THÉORÈME 16. *Supposons que les fonctions $r(X)$, $h(X)$ et $g(t)$ satisfassent aux hypothèses du théorème 14 et à la condition (42).*

Si le système autonome (52) n'a qu'un seul point singulier $X = \Theta$ et s'il satisfait à l'hypothèse de l'unicité des solutions, pour toute solution $X(t)$ du système (43), définie dans un intervalle $(t_0, +\infty)$, on a

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = \Theta \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\infty} X'(t) = \Theta .$$

Travaux cités

[1] H.A. Antosiewicz, *On non linear differential equations of the second order with integrable forcing term*, J. London Math. Soc. 30 (1955), p. 64-67.

[2] R. Bellman, *Stability theory of differential equations*, New York 1953.

[3] B. Manfredi, *Sulla stabilità del moto di sistemi a più gradi di libertà in condizioni non lineari*, Boll. Un. Mat. Ital., Serie III, Anno XI (1956), p. 64-71.

[4] L. Markus, *Asymptotically autonomous differential systems*, Contributions to the theory of non-linear oscillations, Vol. III (1956), p. 17-29.

[5] Z. Opial, *Sur une équation différentielle non linéaire du second ordre*, Ann. Polon. Math. 8 (1960), p. 65-69.

[6] — *Sur la dépendance des solutions d'un système d'équations différentielles de leurs seconds membres. Application aux systèmes presque autonomes*, Ann. Polon. Math. 8 (1960), p. 75-89.

[7] P. Santoro, *Un criterio di limitatezza in futuro delle soluzioni di une equazione differenziale non lineare*, Boll. Un. Mat. Ital., Serie III, Anno XI (1956), p. 432.

[8] G. Sestini, *Criterio di stabilità in un problema di Meccanica non lineare*, Rivista di Mat. Univ. Parma 2 (1951), p. 303-314.

[9] — *Criterio di stabilità in un problema non lineare di meccanica dei sistemi a più gradi di libertà*, Rivista di Mat. Univ. Parma 5 (1954), p. 227-232.

[10] T. Ważewski, *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Ann. Soc. Pol. Math. 23 (1950), p. 112-166.

Reçu par la Rédaction le 11. 3. 1959

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VIII (1960)

Propriétés d'une intégrale de l'équation parabolique dans un domaine non cylindrique

par A. PISKOREK (Warszawa)

1. Introduction. On désigne par (X, t) les points de l'espace-temps, $X = (x_1, \ldots, x_n)$ étant un point variable de l'espace euclidien $E^{(n)}$ à n $(n \geqslant 2)$ dimensions, t — la coordonnée du temps.

Dans cet espace-temps nous considérons pour $t \geqslant 0$ un domaine D à $n+1$ dimensions illimité dans la direction de l'axe du temps t (voir [3]).

La frontière du domaine D est composée du domaine borné Ω_0 à n dimensions, qui est contenu dans le plan $t = 0$, et de la surface s à n dimensions (c'est-à-dire une variété à n dimensions dans cet espace-temps); (X, t), (Y, τ), ... désignent les points du domaine D, et (P, t), (Q, τ), ... — les points de la surface s. Pour abréger nous désignerons le point (P, t) (resp. (Q, τ)) par P_t (resp. Q_τ).

Pour un t_0 fixé nous identifions les points (X, t_0) aux points X. Nous désignons la distance de deux points X, Y par $|XY|$.

Nous appelons D_t un domaine borné, partiel du domaine D, situé entre les plans $t = 0$ et $t = \text{const}$. Nous désignons par Ω_t un domaine borné à n dimensions, situé dans le plan $t = \text{const}$, qui est une portion de la frontière du domaine D_t.

Nous appelons s_t la portion fermée de la surface s, située entre les plans $t = 0$ et $t = \text{const}$.

Enfin, désignons par S_t la variété à $n-1$ dimensions, formée par l'intersection de la surface s et du plan $t = \text{const}$.

Soit T une constante positive, arbitraire, finie. Considérons le domaine D_T et supposons que la surface s_T possède, suivant la terminologie de J. Hadamard, une orientation du temps (voir [3]) relative à l'équation aux dérivées partielles du type parabolique:

$$(1) \quad H[u(X,t)] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k(X,t)\frac{\partial u}{\partial x_k} + c(X,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

où les coefficients $a_{ij}(X, t)$, $b_k(X, t)$, $c(X, t)$ sont continus dans le produit cartésien $\Omega\times\langle 0, T\rangle$, contenant le domaine D_T dans son intérieur, et vérifient la condition de Hölder:

$$
\begin{aligned}
&|a_{ij}(X,t)-a_{ij}(Y,\tau)| \leqslant \mathrm{const}(|XY|^{\beta}+|t-\tau|^{\beta'}),\\
(2)\qquad &|b_k(X,t)-b_k(X,t)| \leqslant \mathrm{const}\,|XY|^{\beta} \quad (i,j,k=1,\ldots,n),\\
&|c(X,t)-c(Y,t)| \leqslant \mathrm{const}\,|XY|^{\beta} \quad (0<\beta\leqslant 1;\ 0<\beta'\leqslant 1).
\end{aligned}
$$

À l'aide de la solution fondamentale (voir [1]) de l'équation (1) on peut définir les intégrales de cette équation (voir [2]), qu'on appelle potentiels généralisés relativement à cette équation, et qui sont analogues aux potentiels relatifs à l'équation du type elliptique.

