

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\widehat{ab}-l_\varepsilon} \frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau-t} = \int\limits_{\widehat{ab}} \frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau-t}.$$

Pour la deuxième intégrale, le point t est extérieur à l'arc $L-\widehat{ab}$, donc on peut démontrer l'existence de cette intégrale de même que dans le théorème 2. Il en résulte la conclusion du théorème 4.

Nous donnerons maintenant les formules de Plemelj pour les arcs fermés à l'infini.

Théorème 5. *Si l'arc L et la fonction $u(\tau)$ satisfont aux conditions du théorème 4, les valeurs limites $U^+(t)$ et $U^-(t)$ de la fonction $U(z)$, définie par la formule* (3), *vérifient (pour tout $t\in L$) les égalités*

$$U^+(t) = \pi i u(t) + \int\limits_L \frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau-t}, \tag{9}$$

$$U^-(t) = -\pi i u(t) + \int\limits_L \frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau-t} \tag{9'}$$

ou les égalités équivalentes

$$U^+(t)+U^-(t) = \int\limits_L \frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau-t}, \tag{10}$$

$$U^+(t)-U^-(t) = 2\pi i u(t). \tag{10'}$$

Démonstration. Soit une partie fixée $\widehat{ab}$ de l'arc L telle que le point t soit situé à l'intérieur de l'arc $\widehat{ab}$. Nous pouvons écrire

$$U(z) = \int\limits_L \frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau-z} = \int\limits_{\widehat{ab}} \frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau-z}\,d\tau + \int\limits_{L-\widehat{ab}} \frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau-z}. \tag{10''}$$

On obtient d'une façon bien connue

$$\int\limits_{\widehat{ab}} \frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau-z} \to \pm\pi i u(t) + \int\limits_{\widehat{ab}} \frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau-t},$$

si le point z converge d'une façon quelconque vers un point t arbitraire de l'arc $\widehat{ab}$.

Pour la deuxième intégrale le point t est extérieur au domaine d'intégration, donc nous obtenons

$$\int\limits_{L-\widehat{ab}} \frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau-z} \to \int\limits_{L-\widehat{ab}} \frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau-t}, \qquad \text{si} \quad z\to t\in\widehat{ab},$$

d'où résultent les égalités (9), (9') (ou (10), (10')) pour tout $t\in L$. Cherchons la propriété limite des égalités (9), (9'), si $t\to\infty$. Remarquons qu'on a, d'après les formules (4) et (10),

$$\int\limits_L \frac{d\tau}{\tau-t} = \pi i - \pi i = 0 \tag{11}$$

et écrivons

$$\int_L \frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau-t} = \int_L \frac{u(\tau)-u(\infty)}{\tau-t}\,d\tau. \tag{12}$$

Pour déterminer la limite de l'intégrale (12) si $t\to\infty$, décomposons cette intégrale en la somme suivante:

$$\int_L \frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau-t} \tag{13}$$

$$= \int_{L-\widehat{ab}} \frac{u(\tau)-u(\infty)}{\tau-t}\,d\tau + \int_{\widehat{ab}} \frac{u(\tau)-u(t)}{\tau-t}\,d\tau + [u(t)-u(\infty)]\int_{\widehat{ab}} \frac{d\tau}{\tau-t},$$

où l'arc $\widehat{ab}$ est une partie de l'arc L contenant le point t, telle que les longueurs des arcs $\widehat{at}$ et $\widehat{tb}$ soient égales à l'unité. En désignant par s et σ les coordonnées curvilignes des points t et τ sur L, nous pouvons écrire, en tenant compte de l'hypothèse (7), l'inégalité suivante:

$$\left|\int_{\widehat{ab}} \frac{u(\tau)-u(t)}{\tau-t}\,d\tau\right| < \frac{\text{const}}{|t-z_0|^{\mu}} \int_{\widehat{ab}} \frac{d\sigma}{|\sigma-s|^{1-\mu}|\tau-z_0|} < \frac{\text{const}}{|t-z_0|^{\mu}}\cdot\frac{2}{(1-\mu)B}, \tag{14}$$

B désignant la borne inférieure positive de la distance $|\tau-z_0|$. Il en résulte que l'intégrale (14) tend vers zéro si $t\to\infty$.

