Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI constituent une continuation des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE (vol. I-XXV) fondées en 1921 par Stanisław Zaremba.

Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI publient, en langues des congrès internationaux, des travaux consacrés à l'Analyse Mathématique, la Géométrie et la Théorie des Nombres. Chaque volume paraît en 3 fascicules.

Les manuscrits dactylographiés sont à expédier à l'adresse:
Rédaction des ANNALES POLONICI MATHEMATICI
KRAKÓW (Pologne), ul. Solskiego 30.

Toute la correspondance concernant l'échange et l'administration est à expédier à l'adresse:
ANNALES POLONICI MATHEMATICI
WARSZAWA 10 (Pologne), ul. Śniadeckich 8.

Le prix de ce fascicule est 2 \$.
Les ANNALES sont à obtenir par l'intermédiaire de
ARS POLONA
WARSZAWA (Pologne), Krakowskie Przedmieście 7.

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VIII (1960)

Sur l'allure asymptotique des solutions de certaines équations différentielles de la mécanique non linéaire

par Z. Opial (Kraków)

Désignons par I la droite réelle et par E l'espace euclidien à n dimensions des variables $x_1, \ldots, x_n$. Dans toute la suite nous nous servirons de la notation vectorielle. Ainsi, nous écrirons X, $X(t)$, $X'(t)$ etc. au lieu de $(x_1, \ldots, x_n)$, $\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$, $\big(x_1'(t), \ldots, x_n'(t)\big)$ etc. et pour tout vecteur $X = (x_1, \ldots, x_n)$ nous désignerons par $|X|$ le nombre $\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$. Posons de plus $\Theta = (0, \ldots, 0)$.

Soit $f(t, X, Y) = \big(f_1(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)\big)$ une fonction définie et continue dans l'espace $F = I\times E\times E$, dont les valeurs appartiennent à l'espace E.

Considérons le système d'équations différentielles du second ordre:

$$x_i'' = f_i(t, x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n') \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ou dans le notation vectorielle

$$X'' = f(t, X, X'). \tag{1}$$

Dans le cas où la fonction $f(t, X, Y)$ ne dépend pas de la variable t on peut écrire

$$X'' = f(X, X'). \tag{2}$$

A côté du système (2) envisageons le système

$$X'' = f(X, X')+g(t), \tag{3}$$

où $g(t) = \big(g_1(t), \ldots, g_n(t)\big)$ est une fonction vectorielle qui satisfait dans l'intervalle $(0, +\infty)$ ou bien à la condition

$$\int_0^\infty |g(t)|\,dt < +\infty, \tag{4}$$

ou bien à l'inégalité

$$\int_0^\infty |dg(t)| < +\infty; \tag{5}$$

c'est-à-dire elle est ou bien absolument intégrable dans l'intervalle $(0, +\infty)$, ou bien à variation bornée dans le même intervalle.

Dans certaines hypothèses sur le second membre du système (2) et en supposant que la fonction continue $g(t)$ satisfait à la condition (4), H. Antosiewicz [1], B. Manfredi [3] et P. Santoro [7] ont démontré que toutes les solutions du système (3), ainsi que leurs dérivées du premier ordre, sont bornées dans tout l'intervalle $(0, +\infty)$. Dans d'autres hypothèses sur la fonction $f(X, Y)$ G. Sestini [8], [9] a établi qu'il en est de même si l'on remplace la condition (4) par l'inégalité (5). Enfin, dans le cas d'une seule équation du second ordre, en modifiant légèrement les hypothèses de H. Antosiewicz et P. Santoro, Z. Opial [5] a démontré que toutes les solutions de l'équation correspondante (3), ainsi que leurs dérivées du premier ordre, tendent vers zéro lorsque t croît indéfiniment.

Dans la présente note nous nous proposons de généraliser considérablement tous ces théorèmes. Nous commencerons par établir, dans la première partie, quelques propositions générales sur l'allure asymptotique des solutions d'un système d'équations différentielles du premier ordre et, dans la seconde, nous les appliquerons à l'étude de l'allure asymptotique des solutions des systèmes (1) et (3).

Première partie

1. Envisageons le système d'équations différentielles du premier ordre

(6) $$X' = F(t, X),$$

où la fonction $F(t, X) = \big(F_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_n(t, x_1, \ldots, x_n)\big)$ est définie et continue dans tout l'espace $K = I \times E$. Supposons qu'il existe pour le système (6) une fonction de Liapounoff, c'est-à-dire une fonction numérique $V(X) = V(x_1, \ldots, x_n)$, non négative et de classe C^1 dans tout l'espace E et telle que l'on ait pour tout point (t, X) de l'espace K:

(7) $$F(t, X) \cdot \operatorname{grad} V(X) = \frac{\partial V}{\partial x_1} F_1(t, X) + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} F_n(t, X) \leqslant 0.$$

Supposons de plus que la fonction $V(X)$ satisfasse à la condition

(8) $$\lim_{|X| \to \infty} V(X) = +\infty.$$

Il est facile de voir que dans ces hypothèses toute solution $X(t)$ du système (6), définie pour un t_0, est bornée dans tout l'intervalle $(t_0, +\infty)$. On a en effet, en raison de l'inégalité (7):

$$\frac{d}{dt} V\big(X(t)\big) = F(t, X) \cdot \operatorname{grad} V(X)\big|_{X=X(t)} \leqslant 0.$$

Il en résulte que pour tout $t \geqslant t_0$ on a $V\big(X(t)\big) \leqslant V\big(X(t_0)\big)$, ce qui

signifie, en vertu de l'hypothèse (8), que la fonction $|X(t)|$ est bornée dans l'intervalle $(t_0, +\infty)$.

A côté du système (6) envisageons le système

(9) $$X' = F(t, X) + G(t, X),$$

où $G(t, X) = \big(G_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, G_n(t, x_1, \ldots, x_n)\big)$ est une fonction définie et continue dans tout l'espace K.

THÉORÈME 1. *Soit $V(X)$ une fonction non négative de classe C^1 satisfaisant aux conditions* (7), (8) *et vérifiant l'inégalité*

(10) $$|G(t, X) \cdot \operatorname{grad} V(X)| \leqslant \varrho\big(t, V(X)\big),$$

où $\varrho(t, u)$ est une fonction continue, non négative, des variables t et $u \geqslant 0$. Si toutes les solutions de l'équation différentielle

(11) $$u' = \varrho(t, u)$$

sont bornées pour $t \geqslant 0$, toute solution $X(t)$ du système (9), *définie pour un $t_0 \geqslant 0$, est bornée dans l'intervalle $(t_0, +\infty)$.*

Démonstration. Soit $X(t)$ une solution du système (9) telle que $X(t_0) = X_0$ $(t_0 \geqslant 0)$. En vertu des inégalités (7) et (10) on a pour tout $t \geqslant t_0$:

$$\frac{d}{dt} V\big(X(t)\big) = \big(F(t, X) + G(t, X)\big) \cdot \operatorname{grad} V(X)\big|_{X=X(t)} \leqslant \varrho\Big(t, V\big(X(t)\big)\Big).$$

La fonction $u(t) = V\big(X(t)\big)$ satisfait donc pour tout $t \geqslant t_0$ à l'inégalité différentielle

$$u'(t) \leqslant \varrho\big(t, u(t)\big).$$

Il s'ensuit (voir p. ex. T. Ważewski [10]) que l'on a pour $t \geqslant t_0$: $u(t) \leqslant v(t)$, où $v(t)$ désigne l'intégrale supérieure à droite de l'équation différentielle (11), égale à $V(X_0)$ au point t_0. De notre hypothèse il vient donc que la fonction $u(t)$ est bornée dans tout l'intervalle $(t_0, +\infty)$ et, par conséquent, la fonction $|X(t)|$ est aussi bornée.