Récemment W. Pogorzelski (voir [1], [2]) a étudié plusieurs propriétés de ces intégrales dans le domaine cylindrique $\Omega\times\langle 0, T\rangle$.

Dans ce travail nous démontrerons quelques propriétés d'une intégrale dans le domaine non cylindrique D_T. On appelle cette intégrale potentiel généralisé de simple couche relatif à l'équation parabolique (1).

2. Propriétés du potentiel de simple couche. Admettons que la surface s_T vérifie les conditions suivantes, dites conditions de Liapounoff:

I. Il existe un plan tangent en tout point de la surface s_T.

II. L'angle (N_{P_t}, N_{Q_τ}) entre deux normales aux points arbitraires P_t, Q_τ de la surface s_T vérifie l'inégalité

$$(N_{P_t}, N_{Q_\tau}) \leqslant \mathrm{const}(|PQ|^{a}+|t-\tau|^{a}),$$

a étant une constante positive, non supérieure à l'unité.

III. Il existe un nombre positif d tel que la sphère K de centre au point arbitraire P_t de la surface s_T et de rayon d, découpe une portion s_T^K de cette surface, située à l'intérieur de la sphère K, dont la projection orthogonale sur le plan tangent au point P_t est un ensemble de points qui correspondent dans cette projection d'une façon biunivoque aux points de la portion s_T^K.

Définition. Nous appelons *potentiel de simple couche*, relatif à l'équation parabolique (1), l'intégrale de surface s_T suivante(1):

$$U(X,t) = \mathop{\mathsf{SS}}_{s_t} \Gamma(X,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,ds_{Q_\tau} \tag{3}$$

$$= \int_0^t \iint_{S_\tau} \Gamma(X,t;Q,\tau)\frac{\varphi(Q,\tau)}{\sin(N_{Q_\tau},t)}\,dS_Q\,d\tau,$$

(1) On désigne par SS, suivant la notation de J. Hadamard, l'intégrale de surface à n dimensions dans l'espace-temps à $n+1$ dimensions. Nous conservons le signe d'intégrale double pour l'intégrale de surface à $n-1$ dimensions dans l'espace euclidien $E^{(n)}$ à n dimensions.

où: $\Gamma(X,t;Q,\tau)$ est la solution fondamentale de l'équation (1); $\varphi(Q,\tau)$ est une fonction, dite densité de simple couche, définie sur la surface s_T, où elle est bornée et intégrable; ds_{Q_τ} désigne l'élément d'aire au point Q_τ de la surface s_T; dS_Q — l'élément d'aire au point Q de la variété S_τ; (N_{Q_τ}, t) — l'angle que fait avec l'axe t la normale intérieure N_{Q_τ} à la surface s_T au point Q_τ.

La fonction (3) vérifie l'équation parabolique (1) en tout point non situé sur la surface s_T. On peut aussi définir la valeur de la fonction (3) en tout point P_t de la surface s_T par l'intégrale singulière:

$$U(P,t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{t-\varepsilon}\iint_{S_\tau}\Gamma(P,t;Q,\tau)\frac{\varphi(Q,\tau)}{\sin(N_{Q_\tau},t)}\,dS_Q\,d\tau, \tag{4}$$

puisque la solution fondamentale $\Gamma(P,t;Q,\tau)$ admet une singularité pour $(Q,\tau)=(P,t)$.

Pour démontrer l'existence de cette intégrale, considérons au point $P_t=(P,t)$ de la surface s_T le système de $n+1$ axes rectangulaires $P\xi_1,\ldots,\xi_n,t$ (admettant le point $P_t=(P,t)$ comme origine). L'axe $P\xi_n$ de ce système est la normale intérieure n_P à le variété S_t au point P, et les axes $P\xi_1, P\xi_2, \ldots, P\xi_{n-1}$ sont situés dans le plan tangent à cette variété S_t au point P.

D'après les conditions de Liapounoff (voir p. 126, I, II, III) il existe une portion suffisamment petite de cette surface s_T contenant le point $P_t=(P,t)$ telle que la projection $Q'_\tau=(Q',\tau)$ de chaque point $Q_\tau=(Q,\tau)$ de cette portion sur le plan tangent au point $P_t=(P,t)$ ne correspond qu'à un point $Q_\tau=(Q,\tau)$ de cette portion, et que la coordonnée q_n du point $Q_\tau=(Q,\tau)$ est une fonction des coordonnées $q_1,\ldots,q_{n-1}$ et τ, c'est-à-dire

$$q_n = g(q_1,\ldots,q_{n-1},\tau), \tag{5}$$

où la fonction $g(\ldots)$ possède des dérivées premières remplissant la condition de Hölder.