Pour étudier la première des intégrales (13) nous nous appuierons sur la propriété admise (5') et nous aurons

$$\left|\int_{L-\widehat{ab}} \frac{u(\tau)-u(\infty)}{\tau-t}\,d\tau\right| < \text{const}\left[\int_{-\infty}^{s-1} \frac{d\sigma}{|\sigma-s|\cdot|\sigma|^{\alpha}} + \int_{s+1}^{\infty} \frac{d\sigma}{|\sigma-s|\cdot|\sigma|^{\alpha}}\right]$$

$$< \text{const}\left[\frac{1}{|s+1|^{\alpha}} + \frac{1}{|s-1|^{\alpha}}\right],$$

d'où résulte que cette intégrale tend vers zéro si $s\to\pm\infty$.

Enfin, pour le troisième terme de la somme (13), nous aurons l'inégalité

$$\left|[u(t)-u(\infty)]\int_{\widehat{ab}} \frac{d\tau}{\tau-t}\right| < \frac{\text{const}}{|t|^{\alpha}}\left|\log\frac{a-t}{b-t}\right|,$$

d'où résulte aussi que cette intégrale tend vers zéro si $|t|\to\infty$. Nous obtenons donc la propriété limite

$$\lim_{|t|\to\infty} \int_L \frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau-t} = 0. \tag{15}$$

Il en résulte que les valeurs limites $U^{\pm}(t)$ de l'intégrale de Cauchy (10''), vérifiant les formules de Plemelj (9) et (9'), tendent vers les limites suivantes:

$$\begin{aligned} &\lim_{|t|\to\infty} U^+(t) = U^+(\infty) = +\pi i u(\infty),\\ &\lim_{|t|\to\infty} U^-(t) = U^-(\infty) = -\pi i u(\infty) \end{aligned} \tag{16}$$

et nous avons les propriétés limites

$$U^+(\infty)+U^-(\infty) = 0, \qquad U^+(\infty)-U^-(\infty) = 2\pi i u(\infty). \tag{16'}$$

THÉORÈME 6. *Si l'arc L et la fonction $u(\tau)$ satisfont aux conditions du théorème 4, la fonction*

$$\hat{u}(t) = \int_L \frac{u(\tau)}{\tau-t}\,d\tau \tag{17}$$

satisfait aux inégalités

$$|\hat{u}(t)-\hat{u}(t_1)| < cD\left|\frac{1}{t-z_0}-\frac{1}{t_1-z_0}\right|^{\mu}, \tag{18}$$

$$|\hat{u}(t)| < cD_1+2\pi c', \tag{18'}$$

où les constantes positives D, D_1 ne dépendent pas de la fonction $u(t)$; $c' = \sup_{t\in L}|u(\tau)|$.

Démonstration. Transformons le plan Z de la variable complexe par l'homographie (1). Au point t correspond le point $s = 1/(t-z_0)$, au point τ — le point $\sigma = 1/(\tau-z_0)$. Inversement:

$$z = \frac{1+z_0 w}{w}, \quad t = \frac{1+z_0 s}{s}, \quad \tau = \frac{1+z_0\sigma}{\sigma}, \quad d\tau = -\frac{d\sigma}{\sigma^2}. \tag{19}$$

Désignons

$$\hat{u}(t) = \hat{u}\left(\frac{1+z_0 s}{s}\right) = \hat{u}^*(s), \qquad u(\tau) = u\left(\frac{1+z_0\sigma}{\sigma}\right) = u^*(\sigma). \tag{20}$$

Remarquons, en outre, que l'homographie (1) transforme l'arc L en un arc L^* régulier, fermé, sans points multiples et de longueur finie. Nous pouvons maintenant écrire

$$\hat{u}(t) = \hat{u}^*(s) = \int_{L^*} \frac{u^*(\sigma)}{(1+z_0\sigma)/\sigma-(1+z_0 s)/s}\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right)d\sigma \tag{21}$$

$$= -\int_{L^*} \frac{su^*(\sigma)}{s(1+z_0\sigma)-\sigma(1+z_0 s)}\cdot\frac{d\sigma}{\sigma} = \int_{L^*} \frac{su^*(\sigma)}{\sigma(\sigma-s)}\,d\sigma$$

$$= \int_{L^*} \frac{u^*(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-s} - \int_{L^*} \frac{u^*(\sigma)\,d\sigma}{\sigma}.$$