2. Du théorème 1 on déduit facilement le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Soit $V(X)$ une fonction non négative de classe C^1 satisfaisant aux conditions* (7), (8) *et à l'inégalité*

(12) $$|G(t, X) \cdot \operatorname{grad} V(X)| \leqslant p(t)\, \varrho\big(V(X)\big)$$

où $p(t)$ et $\varrho(u)$ sont des fonctions positives, continues et telles que

(13) $$\int_0^\infty p(t)\, dt < +\infty, \qquad \int_1^\infty \frac{du}{\varrho(u)} = +\infty.$$

Dans ces hypothèses toute solution $X(t)$ du système (9), *définie pour un $t_0 \geqslant 0$, est bornée dans l'intervalle* $(t_0, +\infty)$.

Pour la démonstration il suffit de remarquer que les conditions (13) sont bien suffisantes pour que toutes les solutions de l'équation différentielle

$$u' = p(t)\varrho(u)$$

soient bornées pour $t \geqslant 0$.

3. Supposons maintenant que la fonction $G(t, X)$ ne dépende pas de X. On a donc au lieu du système (9) le système suivant:

$$X' = F(t, X) + G(t). \tag{14}$$

On a évidemment

$$|G(t)\cdot \operatorname{grad} V(X)| \leqslant |G(t)|\cdot|\operatorname{grad} V(X)|.$$

Donc, du théorème 2 on obtient immédiatement:

COROLLAIRE 1. *Soit $V(X)$ une fonction non négative de classe C^1 satisfaisant aux conditions* (7), (8) *et à l'inégalité*

$$|\operatorname{grad} V(X)| \leqslant \varrho\big(V(X)\big)$$

où $\varrho(u)$ est une fonction continue, positive, vérifiant la seconde des relations (13). *Si l'on a*

$$\int_0^\infty |G(t)|\,dt < +\infty, \tag{15}$$

toute solution $X(t)$ du système (14), *définie pour un $t_0 \geqslant 0$, est bornée dans l'intervalle* $(t_0, +\infty)$.

4. Les théorèmes que nous venons de démontrer étaient tous de caractère global. Mais à chacun d'eux correspond un théorème analogue de caractère local. On a par exemple:

THÉORÈME 3. *Soit $V(X)$ $(V(0) = 0)$ une fonction non négative, de classe C^1 satisfaisant aux conditions* (7), (8) *et à l'inégalité* (12), *où les fonctions $p(t)$, $\varrho(u)$ sont non négatives, $u\varrho(u) > 0$ pour $u > 0$ et*

$$\int_0^\infty p(t)\,dt < +\infty, \qquad \int_0^1 \frac{du}{\varrho(u)} = +\infty. \tag{16}$$

Dans ces hypothèses il existe un $\delta > 0$ tel que toute solution $X(t)$ du système (9) *pour laquelle on a $|X(t_0)| \leqslant \delta$ pour un $t_0 \geqslant 0$, est bornée dans tout l'intervalle* $(t_0, +\infty)$.

Si, de plus, la fonction $V(X)$ ne s'annule que pour $X = \Theta$, pour tout $\varepsilon > 0$ il est possible de trouver un $\delta > 0$ tel que toute solution $X(t)$ du système (9) *pour laquelle $|X(t_0)| \leqslant \delta$ $(t_0 \geqslant 0)$, satisfasse dans l'intervalle $(t_0, +\infty)$ à l'inégalité $|X(t)| \leqslant \varepsilon$.*

Démonstration. Choisissons un nombre positif η de telle sorte que l'on ait

$$\int_\eta^1 \frac{du}{\varrho(u)} > \int_0^\infty p(t)\,dt \tag{17}$$

et désignons par D l'ensemble ouvert de l'espace E défini par l'inégalité $V(X) < \eta$. L'ensemble D contient dans son intérieur le point Θ, on peut donc trouver un δ tel que la sphère $|X| < \delta$ appartienne à D.

Soit $X(t)$ une solution du système (9) telle que l'on ait $|X(t_0)| < \delta$ pour un $t_0 \geqslant 0$. La fonction $u(t) = V\big(X(t)\big)$ satisfait donc aux inégalités

$$0 \leqslant u(t_0) < \delta \quad \text{et} \quad u'(t) \leqslant p(t)\varrho\big(u(t)\big) \quad (t \geqslant t_0).$$

Il en vient que pour tout $t \geqslant t_0$ on a

$$\int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{du}{\varrho(u)} \leqslant \int_{t_0}^{t} p(s)\,ds. \tag{18}$$

Des inégalités (17) et (18) il vient que $u(t) < 1$ dans l'intervalle $(t_0, +\infty)$ ce qui signifie que la solution $X(t)$ est bornée dans cet intervalle.

La première partie du théorème 3 se trouve ainsi démontrée. Passons à la démonstration de la seconde.

Prenons à cet effet un $\varepsilon > 0$. Il existe un $\mu > 0$ tel que l'on a

$$\mu < V(X) \quad \text{pour} \quad |X| > \varepsilon. \tag{19}$$

Choisissons η de telle sorte que l'on ait

$$\int_\eta^\mu \frac{du}{\varrho(u)} > \int_0^\infty p(t)\,dt.$$

Il existe un $\delta > 0$ tel que l'on a $V(X) < \eta$ dans la sphère $|X| < \delta$. De même que précédemment, on démontre que toute solution $X(t)$ du système (9), pour laquelle $|X(t_0)| < \delta$ pour un $t_0 \geqslant 0$, satisfait dans tout l'intervalle $(t_0, +\infty)$ à l'inégalité $V\big(X(t)\big) \leqslant \mu$ et, par conséquent, en vertu de (19), à l'inégalité $|X(t)| \leqslant \varepsilon$.