Pour les points (Q,τ) d'une portion suffisamment petite de la surface s_T, contenant le point (P,t), on peut déduire, d'après la formule (5), l'égalité

$$
\begin{aligned}
|PQ|^2 = |PQ'|^2\left(1+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial g(Q^*,\tau^*)}{\partial q_i}a_i\right)^2\right) -\\
-2|PQ'|\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial g(Q^*,\tau^*)}{\partial q_i}a_i\right)\frac{\partial g(Q^*,\tau^*)}{\partial\tau}(t-\tau)+\left(\frac{\partial g(Q^*,\tau^*)}{\partial\tau}\right)^2(t-\tau)^2,
\end{aligned} \tag{6}
$$

où: Q' est la projection du point Q sur le plan tangent au point P de la variété S_t; a_i — les cosinus directeurs du vecteur $\overrightarrow{PQ'}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$; Q^* — un point à l'intérieur du segment PQ'; τ^* — une valeur du temps à l'intérieur de l'intervalle (τ, t).

D'après la formule (6), en tenant compte de la limitation connue (voir [1], [2]) à singularités séparées de la solution fondamentale $\Gamma(P, t; Q, \tau)$, et en raison de l'orientation du temps de la surface s_T, on obtient une inégalité de la forme

$$(7)\qquad \left|\Gamma(P, t; Q, \tau)\frac{\varphi(Q, \tau)}{\sin(N_{Q_\tau}, t)}\right| \leqslant \frac{\text{const}\, M_\varphi}{(t-\tau)^\mu |PQ'|^{n-2\mu}},$$

où $M_\varphi = \sup_{(Q,\tau)\in s_T} |\varphi(Q, \tau)|$, μ = constante positive, arbitraire; const = constante positive, qui ne dépend que de la surface s_T, du domaine D_T, des coefficients de l'équation (1) et de la constante μ.

En choisissant la constante positive μ arbitrairement à l'intérieur de l'intervalle $(\frac{1}{2}, 1)$ nous voyons que la fonction sous le signe de l'intégrale singulière (4) admet une singularité faible, si $\tau \to t$, $Q \to P$, et par conséquent cette intégrale est absolument et uniformément convergente. On peut démontrer par la méthode classique de la théorie du potentiel que le potentiel (3) vérifie la relation suivante:

$$(8)\qquad \lim_{X\to P} U(X, t) = U(P, t).$$

D'après l'inégalité (7), le potentiel (3) admet la limitation

$$(9)\qquad |U(X, t)| \leqslant \text{const}\, M_\varphi t^{1-\mu}.$$

Cette inégalité nous apprend que le potentiel (3) tend uniformément vers zéro, si $t \to 0$.

Remarquons encore que le potentiel (3) est deux fois dérivable en tout point non situé sur la surface s_T, sous la seule supposition que la fonction $\varphi(Q, \tau)$ soit bornée et intégrable.

Les dérivées premières spatiales de la solution fondamentale $\Gamma(P, t; Q, \tau)$ admettent une limitation à singularité forte relativement à l'intégrale de surface. Donc nous ne pouvons pas affirmer, même si la fonction $\varphi(Q, \tau)$ était continue, que les dérivées du potentiel (3) ont des valeurs limites, si le point intérieur (X, t) tend vers un point (P, t) de la surface s_T. Cependant une certaine combinaison linéaire de ces dérivées, dite — d'après J. d'Adhémar — dérivée transversale de la fonction $U(X, t)$ relativement au point $P_t = (P, t)$ de la surface s_T, donnée par la relation

$$(10)\qquad \frac{dU(X, t)}{dT_{P_t}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X, t)\frac{\partial U(X, t)}{\partial x_i}\cos(N_{P_t}, x_j),$$

a une limite déterminée, si $X \to P$; (N_{P_t}, x_j) désigne l'angle, que fait avec l'axe x_j la normale intérieure N_{P_t} à la surface s_T au point (P, t).

Nous pouvons écrire la relation (10)

$$(11)\qquad \frac{dU(X, t)}{dT_{P_t}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X, t)\frac{\partial U(X, t)}{\partial x_i}\cos(n_P, x_j)\sin(N_{P_t}, t)$$

et désigner pour abréger

$$(12)\qquad \frac{dU(X, t)}{dT_{P_t}} = \frac{dU(X, t)}{d\nu_P}\sin(N_{P_t}, t).$$

D'après la relation (10) et les notations (11), (12) on peut exprimer la dérivée transversale du potentiel (3) sous la forme suivante:

$$(13)\qquad \frac{dU(X, t)}{dT_{P_t}} = \int_0^t \iint_{S_\tau} \frac{d\Gamma(X, t; Q, \tau)}{d\nu_P}\cdot\frac{\varphi(Q, \tau)}{\sin(N_{Q_\tau}, t)}\, dS_Q\, d\tau\cdot\sin(N_{P_t}, t).$$