La fonction $u(t)$ satisfait à l'inégalité (7), nous avons donc les inégalités

$$(22)\qquad |u^*(\sigma)| = |u(\tau)| \leqslant c',$$

$$(22')\qquad |u^*(\sigma)-u^*(\sigma_1)| = |u(\tau)-u(\tau_1)| \leqslant c\left|\frac{1}{\tau-z_0}-\frac{1}{\tau_1-z_0}\right|^{\mu} = c|\sigma-\sigma_1|^{\mu}.$$

En observant que la fonction $u^*(\sigma)$ satisfait aux conditions (22), (22'), nous pouvons appliquer le théorème de Plemelj-Privaloff et les autres inégalités bien connues:

$$(23)\qquad |\hat{u}^*(s)| \leqslant \left|\int_{L^*}\frac{u^*(\sigma)-u^*(s)}{\sigma-s}d\sigma\right| + |u^*(s)|\cdot\left|\int_{L^*}\frac{d\sigma}{\sigma-s}\right| + \left|\int_{L^*}\frac{u^*(\sigma)-u^*(0)}{\sigma}d\sigma\right| + \left|u^*(0)\int_{L^*}\frac{d\sigma}{\sigma}\right|$$
$$\leqslant c\int_{L^*}\frac{dl_\sigma}{|\sigma-s|^{1-\mu}} + |\pi i u^*(s)| + c\int_{L^*}\frac{dl_\sigma}{|\sigma|^{1-\mu}} + |\pi i u^*(0)|.$$

Mais

$$|u^*(0)| = \lim_{\sigma\to 0}|u^*(\sigma)| = \lim_{1/(\tau-z_0)\to 0}|u(\tau)| = \lim_{\tau\to\infty}|u(\tau)| \leqslant c',$$

d'où résulte l'inégalité (18'), si nous admettons

$$(24)\qquad D_1 = \sup_{s\in L^*}\int_{L^*}\frac{dl_\sigma}{|\sigma-s|^{1-\mu}} + \int_{L^*}\frac{dl_\sigma}{|\sigma|^{1-\mu}}.$$

D'après le théorème de Plemelj-Privaloff, nous avons

$$(25)\qquad |\hat{u}(t)-\hat{u}(t_1)| = |u^*(s)-u^*(s_1)| \leqslant cD|s-s_1|^{\mu} = cD\left|\frac{1}{\tau-z_0}-\frac{1}{\tau_1-z_0}\right|^{\mu}.$$

Le théorème 6 est donc démontré.

THÉORÈME 7. *Si l'arc L satisfait aux conditions du théorème 4, si la fonction $u(\lambda,\tau)$, définie pour $\lambda,\tau\in L$ satisfait à l'inégalité*

$$(26)\qquad |u(\lambda,\tau)-u(\lambda_1,\tau_1)| \leqslant c\left[\left|\frac{1}{\lambda-z_0}-\frac{1}{\lambda_1-z_0}\right|^{\nu} + \left|\frac{1}{\tau-z_0}-\frac{1}{\tau_1-z_0}\right|^{\mu}\right]$$

(c est une constante positive, $0<\mu<1$, $0<\nu\leqslant 1$) et si la limite (finie) suivante existe:

$$(26')\qquad \lim_{\lambda,\tau\to\infty} u(\lambda,\tau),$$

la fonction définie par l'intégrale singulière

$$(27)\qquad \hat{u}(\lambda,t) = \int_L \frac{u(\lambda,\tau)d\tau}{\tau-t}$$

satisfait aux inégalités suivantes:

$$(28)\qquad |\hat{u}(\lambda,t)-u(\lambda_1,t_1)| \leqslant cD\left[\left|\frac{1}{\lambda-z_0}-\frac{1}{\lambda_1-z_0}\right|^{\Theta\nu} + \left|\frac{1}{t-z_0}-\frac{1}{t_1-z_0}\right|^{\mu}\right],$$

$$(28')\qquad |u(\lambda,t)| \leqslant cD'+2\pi c',$$

où les constantes D, D' ne dépendent pas de la fonction u, Θ est une constante positive inférieure à l'unité, $c' = \sup|u(\lambda,t)|$.

Démonstration. La conclusion du théorème résulte, par une démonstration analogue à celle du théorème 6 et du théorème correspondant pour les arcs fermés de longueur finie.