5. Supposons que le second membre du système (9) satisfasse aux hypothèses du théorème 2. Soit $X(t)$ une solution de ce système, définie dans l'intervalle $(t_0, +\infty)$ où $t_0 \geqslant 0$. On a alors

$$\frac{d}{dt}V\big(X(t)\big) = \big(F(t, X) + G(t, X)\big)\cdot \operatorname{grad} V(X)\big|_{X=X(t)}$$

et, par conséquent, pour tout $t \geqslant t_0$:

$$(20)\qquad V\big(X(t_0)\big) = V(t_0)+\int_{t_0}^{t} F\big(s,\, V\big(X(s)\big)\big)\cdot \operatorname{grad} V\big(X(s)\big)\,ds + \\ +\int_{t_0}^{t} G\big(s,\, V\big(X(s)\big)\big)\cdot \operatorname{grad} V\big(X(s)\big)\,ds.$$

En vertu de l'inégalité (7) la première de ces intégrales est une fonction non croissante de la variable t. Pour t tendant vers l'infini elle tend donc vers une limite finie ou égale à $-\infty$. La seconde de ces intégrales tend aussi vers une limite finie lorsque t croît indéfiniment, car on a, en vertu de l'hypothèse (12):

$$\Big|\int_{t_0}^{t} G\big(s,\, V\big(X(s)\big)\big)\cdot \operatorname{grad} V\big(X(s)\big)\,ds\Big| \leqslant \int_{t_0}^{t} p(s)\,\varrho\big(V\big(X(s)\big)\big)\,ds \leqslant M\int_{t_0}^{\infty} p(s)\,ds$$

où M est une constante choisie de sorte que l'on ait $\varrho\big(V\big(X(t)\big)\big) \leqslant M$ dans l'intervalle $(t_0, +\infty)$. Le second membre de l'égalité (20) tend donc vers une limite lorsque t tend vers l'infini. Cette limite doit être finie puisque la fonction $V\big(X(t)\big)$ est non négative.

Nous avons donc démontré

THÉORÈME 4. *Si le second membre du système* (9) *satisfait aux hypothèses du théorème* 2, *pour toute solution* $X(t)$ *de ce système la fonction* $V\big(X(t)\big)$ *tend vers une limite finie lorsque* t *croît indéfiniment.*

On démontre d'une manière analogue le théorème suivant:

THÉORÈME 5. *Si le deuxième membre du système* (9) *satisfait aux hypothèses du théorème* 3, *pour toute solution* $X(t)$ *de ce système qui pour un* $t_0 \geqslant 0$ *vérifie l'inégalité* $|X(t_0)| < \delta$, *la fonction* $V\big(X(t)\big)$ *tend vers une limite finie lorsque* $t \to +\infty$.

6. Revenons maintenant au système (14) et supposons que son second membre satisfasse aux hypothèses du corollaire 1. Du théorème 4 on obtient immédiatement:

COROLLAIRE 2. *Si les fonctions* $F(t, X)$ *et* $G(t)$ *satisfont aux hypothèses du corollaire* 1, *pour toute solution* $X(t)$ *du système* (14), *définie dans un intervalle* $(t_0, +\infty)$ *où* $t_0 \geqslant 0$, *la fonction* $V\big(X(t)\big)$ *tend vers une limite finie lorsque* $t \to +\infty$.

7. Simplifions encore davantage le système (14) en admettant que la fonction $F(t, X)$ ne dépend pas de la variable t. On a alors au lieu de (14) le système

$$(21)\qquad X' = F(X)+G(t).$$

Supposons que les fonctions $F(X)$ et $G(t)$ satisfassent aux conditions du corollaire 1. Comme la fonctions $G(t)$ vérifie l'inégalité (15), le système (21) est presque autonome (voir Z. Opial [6]). Soit $X(t)$ une solution de ce système, définie pour un $t_0 \geqslant 0$. D'après le corollaire 1, $X(t)$ est bornée dans tout l'intervalle $(t_0, +\infty)$. Désignons par $X(\infty)$ l'ensemble limite de la solution $X(t)$, c'est-à-dire l'ensemble des points X_0 de l'espace E pour lesquels il existe une suite de nombres $\{t_n\}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty \quad\text{et}\quad \lim_{n\to\infty} X(t_n) = X_0.$$

L'ensemble $X(\infty)$ est borné, fermé et connexe. En vertu du corollaire 2 la fonction $V\big(X(t)\big)$ tend vers une limite finie C lorsque $t \to +\infty$. On a donc $V(X) = C$ pour tout $X \epsilon X(\infty)$.

A côté du système (21) envisageons le système autonome

$$(22)\qquad X' = F(X).$$

Comme la fonction $F(X)$ satisfait à la condition (7), où $V(X)$ est une fonction non négative de classe C^1 vérifiant la relation (8), toutes les solutions de ce système sont bornées pour $t \geqslant 0$. Bien plus, pour toute solution $X(t)$ du système (22) la fonction $V\big(X(t)\big)$ est non croissante.

Dans le cas de l'unicité des solutions du système autonome (22) l'ensemble limite $X(\infty)$ d'une solution $X(t)$ du système presque autonome (21) est composé (voir [6], théorème 4) exclusivement de solutions du système autonome limite (22).

De tout ce que nous avons dit on obtient

THÉORÈME 6. *Supposons que les fonctions* $F(X)$ *et* $G(t)$ *satisfassent aux hypothèses du corollaire* 1. *Soit* $X(t)$ *une solution du système* (21), *définie dans un intervalle* $(t_0, +\infty)$.

Si l'on a l'unicité des solutions du système (22), *l'ensemble* $V(X) = \lim_{t\to+\infty} V\big(X(t)\big)$ *contient au moins une solution du système* (22).

Sans restreindre la généralité nous pouvons admettre que $\min_E V(X) = 0$. Pour tout nombre non négatif c désignons par V_c l'ensemble de l'espace E défini par la relation $V(X) = c$. Remarquons que dans nos hypothèses sur le système autonome (22) l'ensemble V_0 contient au moins une solution de ce système. En tout cas, tout point isole de cet ensemble est forcément un point singulier du système (22). On a de plus la proposition suivante, facile à démontrer:

Admettons l'hypothèse de l'unicité des solutions du système (22) et supposons que la fonction $F(X)$ satisfasse à la condition (7) pour une fonction $V(X)$ non négative, de classe C^1, vérifiant la relation (8). Si aucun des ensembles V_c pour $c > 0$ ne contient de solutions du système (22), pour toute solution $X(t)$ de ce système on a

$$\lim_{t\to\infty} V\big(X(t)\big) = 0.$$

De là et du théorème 6 on déduit immédiatement le théorème suivant:

THÉORÈME 7. *Supposons que les fonctions $F(X)$ et $G(t)$ satisfassent aux hypothèses du corollaire 1 et admettons l'hypothèse de l'unicité des solutions du système (22).*

Si aucun des ensembles V_c $(c > 0)$ ne contient de solutions du système (22), pour toute solution $X(t)$ du système (21), définie dans un intervalle $(t_0, +\infty)$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} V\big(X(t)\big) = 0.$$

En particulier, si l'ensemble V_0 se compose de points isolés, toute solution $X(t)$ du système (21), définie dans un intervalle $(t_0, +\infty)$, tend vers un point singulier du système (22), lorsque $t \to +\infty$.