Écrivons la dérivée transversale de la solution fondamentale $\Gamma(X, t; Q, \tau)$ sous forme (voir [2]) d'une somme:

$$(14)\qquad \frac{d\Gamma(X, t; Q, \tau)}{dT_{P_t}} = \left\{-\frac{|XQ|\cos(\overrightarrow{QX}, n_P)\exp\left[-\dfrac{\Theta^{(Q,\tau)}(X, Q)}{4(t-\tau)}\right]}{2(t-\tau)^{n/2+1}} + \tilde{F}(X, t; Q, \tau)\right\}\sin(N_{P_t}, t),$$

où $\Theta^{(Q,\tau)}(X, Q) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(Q, \tau)(x_i - q_i)(x_j - q_j)$, $a^{ij}(Q, \tau)$ désigne les éléments de la matrice inverse de la matrice $[a_{ij}(Q, \tau)]$.

D'après cette formule, nous pouvons écrire la dérivée transversale du potentiel $U(X, t)$ sous forme d'une somme d'intégrales:

$$(15)\qquad \frac{dU(X, t)}{dT_{P_t}} = J(X, t) + \tilde{J}(X, t),$$

où

$$(15^1)\qquad J(X, t) = -\int_0^t \iint_{S_\tau} \frac{|XQ|\cos(\overrightarrow{QX}, n_P)\exp[-\Theta^{(Q,\tau)}(X, Q)/4(t-\tau)]}{2(t-\tau)^{n/2+1}} \times \frac{\varphi(Q, \tau)}{\sin(N_{Q_\tau}, t)}\, dS_Q\, d\tau\cdot\sin(N_{P_t}, t),$$

$$(15^2)\qquad \tilde{J}(X, t) = \int_0^t \iint_{S_\tau} \tilde{F}(X, t; Q, \tau)\frac{\varphi(Q, \tau)}{\sin(N_{Q_\tau}, t)}\, dS_Q\, d\tau\cdot\sin(N_{P_t}, t).$$

On peut aussi définir la valeur de l'intégrale (13) en tout point (P, t) de la surface s_T par l'intégrale singulière:

$$(16)\qquad V(P,t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{t-\varepsilon}\iint_{S_\tau}\frac{d\Gamma(P,t;Q,\tau)}{d\nu_P}\cdot\frac{\varphi(Q,\tau)}{\sin(N_{Q_\tau},t)}\,dS_Q\,d\tau\cdot\sin(N_{P_t},t).$$

Décomposons cette intégrale singulière, d'après la formule (14), en somme de deux intégrales:

$$(17)\qquad V(P,t) = v(P,t)+\tilde{v}(P,t),$$

où

$$(17^1)\qquad v(P,t) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{t-\varepsilon}\iint_{S_\tau}\frac{|PQ|\cos(\overrightarrow{QP},n_P)\exp[-\Theta^{(Q,\tau)}(P,Q)/4(t-\tau)]}{2(t-\tau)^{n/2+1}}\times$$

$$\times\frac{\varphi(Q,\tau)}{\sin(N_{Q_\tau},t)}\,dS_Q\,d\tau\cdot\sin(N_{P_t},t),$$

$$(17^2)\qquad \tilde{v}(P,t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{t-\varepsilon}\iint_{S_\tau}\tilde{F}(P,t;Q,\tau)\frac{\varphi(Q,\tau)}{\sin(N_{Q_\tau},t)}\,dS_Q\,d\tau\cdot\sin(N_{P_t},t).$$

Passons à l'étude de intégrale (13). Dans ce but nous démontrerons d'abord les trois lemmes suivants:

LEMME 1. *Si la densité $\varphi(Q,\tau)$ est une fonction bornée et intégrable sur la surface s_T, alors l'intégrale singulière (17^2) est absolument et uniformément convergente et la fonction (16^2) tend uniformément vers une limite déterminée par cette intégrale singulière:*

$$(18)\qquad \lim_{X\to P}\tilde{J}(X,t) = \tilde{v}(P,t),$$

si le point (X, t) tend vers le point (P, t).

Démonstration. D'après les travaux [1], [2] et la formule (6), la fonction $\tilde{F}(P,t;Q,\tau)$ vérifie l'inégalité

$$(19)\qquad |\tilde{F}(P,t;Q,\tau)| \leqslant \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu}|PQ'|^{n+1-2\mu-\beta_0}},$$

où $\beta_0 = \min(\beta, 2\beta')$.

Donc, en fixant l'exposant μ à l'intérieur de l'intervalle $(1-\frac{1}{2}\beta_0, 1)$, nous pouvons établir par un raisonnement classique que l'intégrale singulière (17^2) est absolument et uniformément convergente, en outre la fonction (16^2) tend uniformément, vers la limite déterminée par cette intégrale singulière, c'est-à-dire vérifie l'égalité (18).