COROLLAIRE 1. *Si l'arc L satisfait aux conditions du théorème 4, si la fonction $u(t,\tau)$ définie pour $t,\tau\in L$ satisfait à l'inégalité*

$$(29)\qquad |u(t,\tau)-u(t_1,\tau_1)| \leqslant c\left[\left|\frac{1}{t-z_0}-\frac{1}{t_1-z_0}\right|^{\nu} + \left|\frac{1}{\tau-z_0}-\frac{1}{\tau_1-z_0}\right|^{\mu}\right]$$

(c est une constante positive, $0<\mu<\nu\leqslant 1$) et la limite (finie) suivante existe:

$$(29')\qquad \lim_{t,\tau\to\infty} u(t,\tau),$$

la fonction définie par l'intégrale singulière

$$(30)\qquad \hat{u}(t) = \int_L \frac{u(t,\tau)}{\tau-t}d\tau$$

satisfait aux inégalités suivantes:

$$(31)\qquad |u(t)-u(t_1)| \leqslant cD\left|\frac{1}{t-z_0}-\frac{1}{t_1-z_0}\right|^{\mu},$$

$$(31')\qquad |u(t)| \leqslant cD'+2\pi c',$$

où les constantes positives D, D' ne dépendent pas de la fonction u, $c' = \sup_{t,\tau\in L}|u(t,\tau)|$.

Démonstration. Elle résulte immédiatement du théorème 7, si nous admettons que

$$0<\mu<\nu\leqslant 1,\qquad \lambda = t.$$

Remarquons que les théorèmes 5, 6, 7 et le corollaire 1 sont vrais, si nous admettons $L = L_0+L_1+\ldots+L_p$, où L_0 est un arc de Jordan, fermé à l'infini et régulier, L_ν $(\nu = 1, \ldots, p)$ sont des arcs fermés de Jordan réguliers (de longueur finie) et tous les arcs L_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, p)$ sont disjoints.

3. Application à une équation intégrale singulière non linéaire. Les propriétés démontrées dans le corollaire 1 peuvent être appliquées à l'équation intégrale singulière non linéaire:

$$u(t) = \lambda \int_L \frac{K[t, \tau, u(\tau)]}{\tau - t}\, d\tau, \tag{32}$$

où $L = L_0+L_1+\ldots+L_p$, L_0 désigne un arc de Jordan fermé à l'infini et régulier, L_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ désignent des arcs de Jordan réguliers, fermés et disjoints, qui sont contenus à l'intérieur du domaine $Z-L_0$.

Nous avons ainsi deux théorèmes sur l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (32).

THÉORÈME 8. *Si l'arc L_0 de Jordan fermé à l'infini est régulier, si les arcs L_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ de Jordan réguliers, fermés et disjoints sont situés à l'intérieur du domaine $Z-L_0$, si la fonction $K(t, \tau, \xi)$ définie pour $t, \tau \epsilon L = L_0+L_1+\ldots+L_p$, $|\xi| \leqslant R$ satisfait à l'inégalité*

$$|K(t, \tau, \xi) - K(t_1, \tau_1, \xi_1)| \leqslant k\left[\left|\frac{1}{t-z_0} - \frac{1}{t_1-z_0}\right|^\nu + \left|\frac{1}{\tau-z_0} - \frac{1}{\tau_1-z_0}\right|^\mu + |\xi-\xi_1|\right] \quad (k > 0,\ 0 < \mu < \nu \leqslant 1), \tag{33}$$

et si la limite suivante existe

$$\lim_{t,\tau\to\infty} K(t, \tau, \xi), \tag{33'}$$

alors, pour les valeurs du paramètre λ satisfaisant à la condition

$$|\lambda| \leqslant \lambda_\varkappa = \min\left[\frac{\varkappa}{kD(1+\varkappa)}, \frac{R}{kD'(1+\varkappa)+2\pi s_0(K)}\right], \tag{34}$$

(où $\varkappa$ désigne un nombre positif arbitraire, $s_0(K) = \sup\limits_{t,\tau\epsilon L;\ |\xi|\leqslant R} |K(t, \tau, \xi)|$, les constantes positives D, D' sont celles qui figurent dans le corollaire 1), l'équation (32) admet au moins une solution dans l'ensemble $E_\varkappa$ des fonctions qui satisfont aux inégalités

$$|u(t)| \leqslant R, \tag{35}$$

$$|u(t)-u(t_1)| \leqslant \varkappa\left|\frac{1}{t-z_0} - \frac{1}{t_1-z_0}\right|^\mu \tag{35'}$$

(nous supposons que la limite finie $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)$ existe).