8. Au n° précédent nous nous sommes bornés à envisager le système simplifié (21), mais il est facile d'étendre tous les résultats de ce n° aux systèmes plus généraux du type

$$X' = F(X) + G(t, X). \tag{21'}$$

Aux hypothèses déjà admises sur les fonctions $F(X)$ et $G(t, X)$ il suffit d'ajouter l'inégalité

$$|G(t, X)| \leqslant p_1(t)\varrho_1(|X|), \tag{23}$$

où la fonction $\varrho_1(u)$ est continue pour $u \geqslant 0$ et la fonction $p_1(t)$ admet une intégrale finie dans l'intervalle $(0, +\infty)$. En effet, si la condition (23) est satisfaite, le système (21′) est presque autonome (voir [6], n° 1 de la deuxième partie) et, par conséquent, on peut appliquer à ce système les mêmes raisonnements qu'au système (21), de sorte que pour obtenir des théorèmes analogues aux théorèmes 6 et 7 il suffit de remplacer dans leurs énoncés le système (21) par (21′), la fonction $G(t)$ par $G(t, X)$, le corollaire 1 par le théorème 2 et enfin d'y ajouter l'hypothèse (23).

Deuxième partie

1. Nous allons maintenant appliquer les résultats des n^{os} précédents aux systèmes d'équations différentielles du second ordre

$$X'' = f(t, X, X') + g(t, X, X'), \tag{24}$$

où les fonctions $f(t, X, Y)$ et $g(t, X, Y)$ sont définies et continues dans tout l'espace $F = I\times E\times E$.

Le système envisagé peut être remplacé par le système équivalent d'équations différentielles du premier ordre

$$X' = Y, \qquad Y' = f(t, X, Y) + g(t, X, Y). \tag{25}$$

Soit $V(X, Y) = V(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ une fonction numérique non négative, de classe C^1, définie dans tout l'espace $E\times E$. Posons

$$\operatorname{grad}_X V(X, Y) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right), \quad \operatorname{grad}_Y V(X, Y) = \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial y_n}\right).$$

Supposons que l'on ait partout dans l'espace F:

$$Y\cdot\operatorname{grad}_X V(X, Y) + f(t, X, Y)\cdot\operatorname{grad}_Y V(X, Y) \leqslant 0 \tag{26}$$

et que la fonction $V(X, Y)$ satisfasse à la condition

$$\lim_{|X|+|Y|\to\infty} V(X, Y) = +\infty. \tag{27}$$

Dans ces hypothèses pour toute solution $X(t)$ du système (1), définie pour un t_0, on a pour tout $t \geqslant t_0$:

$$\frac{d}{dt} V\big(X(t), X'(t)\big) \leqslant 0.$$

La fonction $V\big(X(t), X'(t)\big)$ est donc non croissante et, en vertu de la relation (27), $X(t)$ et $X'(t)$ sont bornées dans l'intervalle $(t_0, +\infty)$.

De même que dans les n^{os} 1 et 2 de la première partie, on démontre le théorème suivant:

THÉORÈME 8. *Soit $V(X, Y)$ une fonction non négative, de classe C^1, satisfaisant aux conditions (26) et (27) et vérifiant l'inégalité*

$$|g(t, X, Y)\cdot\operatorname{grad}_Y V(X, Y)| \leqslant \varrho\big(t, V(X, Y)\big),$$

où $\varrho(t, u)$ est une fonction continue, non négative, définie pour $t \geqslant 0$ et $u \geqslant 0$.

Si toutes les solutions de l'équation différentielle $u' = \varrho(t, u)$ sont bornées pour $t \geqslant 0$, toute solution du système (24), définie pour un $t_0 \geqslant 0$, est bornée ainsi que sa dérivée première dans tout l'intervalle $(t_0, +\infty)$.

En particulier, il en est ainsi si la fonction $\varrho(t, u)$ est le produit de deux fonctions positives et continues $p(t)$ et $\varrho(u)$ qui satisfont aux relations (13).

Dans l'hypothèse que le fonction $g(t, X, Y)$ ne dépend que de la variable t on obtient du théorème 8 un corollaire analogue au corollaire 1.

COROLLAIRE 3. *Soit $V(X, Y)$ une fonction non négative, de classe C^1, satisfaisant aux conditions (26) et (27) et à l'inégalité*

$$|\operatorname{grad}_Y V(X, Y)| \leqslant \varrho\big(V(X, Y)\big), \tag{28}$$

où $\varrho(u)$ est une fonction continue, positive, vérifiant la seconde des relations (13). *Si l'on a l'inégalité* (4), *toute solution du système*

$$X'' = f(t, X, X') + g(t), \tag{29}$$

définie pour un $t_0 \geqslant 0$, est bornée ainsi que sa dérivée du premier ordre, dans tout l'intervalle $(t_0, +\infty)$.

2. De même qu'au n° 5 de la première partie on démontre le théorème suivant:

THÉORÈME 9. *Soit $V(X, Y)$ une fonction non négative, de classe C^1, satisfaisant aux conditions* (26), (27), *et vérifiant l'inégalité*

$$|g(t, X, Y) \cdot \operatorname{grad}_Y V(X, Y)| \leqslant p(t)\varrho\big(V(X, Y)\big),$$

où $p(t)$ et $\varrho(u)$ sont des fonctions continues positives, définies pour $t \geqslant 0$ et $u \geqslant 0$ et vérifiant les relations (13).

Pour toute solution $X(t)$ du système (24), *définie pour un $t_0 \geqslant 0$, la fonction $V\big(X(t), X'(t)\big)$ tend vers une limite finie lorsque t croît indéfiniment.*

Au corollaire 2 du n° 6 de la première partie correspond le suivant:

COROLLAIRE 4. *Si les fonctions $f(t, X, Y)$ et $g(t)$ satisfont aux hypothèses du corollaire* 3, *pour toute solution $X(t)$ du système* (29), *définie pour un $t_0 \geqslant 0$, la fonction $V\big(X(t), X'(t)\big)$ tend vers une limite finie lorsque $t \to +\infty$.*

3. Passons maintenant à l'étude du système (3). En appliquant à ce système le théorème 6 on obtient le théorème suivant:

THÉORÈME 10. *Supposons que les fonctions $f(X, Y)$ et $g(t)$ satisfassent aux hypothèses du corollaire* 3 *et admettons l'hypothèse de l'unicité des solutions du système autonome* (2).

Soit $X(t)$ une solution du système (3), *définie dans un intervalle $(t_0, +\infty)$. L'ensemble $V(X, Y) = \lim\limits_{t\to+\infty} V\big(X(t), X'(t)\big)$ contient au moins une solution du système autonome* (2).

Admettons que $\min\limits_{E\times E} V(X, Y) = 0$. Pour tout nombre non négatif désignons par V_c l'ensemble de l'espace $E\times E$, défini par l'équation $V(X, Y) = c$. Dans nos hypothèses sur le système autonome (2) l'ensemble V_0 contient au moins une solution de ce système. Tout point isolé (X_0, Y_0) de cet ensemble est forcément un point singulier du système (2) et on a par conséquent $Y_0 = \Theta$.