D'après l'inégalité (19), la fonction (16^2) admet la limitation

$$(20)\qquad |\tilde{J}(X,t)| \leqslant \text{const}\, M_\varphi t^{1-\mu}.$$

Donc cette fonction tend vers zéro, si $t\to 0$.

LEMME 2. *Si la densité $\varphi(Q,\tau)$ est une fonction bornée et intégrable sur la surface s_T, satisfaisant aux conditions de Liapounoff (voir p. 126, I, II, III), l'intégrale singulière (17^1) est absolument et uniformément convergente.*

Démonstration. Désignons par π_t le plan tangent au point P_t à la surface s_T, et par Π_t — la variété à $n-1$ dimensions, formée par l'intersection des plans $t = \text{const}$ et π_t. Les axes $P\xi_1, P\xi_2, \ldots, P\xi_{n-1}$ du système de coordonnées $P\xi_1, \ldots, \xi_n, t$ (voir p. 127) sont contenus dans cette variété Π_t.

Considérons dans le plan $t = \text{const}$ (c'est-à-dire dans l'espace euclidien $E^{(n)}$ à n dimensions) un cylindre $W(P,\varrho_0)$, d'axe $P\xi_n$ et de rayon ϱ_0, qui découpe une portion Σ_t^0 de la variété S_t au voisinage du point P; soit en outre une sphère Π_t^0 à $n-1$ dimensions — projection de la portion Σ_t^0 — de la variété Π_t. Ce cylindre $W(P,\varrho_0)$ découpe dans le plan $\tau = \text{const}$ une portion Σ_τ^0 de la variété S_τ et une sphère Π_τ^0 de la variété Π_τ.

Appelons bande σ_t^0 de la surface s_T l'ensemble de tous les points (Q,τ) qui satisfont à la condition

$$(21)\qquad Q\in\Sigma_\tau^0;\quad 0\leqslant\tau\leqslant t.$$

Pareillement appelons bande $\Pi_\tau^0\times\langle 0,t\rangle$ du plan $P\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},t$ l'ensemble de tous les points (Q',τ) qui satisfont à la condition

$$(22)\qquad Q'\in\Pi_t^0,\quad 0\leqslant\tau\leqslant t.$$

Remarquons que la bande $\Pi_t^0\times\langle 0,t\rangle$ est la projection de la bande σ_t^0 sur le plan $P\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},t$. Remarquons ensuite que, d'après les conditions de Liapounoff, nous pouvons toujours fixer un rayon ϱ_0 suffisamment petit, par exemple $\varrho_0 = d/3$, pour que les points de la sphère Π_t^0 correspondent, d'une façon biunivoque, aux points de la portion Σ_t^0.

Décomposons l'intégrale singulière (17^1) en deux parties

$$(23)\qquad v(P,t) = v^{\sigma_t^0}(P,t)+v^{s_t-\sigma_t^0}(P,t)$$

étendues à la bande σ_t^0 et à la surface extérieure $s_t-\sigma_t^0$. Le point (P,t) étant extérieur au domaine d'intégration $s_t-\sigma_t^0$, le second terme de la somme est continu au point (P,t).

Pour étudier la première des intégrales (23), remarquons que tout point Q de la portion Σ_τ^0 (la différence $t-\tau$ étant suffisamment petite) satisfait aux inégalités connues de Liapounoff:

$$(24)\qquad |Q\tilde{Q}| \leqslant \mathrm{const}\,|\tilde{P}Q|^{1+a}, \quad |\tilde{P}Q| \leqslant 2|\tilde{P}\tilde{Q}|, \quad \cos(n_{\tilde{P}}, n_Q) \geqslant \tfrac{1}{2}$$

par rapport au système d'axes rectangulaires $\tilde{P}\eta_1, \ldots, \eta_n$, l'axe $\tilde{P}\eta_n$ étant la normale intérieure à la variété S_τ au point $\tilde{P}$, qui est intersection de l'axe $P\xi_n$ et de cette variété S_τ. Le point $\tilde{Q}$ est la projection orthogonale du point Q sur le plan $\tilde{P}\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ (tangent au point $\tilde{P}$ à la variété S_τ). Nous avons donc l'inégalité

$$(25)\qquad \big||PQ|\cos(\overrightarrow{QP}, n_P)\big| \leqslant |P\tilde{P}| + |Q\tilde{Q}|\cos(n_P, n_{\tilde{P}}) + |\tilde{P}\tilde{Q}|\sin(n_P, n_{\tilde{P}}).$$

En profitant de la formule (6) et des inégalités

$$(26)\qquad |\tilde{P}Q| \leqslant |\tilde{P}P| + |PQ|, \quad \sin(n_P, n_{\tilde{P}}) \leqslant \mathrm{const}(t-\tau)^a,$$

nous pouvons écrire

$$(27)\qquad \big||PQ|\cos(\overrightarrow{QP}, n_P)\big| \leqslant \mathrm{const}\{(t-\tau)[(1+2|PQ|^a)+2^2(t-\tau)^a] + |PQ|(t-\tau) + |PQ|^{1+a}\}.$$