Démonstration. Elle résulte du corollaire 1 et du théorème du point invariant de J. Schauder d'une manière analogue aux considérations de W. Pogorzelski [3], si dans toutes les inégalités pour les fonctions K et u nous remplaçons t, τ resp. par $1/(t-z_0)$ et $1/(\tau-z_0)$.

THÉORÈME 9. *Si les conditions du théorème 8 sont satisfaites, si en outre les fonctions $K^{(1)} = \mathrm{re}\,K$ et $K^{(2)} = \mathrm{im}\,K$ admettent des dérivées partielles $K^{(i)}_{x_j}$ satisfaisant aux conditions*

$$|K^{(i)}_{x_j}(t, \tau, x_1, x_2) - K^{(i)}_{x_j}(t', \tau', x_1', x_2')| \leqslant k_{ij}\left[\left|\frac{1}{t-z_0} - \frac{1}{t'-z_0}\right|^\nu + \left|\frac{1}{\tau-z_0} - \frac{1}{\tau'-z_0}\right|^\mu + |x_1-x_1'| + |x_2-x_2'|\right] \tag{36}$$

$$(\xi = x_1+ix_2,\ k_{ij} > 0;\ i, j = 1, 2;\ 0 < \mu < \nu \leqslant 1),$$

alors pour les valeurs du paramètre λ satisfaisant à l'inégalité

$$|\lambda| < \min[\lambda_\varkappa, (D+D')A+2\pi k, (D+D')B] \tag{37}$$

(où les constantes positives A et B ne dépendent que des coefficients k_{ij}) l'équation (32) admet dans l'ensemble $E_\varkappa$ (voir les inégalités (35), (35')) une solution unique, qui est la limite d'après la norme

$$||u|| = \sup_{t\epsilon L}|u(t)| + \sup_{t,t_1\epsilon L} \frac{|u(t)-u(t_1)|}{|1/(t-z_0) - 1/(t_1-z_0)|^\mu} \tag{38}$$

de la suite des approximations successives

$$u_{n+1}(t) = \lambda \int_L \frac{K[t, \tau, u_n(\tau)]}{\tau - t}\, d\tau \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(u_0 est un élément arbitraire de l'ensemble $E_\varkappa$).

Démonstration. Elle résulte du corollaire 1 et du théorème du point invariant de Banach par un raisonnement analogue à celui du travail [4], si nous remplaçons dans toutes les inégalités, concernant les fonctions K et u, t et τ resp. par $1/(t-z_0)$ et $1/(\tau-z_0)$.

Les théorèmes 8 et 9 peuvent être facilement généralisés pour les systèmes non linéaires de la forme (32). Il suffit, comme dans le travail [5], de considérer l'espace des fonctions admettant les valeurs d'un espace de Banach et de formuler les théorèmes 4, 5, 6, 7, 8, 9 pour ces fonctions.

4. Problème aux limites de Hilbert. Désignons par L l'ensemble de $p+1$ arcs de Jordan: $L = L_0+L_1+\ldots+L_p$, où tous les arcs L_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, p)$ sont disjoints. L'arc L_0 est fermé à l'infini et régulier (au sens de la définition 1), les arcs L_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ sont réguliers et fermés. Désignons par S_0^- le domaine situé par rapport à la direction positive de la ligne L_0 de même que le plan $\operatorname{im} z < 0$ l'est par rapport à la direction positive de l'axe réel, par S_ν^- $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ les domaines situés à l'intérieur des arcs L_ν (nous supposons que tout arc L_ν est situé à l'intérieur du domaine $Z-(S_0^-+L_0)$), par $S^- = S_0^-+\ldots+S_p^-$, par S^+ le domaine $Z-(S^-+L)$. Soient $p+1$ points z_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, p)$ situés à l'intérieur des domaines S_ν^- resp.

Désignons par λ_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ l'accroissement de l'argument de la fonction $G(t)$, lorsque le point t décrit la ligne fermée L_ν dans le sens positif pour $\nu = 0$ et dans le sens négatif pour $\nu = 1, 2, \ldots, p$:

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi i}[\arg G(t)]_{L_0}, \quad \lambda_\nu = \frac{1}{2\pi i}[\arg G(t)]_{L_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p). \tag{39}$$

Soit un nombre entier $\varkappa = \lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_p$. Désignons encore

$$\Pi(z) = (z-z_1)^{\lambda_1}\ldots(z-z_p)^{\lambda_p}. \tag{40}$$

Le problème homogène de Hilbert s'énonce comme il suit:

Trouver une fonction $\Phi(z)$, holomorphe séparément dans les domaines $S^+, S_0^-, \ldots, S_p^-$ (à l'exception du point z_0, situé à l'intérieur du domaine S_0^-, où la fonction $\Phi(z)$ peut avoir un pôle), dont les valeurs limites Φ^+ et Φ^-, relativement aux domaines S^+ et S^- satisfont à la condition

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \quad \text{pour} \quad t \in L. \tag{41}$$

Nous admettons les hypothèses suivantes:

1. $G(t) \neq 0$ pour tout $t \in L$.
2. Il existe deux constantes positives c_G' et c_G'' telles que

$$0 < c_G' \leqslant \lim_{t\to\infty} \frac{(t-z_0)^\varkappa}{\Pi(t)} G(t) < c_G''. \tag{42}$$

3. L'inégalité suivante est satisfaite:

$$|G(t)-G(t_1)| \leqslant c_G \left|\frac{1}{t-z_0} - \frac{1}{t_1-z_0}\right|^\mu \quad (0 < \mu < 1). \tag{43}$$

Le nombre entier $\varkappa$ est dit *indice* du problème de Hilbert. Introduisons une nouvelle fonction:

$$G_0(t) = \frac{(t-z_0)^\varkappa}{\Pi(t)} G(t). \tag{44}$$

La fonction $G_0(t)$ satisfait aux hypothèses 1 et 3 et elle admet une branche continue du logarithme. Évidemment la fonction $(t-z_\nu)^{-\lambda_\nu}$ $(\nu \neq 0)$

subit sur L_ν l'accroissement λ_ν; la fonction $G(t)$ admet l'accroissement $-\lambda_\nu$, donc la fonction $G_0(t)$ n'éprouve pas d'accroissement. Sur l'arc L_0 la fonction $(t-z_0)^\varkappa$ subit l'accroissement $-\varkappa/2$, $G(t)/\Pi(t)$ l'accroissement $(\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_p)/2$ (le point z_0 est situé dans le domaine S_0^-, par rapport au quel l'arc L_0 est orienté négativement) donc la fonction $G_0(t)$ n'éprouve pas d'accroissement.

Désignons

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Phi(z)/\Pi(z), & \text{si} \quad z \in S^+, \\ (z-z_0)^{-\varkappa}\Phi(z), & \text{si} \quad z \in S^-. \end{cases} \tag{45}$$

La nouvelle fonction inconnue $\Psi(z)$ est évidemment holomorphe dans les domaines S^+ et S^- (excepté le point z_0, où il peut y avoir un pôle). Nous pouvons maintenant écrire la condition (41) de la façon suivante:

$$\Psi^+(t) = G_0(t)\Psi^-(t), \tag{46}$$

où

$$\ln\Psi^+(t) - \ln\Psi^-(t) = \ln G_0(t). \tag{46'}$$

La fonction $\ln\Psi(z)$ est continue et holomorphe séparément dans les domaines S^+, S^-. Donc, d'après les formules (10') de Plemelj, nous avons

$$\Gamma(z) = \ln\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G_0(\tau)}{\tau - z}\,d\tau \tag{47}$$

et

$$\Psi(z) = e^{\Gamma(z)}. \tag{48}$$

Nous en obtenons la *solution canonique* de la façon suivante:

$$X(z) = \begin{cases} \Pi(z)e^{\Gamma(z)}, & \text{si} \quad z \in S^+, \\ (z-z_0)^\varkappa e^{\Gamma(z)}, & \text{si} \quad z \in S^-. \end{cases} \tag{49}$$

La solution générale est donnée par la formule

$$\Phi(z) = X(z)P\big(1/(z-z_0)\big), \tag{50}$$

où $P(z)$ désigne un polynôme arbitraire de la variable z.

D'après la condition (41), la fonction $\Phi(z)/X(z)$ est holomorphe dans tout le plan de la variable complexe (excepté peut-être le point z_0, où cette fonction admet un pôle).

Si l'indice $\varkappa > 0$, le problème résolu de Hilbert admet $\varkappa$ solutions linéaires indépendantes et égales à zéro au point z_0:

$$X(z), \frac{X(z)}{z-z_0}, \ldots, \frac{X(z)}{(z-z_0)^{\varkappa-1}}. \tag{51}$$

Il en résulte que chaque solution de ce problème pour $\varkappa > 0$ admet la forme suivante:

$$(52) \qquad \Phi(z) = X(z) P_{\varkappa-1}\left(\frac{1}{(z-z_0)}\right),$$

où

$$P_{\varkappa-1}(z) = C_0 + \ldots + C_{\varkappa-1} z^{\varkappa-1},$$

$C_0, C_1, \ldots, C_{\varkappa-1}$ étant des constantes complexes arbitraires.