Au théorème 7 correspond donc le suivant:

THÉORÈME 11. *Supposons que les fonctions $f(X, Y)$ et $g(t)$ satisfassent aux hypothèses du corollaire* 3 *et admettons l'hypothèse de l'unicité des solutions du système autonome* (2). *Si aucun des ensembles V_c $(c > 0)$ ne contient de solutions du système autonome* (2), *pour toute solution $X(t)$ du système* (3), *définie dans un intervalle $(t_0, +\infty)$, on a*

$$\lim_{t\to\infty} V\big(X(t), X'(t)\big) = 0.$$

En particulier, si l'ensemble V_0 se compose de points isolés, pour toute solution $X(t)$ du système (3), *définie dans un intervalle $(t_0, +\infty)$, on a*

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = X_0 \quad \textit{et} \quad \lim X'(t) = \Theta,$$

où X_0 est un point singulier du système (2), *c'est-à-dire un point pour lequel $f(X_0, \Theta) = \Theta$.*

4. Nous allons maintenant montrer comment les théorèmes de B. Manfredi [3] peuvent être déduits des théorèmes généraux que nous venons d'établir.

Envisageons à cet effet le système

$$x_i'' + \omega_i(X, X')x_i' + h_i(X) = g_i(t) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{30}$$

Dans le système autonome réduit (2) on a alors $f(X, Y) = \big(f_1(X, Y), \ldots, f_n(X, Y)\big)$ où

$$f_i(X, Y) = -\omega_i(X, Y)y_i - h_i(X) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{31}$$

THÉORÈME 12. *Supposons que les fonctions continues $\omega(X, Y) = \big(\omega_1(X, Y), \ldots, \omega_n(X, Y)\big)$ et $h(X) = \big(h_1(X), \ldots, h_n(X)\big)$ satisfassent aux conditions suivantes:*

$$\omega_i(X, Y) \geqslant 0 \quad \textit{pour tout } (X, Y) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{32}$$

$$h(X) = \operatorname{grad} H(X), \tag{33}$$

où $H(X)$ est une fonction de classe C^1 telle que

$$H(X) \geqslant 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{|X|\to\infty} H(X) = +\infty. \tag{34}$$

Supposons de plus que la fonction $g(t) = \big(g_1(t), \ldots, g_n(t)\big)$ vérifie la condition (4).

Dans ces hypothèses toute solution $X(t)$ du système (30), *définie dans un intervalle $(t_0, +\infty)$, est bornée ainsi que sa dérivée du premier ordre dans l'intervalle $(t_0, +\infty)$. Si l'on a l'unicité des solutions du système autonome correspondant:*

$$x_i'' + \omega_i(X, X')x_i' + h_i(X) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{30'}$$

si tous les points singuliers de ce système sont isolés et si, de plus

$$\omega_i(X, Y) > 0 \quad \textit{pour tout } (X, Y) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{35}$$

la solution $X(t)$ tend vers un point singulier X_0 du système (30′) et sa dérivée $X'(t)$ tend vers Θ lorsque t croît indéfiniment.

Si de plus

$$h(X) \neq \Theta \quad \text{pour tout } X \neq \Theta, \tag{36}$$

on a $\lim_{t\to\infty} X(t) = \Theta$ *et* $\lim_{t\to\infty} X'(t) = \Theta$.

Démonstration. Posons $V(X, Y) = Y^2 + 2H(X)$. En vertu des conditions (34) c'est une fonction non négative, de classe C^1, satisfaisant à la relation (27). On a de plus, en raison des conditions (32) et (33):

$$Y \cdot \operatorname{grad}_X V(X, Y) + f(X, Y) \cdot \operatorname{grad}_Y V(X, Y) = 2Y \cdot \operatorname{grad} H(X) -$$

$$-2\sum_{i=1}^{n} \omega_i(X, Y) y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} h_i(X) y_i = -2\sum_{i=1}^{n} \omega_i(X, Y) y_i^2 \leqslant 0.$$

D'autre part, on a évidemment

$$|\operatorname{grad}_Y V(X, Y)| = 2|Y| \leqslant 2\sqrt{V(X, Y)}.$$

La première partie de la conclusion résulte donc immédiatement du corollaire 3.

De même, du corollaire 4 il résulte que pour toute solution $X(t)$ du système (30), définie dans un intervalle $(t_0, +\infty)$, la fonction

$$U(t) = X'^2(t)/2 + H(X(t)) \tag{37}$$

tend vers une limite finie lorsque $t \to +\infty$.

Si les fonctions $\omega_i(X, Y)$ satisfont aux inégalités (35), on a

$$Y \cdot \operatorname{grad}_X V(X, Y) + f(X, Y) \cdot \operatorname{grad}_Y V(X, Y) = -2\sum_{i=1}^{n} \omega_i(X, Y) y_i^2 < 0$$

pour tout $Y \neq \Theta$. Cela veut dire que les ensembles $V(X, Y) = \text{const} > 0$ ne peuvent contenir d'autres solutions du système (30′), sauf des points singuliers.

Si, enfin, la fonction $h(X)$ ne s'annule qu'au point Θ, le système (30′) n'admet qu'un seul point singulier (Θ, Θ).

La seconde partie de la conclusion résulte donc du théorème 11.

5. Si les fonctions $\omega_i(X, Y)$ satisfont aux inégalités (35) et les ensembles $V(X, Y) = c$ $(c > 0)$ ne contiennent aucune solution du système autonome (30′), pour toute solution $X(t)$ du système (30), définie dans un intervalle $(t_0, +\infty)$, la fonction $U(t)$ donnée par la formule (37) tend vers zéro lorsque t croît indéfiniment. On a par suite

$$\lim_{t\to+\infty} X'(t) = \Theta \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} H(X(t)) = 0.$$

Donc, si la fonction $H(X)$ ne s'annule que pour $X = \Theta$, il en vient $\lim_{t\to\infty} X(t) = \Theta$.

Les fonctions $X(t)$ et $X'(t)$ étant bornées dans l'intervalle $(t_0, +\infty)$, il existe un $a > 0$ tel que l'on a dans cet intervalle

$$a \leqslant \omega_i(X(t), X'(t)) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{38}$$

D'autre part

$$U'(t) = -2\sum_{i=1}^{n} \omega_i(X(t), X'(t)) x_i'^2(t) + 2\sum_{i=1}^{n} g_i(t) x_i'(t)$$

et, par suite, en raison de l'inégalité (38):

$$0 \leqslant U(t) \leqslant U(t_0) - 2a\int_{t_0}^{t} X'^2(s)\,ds + 2M\int_{t_0}^{t} |g(s)|\,ds,$$

où M est une constante choisie de sorte que l'on ait $|X'(t)| \leqslant M$ dans l'intervalle $(t_0, +\infty)$. Il en vient, en vertu de l'inégalité (4), que l'on a

$$\int_{t_0}^{\infty} X'^2(t)\,dt < +\infty. \tag{39}$$

Mais on a aussi l'identité suivante:

$$\left(\frac{1}{2} x'^2(t)\right)' = -\sum_{i=1}^{n} \omega_i(X(t), X'(t)) x_i'^2(t) - h(X(t)) X'(t) + g(t) X'(t).$$

Les deux premiers termes du second membre de cette relation sont bornés dans l'intervalle $(t_0, +\infty)$, tandis que le dernier admet une intégrale finie dans le même intervalle. Il s'ensuit que l'inégalité (39) n'est possible que dans le cas où $X'(t)$ tend vers Θ lorsque t croît indéfiniment.