D'après la formule (6) et d'après l'inégalité (27), la fonction sous le signe de l'intégrale singulière (17^1) vérifie l'inégalité

$$(28)\qquad \left| -\frac{PQ\cos(\overrightarrow{QP}, n_P)\exp[-\Theta^{(Q,\tau)}(P,Q)/4(t-\tau)]}{2(t-\tau)^{n/2+1}} \cdot \frac{\varphi(Q,\tau)}{\sin(N_{Q_\tau}, t)} \right| \leqslant \frac{\mathrm{const}\, M_\varphi}{(t-\tau)^\mu |PQ'|^{n+1-2\mu-a}}.$$

Donc, en fixant l'exposant μ à l'intérieur de l'intervalle $(1-\frac{1}{2}a, 1)$, nous pouvons affirmer que l'intégrale singulière $v^{\sigma_t^0}(P,t)$ est absolument et uniformément convergente. On peut démontrer, par un raisonnement classique, que l'intégrale singulière (17^1) admet la limitation

$$(29)\qquad |U(P,t)| \leqslant \mathrm{const}\, M_\varphi t^{1-\mu}.$$

D'après cette inégalité, et d'après l'inégalité (20), la fonction $V(P,t)$ tend uniformément vers zéro, si $t\to 0$.

Lemme 3. *Si la densité $\varphi(Q,\tau)$ est une fonction continue et bornée sur la surface s_T, satisfaisant aux conditions de Liapounoff, la fonction (15^1) tend uniformément vers la limite*

$$(30)\qquad \lim_{X\to P} J(X,t) = v(P,t) - \frac{(2\sqrt{\pi})^n\varphi(P,t)}{2\sqrt{\det[a^{ij}(P,t)]}}$$

si le point X tend vers un point P de la variété S_t, où $a^{ij}(P,t)$ désignent les éléments de la matrice inverse de la matrice $[a_{ij}(P,t)]$ (voir p. 125, *équation* (1)*).*

Démonstration. Considérons l'intégrale suivante:

$$(31)\qquad J^*(X,t) = -\int_0^t \iint_{\Pi_t^0} \frac{|XQ'|\cos(\overrightarrow{Q'X}, n_P)\exp[-\Theta^{(Q',\tau)}(X,Q')/4(t-\tau)]}{2(t-\tau)^{n/2+1}}\varphi(P,t)\,d\Pi_{Q'}\,d\tau,$$

étendue à la bande $\Pi_t^0\times\langle 0,t\rangle$ du plan $P\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, t$.

D'après le travail [2], cette intégrale possède la propriété limite suivante:

$$(32)\qquad \lim_{X\to P} J^*(X,t) = -\frac{(2\sqrt{\pi})^n\varphi(P,t)}{2\sqrt{\det[a^{ij}(P,t)]}}.$$

Pour démontrer la relation (30), étudions la différence

$$(33)\qquad R(X,t) = J(X,t) - J^*(X,t).$$

Remarquons que, d'après le lemme 2, la fonction $R(X,t)$ vérifie l'égalité

$$(34)\qquad R(P,t) = v(P,t)$$

sur la surface s_T.

Nous démontrerons maintenant que, pour un $t>0$ fixé, la différence (33) est continue au point (P,t) de la surface s_T, c'est-à-dire que l'on a

$$(35)\qquad \lim_{X\to P} R(X,t) = R(P,t).$$

Supposons d'abord que le point X soit situé sur la normale intérieure n_P au point arbitraire P de la variété S_t et considérons un système d'axes rectangulaires $P\xi_1, \ldots, \xi_n, t$, où l'axe $P\xi_n$ est la normale n_P.

Soit un cylindre $W(P,\varrho_1)$, d'axe $P\xi_n$ et de rayon $\varrho_1<\varrho_0$, qui découpe une portion Σ_t^1 de la variété S_t au voisinage du point P, et une portion Σ_τ^1 de la variété S_τ.

Ce cylindre $W(P,\varrho_1)$ découpe dans le plan tangent au point P une sphère Π_t^1 à $n-1$ dimensions — projection de la portion Σ_t^1.

Nous appelons bande σ_t^1 de la surface s_T l'ensemble de tous les points (Q,τ) qui satisfont à la condition

$$(36)\qquad Q\in\Sigma_\tau^1, \quad 0\leqslant\tau\leqslant t.$$

Remarquons que la bande $\Pi_t^1\times\langle 0,t\rangle$ est la projection de la bande σ_t^1 sur le plan $P\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, t$.

Décomposons l'intégrale $J(X,t)$ en deux parties étendues à la bande σ_t^1 et à la surface extérieure $s_t-\sigma_t^1$, en outre décomposons l'intégrale $J^*(X,t)$ en deux parties étendues à la bande $\Pi_t^1\times\langle 0,t\rangle$ et aux bandes extérieures $(\Pi_t^0-\Pi_t^1)\times\langle 0,t\rangle$.