Si l'indice $\varkappa \leqslant 0$, le problème résolu de Hilbert n'admet pas de solution s'annulant au point z_0 (excepté la solution $\Phi(z) \equiv 0$). Chaque solution admet au point z_0 un pôle d'ordre $-\varkappa + k$, donc elle a la forme suivante:

$$(53) \qquad \Phi(z) = X(z) P_k\left(\frac{1}{(z-z_0)}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Les valeurs limites de la solution canonique, $X^+(t)$ et $X^-(t)$, d'après les formules (10), (10′) satisfont à l'inégalité suivante:

$$(54) \qquad |X^{\pm}(t) - X^{\pm}(t_1)| \leqslant c_X \left| \frac{1}{t - z_0} - \frac{1}{t_1 - z_0} \right|^{\mu}$$

avec le même exposant μ que la fonction donnée $G(t)$.

Soit $L = L_0$. Transformons le plan de la variable complexe à l'aide de l'homographie (1). La fonction $G^*(w_1) = G^*\big(1/(t-z_0)\big) = G(t)$ vérifie la condition de Hölder avec l'exposant μ. Alors nous pouvons résoudre le problème de Hilbert pour la ligne transformée L_0^* et la fonction $G^*(w_1)$. Il est évident, en appliquant la transformation inverse $z = (1 + z_0 w)/w$, que la fonction $X_1(z) = X^*(w) = X^*\big(1/(z-z_0)\big)$ est la solution canonique du problème de Hilbert pour l'arc L_0 et la fonction $G(t)$, donnée par la formule

$$X_1(z) = X(z) e^{\Gamma(z_0)}$$

et que les indices des problèmes satisfont à l'égalité

$$\varkappa + \varkappa^* = 0.$$

Le problème linéaire non homogène de Hilbert consiste à trouver une fonction $\Phi(z)$, holomorphe séparément dans les domaines $S^+, S_0^-, \ldots, S_p^-$ (excepté le point z_0, où elle peut admettre un pôle), dont les valeurs limites Φ^+ et Φ^- relativement aux domaines S^+ et S^- satisfont à la condition

$$(55) \qquad \Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad \text{pour} \quad t \in L.$$

Nous admettons les hypothèses 1, 2, 3 et l'hypothèse suivante:

4. La fonction $g(t)$ est définie pour $t \in L$ et elle satisfait à l'inégalité

$$(56) \qquad |g(t) - g(t_1)| \leqslant c_g \left| \frac{1}{t - z_0} - \frac{1}{t_1 - z_0} \right|^{\mu} \qquad (0 < \mu < 1)$$

en outre on suppose l'existence de la limite (finie) $\lim\limits_{t \to \infty} g(t) = g(\infty)$.

Soit $X(z)$ la solution canonique du probleme homogène. Alors

$$G(t) = X^+(t)/X^-(t),$$

d'où, d'après la condition (55),

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^+(t)}.$$

Nous obtenons, d'après les formules de Plemelj (10′), que

$$(57) \qquad \frac{\Phi(z)}{X(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)\, d\tau}{X^+(\tau)(\tau - z)} + P\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$$

(la fonction $\Phi(z)/X(z)$ peut avoir un pôle au point z_0), d'où

$$(58) \qquad \Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)\, d\tau}{X^+(\tau)(\tau - z)} + X(z) P\left(\frac{1}{z - z_0}\right),$$

où $P(z)$ désigne un polynôme de la variable z.

Si l'indice $\varkappa > 0$, nous obtenons la solution $\Phi(z)$ s'annulant au point z_0 en admettant que P désigne un polynôme de degré non supérieur à $\varkappa - 1$.

Si $\varkappa = 0$, le problème non homogène de Hilbert admet une solution unique que nous obtenons en admettant $P \equiv 0$.