Nous avons ainsi démontré

Corollaire 5. *Si les fonctions $\omega(X, Y)$, $h(X)$ et $g(t)$ satisfont aux hypothèses du théorème 12 et si l'on a de plus (35), pour toute solution $X(t)$ du système (30), définie dans un intervalle $(t_0, +\infty)$, la fonction $X'^2(t)$ admet une intégrale finie dans le même intervalle et l'on a $\lim_{t\to\infty} X'(t) = \Theta$.*

6. Au nº 4 nous avons démontré le premier des théorèmes de B. Manfredi. La démonstration de son second théorème est aussi simple. Envisageons le système

$$X'' + r(X') + \omega^2 X = g(t), \tag{40}$$

où $r(X)$ est une fonction continue et ω une constante positive. Remarquons que si $r(X)X \geqslant 0$ pour tout $X \in E$, on a forcément $r(\Theta) = \Theta$.

THÉORÈME 13. *Si la fonction* $r(X) = (r_1(X), \ldots, r_n(X))$ *satisfait à la condition*

$$r(X)\cdot X \geqslant 0 \quad \textit{pour tout } X \in E \tag{41}$$

et la fonction $g(t) = (g_1(t), \ldots, g_n(t))$ *vérifie l'inégalité* (4), *toute solution* $X(t)$ *du système* (40), *définie dans un intervalle* $(t_0, +\infty)$, *est bornée, ainsi que sa dérivée première, dans tout l'intervalle* $(t_0, +\infty)$.

Si l'on a l'unicité des solutions du système autonome

$$X''+r(X')+\omega^2 X = 0 \tag{40'}$$

et si, de plus

$$r(X)\cdot X > 0 \quad \textit{pour tout } X \neq \Theta, \tag{42}$$

on a alors $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = \Theta$ *et* $\lim\limits_{t\to\infty} X'(t) = \Theta$.

Pour la démonstration de la première partie du théorème il suffit de poser $V(X, Y) = Y^2+\omega^2 X^2$ et de vérifier que les hypothèses du corollaire 3 se trouvent satisfaites.

Dans le cas où l'inégalité (42) est vérifiée, toutes les solutions du système autonome (40') ainsi que leurs dérivées du premier ordre, tendent vers Θ quand t croît indéfiniment. D'après le théorème 11 il en est de même des solutions du système (40).

7. Pour toute solution $X(t)$ du système (40) on a

$$\frac{d}{dt}\big(X'^2(t)+\omega^2 X^2(t)\big) = -r\big(X'(t)\big)X'(t)+g(t)X'(t).$$

De même qu'au n° 5 on en déduit l'inégalité

$$\int_{t_0}^{\infty} r\big(X'(t)\big)\cdot X'(t)\,dt < +\infty.$$

Mais en vertu de l'inégalité (42) et de l'identité

$$X''(t) = -r\big(X'(t)\big)-\omega^2 X(t)+g(t)$$

ce n'est possible que dans le cas où $X'(t)$ tend vers Θ quand $t\to+\infty$. De la dernière formule il résulte que l'on doit avoir aussi $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = \Theta$

On a en effet

$$X(t) = C_1(t)\cos\omega t+C_2(t)\sin\omega t, \qquad X'(t) = -C_1(t)\sin\omega t+C_2(t)\cos\omega t$$

où les coefficients $C_1(t)$ et $C_2(t)$ sont égaux respectivement à

$$C_1+\frac{1}{\omega}\int_{t_0}^{t}\Big(r\big(X'(s)\big)-g(s)\Big)\sin\omega s\,ds, \qquad C_2+\frac{1}{\omega}\int_{t_0}^{t}\Big(g(s)-r\big(X'(s)\big)\Big)\cos\omega s\,ds,$$

C_1 et C_2 étant des vecteurs constants. La fonction $r\big(X'(t)\big)$ tend vers Θ

pour $t\to+\infty$ et la fonction $g(t)$ admet par hypothèse une intégrale finie dans l'intervalle $(0, +\infty)$. Par conséquent, $X'(t)$ ne peut tendre vers Θ que si l'on a simultanément

$$\lim_{t\to\infty} C_1(t) = \Theta \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\infty} C_2(t) = \Theta$$

d'où il résulte que l'on a aussi $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = \Theta$.

Nous avons ainsi obtenu une autre démonstration de la seconde partie du théorème 13, démonstration dans laquelle on n'a plus besoin de l'hypothèse de l'unicité des solutions du système (40').

8. Passons maintenant à l'étude du système (3) dans le cas où la fonction $g(t)$ satisfait à la condition (5) c'est-à-dire est à variation bornée dans l'intervalle $(0, +\infty)$. Dans cette hypothèse, $g(t)$ est évidemment bornée dans cet intervalle et, bien plus, $g(t)$ tend vers une limite finie $g(\infty)$ lorsque t croît indéfiniment.

Nous commencerons par le démonstration d'un théorème analogue aux théorèmes de G. Sestini [8], [9]. Envisageons à cet effet le système

$$X''+r(X')+h(X) = g(t). \tag{43}$$

Pour ce système on a le théorème suivant:

THÉORÈME 14. *Supposons que les fonctions continues* $r(X)$ *et* $h(X)$ *satisfassent aux conditions suivantes*:

$$r(X)\cdot X \geqslant 0 \quad \textit{pour tout } X \in E, \tag{44}$$

$$h(X) = \operatorname{grad} H(X), \tag{45}$$

où $H(X)$ *est une fonction de classe* C^1 *telle que*

$$H(X) \geqslant \big(|g(\infty)|+2\varepsilon\big)|X| \qquad (\varepsilon > 0) \tag{46}$$

pour $|X|$ *suffisamment grand. Supposons de plus que la fonction* $g(t)$ *soit à variation bornée dans l'intervalle* $(0, +\infty)$.

Dans ces hypothèses toute solution $X(t)$ *du système* (43), *définie dans un intervalle* $(t_0, +\infty)$ *où* $t_0 \geqslant 0$, *est bornée, ainsi que sa dérivée première, dans tout l'intervalle* $(t_0, +\infty)$.