Nous pouvons alors écrire la différence (33) sous forme d'une somme d'intégrales

$$
\begin{aligned}
(37)\quad & R(X,t) \\
&= I_1(X,t)+I_2(X,t)+I_3(X,t)+I_4(X,t) \\
&= -\int_0^t\iint_{\Pi_t^1}\Big\{[|XQ|\cos(\overrightarrow{QX},n_P)-|XQ'|\cos(\overrightarrow{Q'X},n_P)]\times \\
&\qquad\times\frac{\exp[-\Theta^{(Q,\tau)}(X,Q)/4(t-\tau)]}{2(t-\tau)^{n/2+1}}+|XQ'|\cos(\overrightarrow{Q'X},n_P)\times \\
&\qquad\times\frac{\exp[-\Theta^{(Q,\tau)}(X,Q)/4(t-\tau)]-\exp[-\Theta^{(Q',\tau)}(X,Q')/4(t-\tau)]}{2(t-\tau)^{n/2+1}}\Big\}\times \\
&\qquad\times\frac{\varphi(Q,\tau)}{\sin(N_{Q_\tau},t)\cos(n_Q,n_P)}\,d\Pi_{Q'}\,d\tau\sin(N_{P_t},t)- \\
&\quad-\int_0^t\iint_{\Pi_t^1}\frac{|XQ'|\cos(\overrightarrow{Q'X},n_P)\exp[-\Theta^{(Q',\tau)}(X,Q')/4(t-\tau)]}{2(t-\tau)^{n/2+1}}\times \\
&\qquad\times\left[\frac{\varphi(Q,\tau)}{\sin(N_{Q_\tau},t)\cos(n_Q,n_P)}-\frac{\varphi(P,t)}{\sin(N_{P_t},t)}\right]d\Pi_Q\,d\tau\sin(N_{P_t},t)- \\
&\quad-\int_0^t\iint_{S_\tau-\Sigma_\tau^1}\frac{|XQ|\cos(\overrightarrow{QX},n_P)\exp[-\Theta^{(Q,\tau)}(X,Q)/4(t-\tau)]}{2(t-\tau)^{n/2+1}}\times \\
&\qquad\times\frac{\varphi(Q,\tau)}{\sin(N_{Q_\tau},t)}\,dS_Q\,d\tau\sin(N_{P_t},t)- \\
&\quad-\int_0^t\iint_{\Pi_t^0-\Pi_t^1}\frac{|XQ'|\cos(\overrightarrow{Q'X},n_P)\exp[-\Theta^{(Q',\tau)}(X,Q')/4(t-\tau)]}{2(t-\tau)^{n/2+1}}\,\varphi(P,t)\,d\Pi_{Q'}\,d\tau,
\end{aligned}
$$

où Q est un point de la variété S_τ, Q' est la projection du point Q sur le plan tangent au point P de la variété S_t.

Nous désignons par $f(X,t;Q,\tau)$ la fonction sous le signe de la première intégrale dans la somme (37). Cette fonction vérifie l'inégalité

$$(38)\qquad |f(X,t;Q,\tau)|\leqslant\frac{\text{const}\,M_\varphi}{(t-\tau)^\mu|PQ'|^{n+1-2\mu-\alpha\beta}}.$$

Les singularités de la limitation (38) sont faibles relativement à cette intégrale, μ étant choisi à l'intérieur de l'intérvalle $(1-\frac{1}{2}\alpha\beta, 1)$.

Donc cette intégrale tend uniformément vers zéro, si $\varrho_1\to 0$, c'est-à-dire

$$(39)\qquad \lim_{\varrho_1\to 0} I_1(X,t)=0,$$

quelle que soit la position du point X sur la normale n_P.

Remarquons que la deuxième intégrale de la somme (37) est du type (31), et par conséquent, elle possède la propriété limite

$$(40)\qquad \lim_{X\to P} I_2(X,t)=0,$$

puisque la différence sous le signe de cette intégrale est continue sur la bande $\Pi_t^1\times\langle 0,t\rangle$ et cette différence est nulle pour $(Q,\tau)=(P,t)$.

La troisième et la quatrième des intégrales de la somme (37) sont continues au point (P,t) de la surface s_T, c'est-à-dire que l'on a

$$(41)\qquad \lim_{X\to P} I_3(X,t)=I_3(P,t),$$

$$(42)\qquad \lim_{X\to P} I_4(X,t)=0.$$

Étudions donc la différence

$$
\begin{aligned}
(43)\quad & R(X,t)-R(P,t) \\
&= I_1(X,t)-I_1(P,t)+I_2(X,t)-I_3(X,t)-I_3(P,t)+I_4(X,t),
\end{aligned}
$$

si $X\to P$.

Remarquons que, d'après la relation (39), les valeurs de la première intégrale sont arbitrairement petites, si l'on prend une valeur $\varrho_1\neq 0$ suffisamment petite.