Si $\varkappa < 0$, la solution du problème non homogène existe, si $P \equiv 0$ et si dans le développement de la fonction

$$(59) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)\, d\tau}{X^+(\tau)(\tau - z)} = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} (z - z_0)^j \int_L \frac{g(\tau)\, d\tau}{(\tau - z_0)^{j+1} X^+(\tau)}$$

les coefficients

$$\int_L \frac{g(\tau)\, d\tau}{(\tau - z_0)^{j+1} X^+(\tau)} = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, \varkappa - 1)$$

sont nuls. Dans ce cas, la solution est unique. Cette condition est aussi nécessaire.

5. Inversion de l'intégrale de Cauchy. Soit l'égalité

$$(60)\qquad \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f_1(\tau)\,d\tau}{\tau-t} = f_2(t),$$

où L est un arc de Jordan fermé à l'infini et régulier. Nous admettons les hypothèses suivantes:

La fonction donnée f_2 est définie pour $t\in L$ et satisfait à l'inégalité

$$(61)\qquad |f_2(t)-f_2(t_1)| \leqslant c_2\left|\frac{1}{t-z_0}-\frac{1}{t_1-z_0}\right|^{\mu}$$

en outre on admet que la limite (finie) $\lim\limits_{t\to\infty} f_2(t) = f_2(\infty)$ existe.

Cherchons la forme de la fonction f_1. Introduisons la nouvelle fonction inconnue

$$(62)\qquad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f_1(\tau)\,d\tau}{\tau-z}.$$

D'après la formule de Plemelj (10) nous pouvons écrire la formule (60) de la façon suivante:

$$(63)\qquad \Phi^+(t)+\Phi^-(t) = f_2(t).$$

Nous avons ainsi le problème non homogène de Hilbert où: $G(t)\equiv -1$, $\varkappa = 0$, $\Pi(z)\equiv 1$. Il en résulte les formules

$$\ln G_0(t) = \pi i,$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\pi i\,d\tau}{\tau-z} = \frac{1}{2}\int_L \frac{d\tau}{\tau-z} = \begin{cases} \pi i/2, & \text{si}\quad z\in S^+,\\ -\pi i/2, & \text{si}\quad z\in S^-,\end{cases}$$

$$X(z) = e^{\Gamma(z)} = \begin{cases} e^{\pi i/2} = i, & \text{si}\quad z\in S^+,\\ e^{-\pi i/2} = -i, & \text{si}\quad z\in S^-,\end{cases}$$

$$X^{\pm}(t) = \pm i.$$

Alors

$$(64)\qquad \Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{f_2(\tau)}{\tau-t}\,d\tau,$$

d'où

$$\Phi^{\pm}(t) = \pm\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{X^{\pm}(t)}{X^+(t)}f_2(t) + \frac{X^{\pm}(t)}{\pi i}\int_L \frac{f_2(\tau)\,d\tau}{X^+(\tau)(\tau-t)}.$$

Nous avons, d'après les formules (10), (10′) de Plemelj,

$$(65)\qquad f_1(t) = \frac{1}{2}[\Phi^+(t)-\Phi^-(t)]$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{X^+(t)+X^-(t)}{2\pi i}f_2(t) + \frac{X^+(t)-X^-(t)}{2\pi i}\int_L \frac{f_2(\tau)\,d\tau}{X^+(\tau)(\tau-t)}$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{i+(-i)}{2\pi i}f_2(t) + \frac{i-(-i)}{2\pi i}\int_L \frac{f_2(\tau)}{i(\tau-t)}\,d\tau = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f_2(\tau)}{\tau-t}\,d\tau.$$

Donc la fonction f_1 est définie par la formule (65) de la même manière que la fonction f_2 l'est par la formule (60). Il en résulte l'égalité importante

$$(66)\qquad \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{1}{t-\theta}\left[\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f_1(\tau)\,d\tau}{\tau-t}\right]dt = f_1(\theta).$$

Travaux cités

[1] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, Москва-Ленинград 1946.

[2] — *Некоторые загачи математической теории упругости*, Москва 1954, p. 263-273.

[3] W. Pogorzelski, *Badanie równań całkowych mocno-osobliwych metodą punktu niezmienniczego*, Biuletyn W. A. T. 18 (1955), p. 3-85.

[4] D. Przeworska-Rolewicz, *Sur l'application de la méthode des approximations successives à une équation intégrale à forte singularité*, Ann. Polon. Math. 6 (1959), p. 161-170.

[5] — *Sur les systèmes d'équations intégrales singulières pour les lignes fermées*, Studia Math. 18 (1959), p. 247-268.

Reçu par la Rédaction le 5. 3. 1959