Démonstration. En vertu de (43) on a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{X'^2(t)}{2}+H\big(X(t)\big)\right) = -r\big(X'(t)\big)X'(t)+g(t)X'(t)$$

et, par suite, en raison de l'inégalité (44):

$$\frac{X'^2(t)}{2}+H\big(X(t)\big) \leqslant C+\int_{t_0}^{t} g(s)X'(s)\,ds,$$

où C est une constante. En intégrant par parties on en tire

$$(47)\qquad \frac{X'^2(t)}{2}+H\big(X(t)\big)\leqslant C'+g(t)X(t)-\int_{t_0}^{t}X(s)\,dg(s).$$

Comme $\lim_{t\to\infty} g(t)=g(\infty)$, on peut trouver un $t_1>t_0$ tel que l'on ait $|g(t)|\leqslant|g(\infty)|+\varepsilon$ pour tout $t\geqslant t_1$. L'inégalité (46) étant satisfaite pour $|X|$ assez grand, il existe une constante A telle que l'on a pour tout $X\epsilon E$:

$$(48)\qquad H(X)+A\geqslant\big(|g(\infty)|+2\varepsilon\big)|X|.$$

On a donc, en tenant compte de (47) et (48):

$$\frac{X'^2(t)}{2}+\varepsilon|X(t)|\leqslant C''+\int_{t_0}^{t}|X(s)|\,|dg(s)|$$

pour tout $t\geqslant t_1$. On en tire immédiatement l'inégalité intégrale

$$\frac{X'^2(t)}{2}+\varepsilon|X(t)|\leqslant C'''+\int_{t_0}^{t}\left(\frac{X'^2(s)}{2}+\varepsilon|X(s)|\right)\frac{|dg(s)|}{\varepsilon}.$$

Il en vient (voir R. Bellman [2], p. 35):

$$\frac{X'^2(t)}{2}+\varepsilon|X(t)|\leqslant C'''\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}|dg(s)|\right)\leqslant C'''\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{0}^{\infty}|dg(s)|\right)<+\infty.$$

Les fonctions $|X(t)|$ et $|X'(t)|$ sont donc bornées dans l'intervalle $(t_0,+\infty)$ et le théorème 14 se trouve ainsi démontré.

9. Dans le cas d'une seule équation du type (43):

$$(43')\qquad x''+r(x')+h(x)=g(t)$$

on peut évidemment poser $H(x)=\int_0^x h(s)\,ds$. Alors pour que la condition (46) soit vérifiée il suffit d'admettre que

$$(49)\qquad \liminf_{t\to+\infty}h(x)>|g(\infty)|\quad\text{ et }\quad \liminf_{t\to-\infty}h(x)<-|g(\infty)|.$$

Du théorème 14 on obtient, dans ce cas particulier, le théorème suivant:

THÉORÈME 15. *Si les fonctions continues $r(x)$ et $h(x)$ satisfont aux conditions $xr(x)\geqslant 0$ et (49) et la fonction $g(t)$ est à variation bornée dans l'intervalle $(0,+\infty)$, toute solution $x(t)$ de l'équation (43′), définie dans un intervalle $(t_0,+\infty)$, est bornée dans cet intervalle et il en de même de sa dérivée première $x'(t)$.*

Envisageons un cas particulier de l'équation (43′) en admettant que la fonction $r(x)$ est identiquement nulle. On a donc

$$(43'')\qquad x''+h(x)=g(t).$$

Supposons de plus que l'on ait $xh(x)\geqslant 0$ et $\lim_{|x|\to\infty}H(x)=+\infty$. Dans le cas où la fonction $g(t)$ admet une intégrale finie dans l'intervalle $(0,+\infty)$, ces hypothèses suffisent pour que toutes les solutions de l'équation (43″) soient bornées ainsi que leurs dérivées premières. Il est cependant facile de montrer qu'il n'en est plus ainsi dans le cas où $g(t)$ est à variation bornée dans l'intervalle $(0,+\infty)$ et tend vers zéro lorsque t croît indéfiniment. En effet, soit $h(x)$ une fonction égale à x dans l'intervalle $\langle -1,+1\rangle$ et à $1/x$ dans les intervalles $(-\infty,-1)$ et $(1,+\infty)$ et posons $g(t)$ égal à $1/t$ pour $t\geqslant 1$. Dans ces hypothèses l'équation (43″) admet une solution qui n'est pas bornée dans l'intervalle $(1,+\infty)$, à savoir $x(t)=t$ $(t\geqslant 1)$.

10. Considérons le système de deux équations

$$x_1''+4x_1=0\quad\text{ et }\quad x_2''+x_2=0,$$

auquel s'applique évidemment le théorème 14. Nous allons montrer que même une légère modification de ce simple système peut conduire à des systèmes dont les solutions ne sont pas bornées. Envisageons à cet effet le système

$$(43''')\qquad x_1''+4x_1=0\quad\text{ et }\quad x_2''+\big(1+\varepsilon p(x_1)\big)x_2=0,$$

où $\varepsilon>0$ et $p(x_1)$ est une fonction continue, égale à x_1 pour $|x_1|\leqslant 1$ à 1 pour $x_1\geqslant 1$ et à -1 pour $x_1\leqslant -1$ (1). Pour $\varepsilon\leqslant\frac12$ la fonction $h(x_1,x_2)=\big(1+\varepsilon p(x_1)\big)x_2$ satisfait à l'inégalité $|h(x_1,x_2)|\geqslant|x_2|/2$.

La fonction $x_1(t)=\cos 2t$ constitue une solution de la première des équations (43‴). En remplaçant donc dans la seconde de ces équations x_1 par $\cos 2t$ on en obtient l'équation de Mathieu

$$x_2''+(1+\varepsilon\cos 2t)x_2=0$$

dont les solutions non nulles ne sont pas bornées si ε est assez petit.

11. Revenons au système général (43) et supposons que la fonction $r(X)$ satisfasse à la condition (42). Pour toute intégrale $X(t)$ du système (43), définie dans un intervalle $(t_0,+\infty)$, on a

$$(50)\qquad U(t)=U(t_0)-\int_{t_0}^{t}r\big(X'(s)\big)X'(s)\,ds+g(t)X(t)-\int_{t_0}^{t}X(s)\,dg(s),$$

(1) Il en résulte, en particulier, que le vecteur $h(x)=\big(4x_1,(1+\varepsilon p(x_1))x_2\big)$ ne satisfait pas à la condition (45).

où nous avons posé

$$U(t) = X'^2(t)/2 + H\big(X(t)\big).$$

En vertu de l'hypothèse (46) la fonction $Y^2/2+H(X)$ est bornée inférieurement, il en est donc de même de la fonction $U(t)$. Le premier, le troisième et le dernier termes du second membre de (50) sont tous bornés dans l'intervalle $(t_0, +\infty)$. Le second terme est une fonction non croissante dans le même intervalle. On a donc

$$\int_{t_0}^{\infty} r\big(X'(s)\big)X'(s)\,ds < +\infty. \tag{51}$$

Mais le second membre de l'identité

$$X''(t) = -r\big(X'(t)\big) - h(X) + g(t)$$

est borné pour $t \geqslant t_0$, l'inégalité (51) n'est donc possible que dans le cas où $\lim\limits_{t\to\infty} X'(t) = \Theta$.