Remarquons ensuite que, d'après les relations (40), (41) et (42), les termes de la somme (43) $I_2(X,t)$, $I_3(X,t)-I_3(P,t)$, et $I_4(X,t)$ sont arbitrairement petits, si $|XP|$ est suffisamment petite.

En réunissant les résultats obtenus nous arrivons à la conclusion (30), c'est-à-dire

$$(44)\qquad |R(X,t)-R(P,t)|<\varepsilon,\quad \text{si}\quad |XP|<\eta(\varepsilon)$$

dans le cas où le point X est situé sur la normale au point P.

En appliquant le raisonnement de W. Pogorzelski (voir [2], démonstration du théorème 1) on peut démontrer l'égalité (30) dans le cas où le point X tend vers un point P sur la variété S_t le long d'un arc L situé à l'intérieur du domaine Ω_t.

D'après les lemmes 1, 2, 3 nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Si la densité $\varphi(Q, \tau)$ est une fonction continue et bornée sur la surface s_T, satisfaisant aux conditions de Liapounoff, la dérivée transversale* (13) *du potentiel de simple couche au point intérieur X du domaine Ω_t tend uniformément vers la limite*

$$\lim_{X\to P} \frac{dU(X, t)}{dT_{P_t}} = V(P, t) - \frac{(2\sqrt{\pi})^n \varphi(P, t)}{2\sqrt{\det[a^{ij}(P, t)]}} \tag{45}$$

si le point X tend vers le point P de la variété S_t pour $t > 0$.

Nous avons encore les propriétés suivantes:

THÉORÈME 2. *Si la densité $\varphi(Q, \tau)$ est une fonction bornée et intégrable sur la surface s_T, satisfaisant aux conditions de Liapounoff, le potentiel* (3) *de simple couche vérifie, par rapport aux variables spatiales dans le domaine fermé D_T, la condition de Hölder:*

$$|U(X, t) - U(\bar{X}, t)| \leqslant \text{const}\, M_\varphi |X\bar{X}|^\vartheta, \tag{46}$$

où l'exposant ϑ est un nombre positif arbitraire inférieur à l'unité.

Démonstration. Décomposons le potentiel (3) de simple couche en deux parties:

$$U(X, t) = \int_0^{t-\delta} \iint_{S_\tau} \Gamma(X, t; Q, \tau) \frac{\varphi(Q, \tau)}{\sin(N_{Q_\tau}, t)} dS_Q d\tau + \int_{t-\delta}^{t} \iint_{S_\tau} \Gamma(X, t; Q, \tau) \frac{\varphi(Q, \tau)}{\sin(N_{Q_\tau}, t)} dS_Q d\tau, \tag{47}$$

où δ est un nombre positif assez petit pour que les inégalités (24) soient vraies, si $t - \tau < \delta$.

Le premier terme de la somme (47) est indéfiniment dérivable dans le domaine fermé D_T, donc le premier terme vérifie la contidion de Lipschitz dans ce domaine.

On peut démontrer, comme le fait W. Pogorzelski (voir [2], démonstration du théorème 2), que le second terme de la somme (47) vérifie la condition de Hölder de la forme (46).

En suivant aussi W. Pogorzelski (voir [2], démonstrations des théorèmes 3 et 4), on démontre encore les théorèmes suivants:

THÉORÈME 3. *Si la densité $\varphi(Q, \tau)$ est une fonction bornée et intégrable sur la surface s_T, satisfaisant aux conditions de Liapounoff, le potentiel* (3) *de simple couche vérifie, par rapport à la variable t dans le domaine fermé D_T, la condition de Hölder:*

$$|U(X, t) - U(X, \bar{t})| \leqslant \text{const}\, M_\varphi |t - \bar{t}|^{\vartheta/2}, \tag{48}$$

où l'exposant ϑ est un nombre positif arbitraire inférieur à l'unité.

THÉORÈME 4. *Si la densité $\varphi(Q, \tau)$ est une fonction bornée et intégrable sur la surface s_T, satisfaisant aux conditions de Liapounoff, l'intégrale $V(P, t)$ est une fonction définie sur la surface s_T, qui vérifie la condition de Hölder:*

$$|V(P, t) - V(\bar{P}, \bar{t})| \leqslant \text{const}\, M_\varphi (|P\bar{P}|^{\vartheta a_0} + |t - \bar{t}|^{\vartheta' a_0/3}) \tag{49}$$

où $a_0 = \min(a, \beta, 2\beta')$, ϑ et ϑ' sont des nombres positifs arbitraires inférieurs à l'unité.

Travaux cités

[1] W. Pogorzelski, *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique*, Ricerche di Matematica 5, Napoli 1956, p. 25-57.

[2] — *Propriétés des intégrales de l'équation parabolique normale*, Ann. Polon. Math. 4 (1957), p. 61-92.

[3] M. Krzyżański, *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego I*, Warszawa 1957.

Reçu par la Rédaction le 27. 3. 1959