Ecrivons la relation (50) sous la forme

$$\begin{aligned} U(t) - g(\infty)X(t) \\ = U(t_0) - \int_{t_0}^{t} r\big(X'(s)\big)X'(s)\,ds + \big(g(t)-g(\infty)\big)X(t) - \int_{t_0}^{t} X(s)\,dg(s). \end{aligned}$$

Le second membre de cette identité tend vers une limite finie lorsque t tend vers l'infini, car on a

$$\lim_{t\to\infty} \big(g(t)-g(\infty)\big)X(t) = 0$$

et pour tout t_1 et $t_2 \in (t_0, +\infty)$:

$$\Big|\int_{t_1}^{t_2} X(s)\,dg(s)\Big| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} |X(s)|\,|dg(s)| \leqslant \sup_{(t_0,+\infty)} |X(t)| \int_{t_1}^{t_2} |dg(s)|.$$

La fonction $U(t)-g(\infty)X(t)$ tend donc vers une limite finie quand $t\to+\infty$.

12. Envisageons le système autonome

$$X'' + r(X') + h(X) - g(\infty) = 0. \tag{52}$$

Les points singuliers de ce système sont tous déterminés par l'équation

$$h(X) = g(\infty). \tag{53}$$

Il est facile de montrer que dans les hypothèses du théorème 14 l'équation (53) admet au moins une solution. En effet, en vertu de l'inégalité (46), on a

$$\lim_{|X|\to\infty} \big(H(X) - g(\infty)X\big) = +\infty.$$

Par conséquent, la fonction $H(X)-g(\infty)X$ admet en un point X_0 un minimum absolu. On a donc

$$\operatorname{grad}\big(H(X)-g(\infty)X\big)\big|_{X=X_0} = h(X_0) - g(\infty) = 0$$

ce qui signifie que le point X_0 constitue une solution de l'équation (53).

Soit $X(t)$ une solution du système (52). On vérifie facilement l'identité

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{X'^2(t)}{2} + H\big(X(t)\big) - g(\infty)X(t)\right) = -r\big(X'(t)\big)X'(t).$$

Donc, dans l'hypothèse que la fonction $r(X)$ satisfait à l'inégalité (42), la fonction

$$X'^2(t)/2 + H\big(X(t)\big) - g(\infty)X(t)$$

ne peut être constante que dans le cas où $X'(t)\equiv 0$ c'est-à-dire pour une solution singulière du système (52).

13. Quand t tend vers l'infini, le système (43) tend vers le système autonome (52). Plus précisément, le système (43) est asymptotiquement autonome au sens de L. Markus [4]. Admettons l'hypothèse de l'unicité des solutions du système (52).

Comme nous l'avons démontré au n° 11, dans l'hypothèse que la fonction $r(X)$ satisfait à la condition (42), pour toute solution $X(t)$ du système (43) on a $\lim\limits_{t\to\infty} X'(t) = \Theta$ et la fonction $X'^2(t)/2 + H\big(X(t)\big) - g(\infty)X(t)$ et, par suite, la fonction $H\big(X(t)\big)-g(\infty)X(t)$ tend vers une limite finie lorsque $t\to+\infty$:

$$\lim_{t\to\infty}\Big(H\big(X(t)\big) - g(\infty)X(t)\Big) = C.$$

Désignons par D l'ensemble de l'espace E, défini par l'équation $H(X)-g(\infty)X = C$. D'après le théorème de L. Markus (voir [4], théorème 1) l'ensemble D doit contenir au moins une solution du système autonome (52), c'est-à-dire au moins une solution singulière de ce système.

Donc, si le système (52) n'a qu'un seul point singulier, par exemple $X=\Theta$, toute solution du système (43), définie dans un intervalle $(t_0, +\infty)$, doit tendre, pour $t\to+\infty$, vers le point Θ.

On obtient ainsi le théorème suivant:

THÉORÈME 16. *Supposons que les fonctions $r(X)$, $h(X)$ et $g(t)$ satisfassent aux hypothèses du théorème 14 et à la condition* (42).

Si le système autonome (52) *n'a qu'un seul point singulier $X = \Theta$ et s'il satisfait à l'hypothèse de l'unicité des solutions, pour toute solution $X(t)$ du système* (43), *définie dans un intervalle* $(t_0, +\infty)$, *on a*

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = \Theta \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\infty} X'(t) = \Theta .$$

Travaux cités

[1] H.A. Antosiewicz, *On non linear differential equations of the second order with integrable forcing term*, J. London Math. Soc. 30 (1955), p. 64-67.

[2] R. Bellman, *Stability theory of differential equations*, New York 1953.

[3] B. Manfredi, *Sulla stabilità del moto di sistemi a più gradi di libertà in condizioni non lineari*, Boll. Un. Mat. Ital., Serie III, Anno XI (1956), p. 64-71.

[4] L. Markus, *Asymptotically autonomous differential systems*, Contributions to the theory of non-linear oscillations, Vol. III (1956), p. 17-29.

[5] Z. Opial, *Sur une équation différentielle non linéaire du second ordre*, Ann. Polon. Math. 8 (1960), p. 65-69.

[6] — *Sur la dépendance des solutions d'un système d'équations différentielles de leurs seconds membres. Application aux systèmes presque autonomes*, Ann. Polon. Math. 8 (1960), p. 75-89.

[7] P. Santoro, *Un criterio di limitatezza in futuro delle soluzioni di une equazione differenziale non lineare*, Boll. Un. Mat. Ital., Serie III, Anno XI (1956), p. 432.

[8] G. Sestini, *Criterio di stabilità in un problema di Meccanica non lineare*, Rivista di Mat. Univ. Parma 2 (1951), p. 303-314.

[9] — *Criterio di stabilità in un problema non lineare di meccanica dei sistemi a più gradi di libertà*, Rivista di Mat. Univ. Parma 5 (1954), p. 227-232.

[10] T. Ważewski, *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Ann. Soc. Pol. Math. 23 (1950), p. 112-166.

Reçu par la Rédaction le 11. 3. 1959

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VIII (1960)

Propriétés d'une intégrale de l'équation parabolique dans un domaine non cylindrique

par A. Piskorek (Warszawa)

1. Introduction. On désigne par (X, t) les points de l'espace-temps, $X = (x_1, \ldots, x_n)$ étant un point variable de l'espace euclidien $E^{(n)}$ à n $(n \geqslant 2)$ dimensions, t — la coordonnée du temps.

Dans cet espace-temps nous considérons pour $t \geqslant 0$ un domaine D à $n+1$ dimensions illimité dans la direction de l'axe du temps t (voir [3]).

La frontière du domaine D est composée du domaine borné Ω_0 à n dimensions, qui est contenu dans le plan $t = 0$, et de la surface s à n dimensions (c'est-à-dire une variété à n dimensions dans cet espace-temps); (X, t), (Y, τ), ... désignent les points du domaine D, et (P, t), (Q, τ), ... — les points de la surface s. Pour abréger nous désignerons le point (P, t) (resp. (Q, τ)) par P_t (resp. Q_τ).

Pour un t_0 fixé nous identifions les points (X, t_0) aux points X. Nous désignons la distance de deux points X, Y par $|XY|$.

Nous appelons D_t un domaine borné, partiel du domaine D, situé entre les plans $t = 0$ et $t = \text{const}$. Nous désignons par Ω_t un domaine borné à n dimensions, situé dans le plan $t = \text{const}$, qui est une portion de la frontière du domaine D_t.

Nous appelons s_t la portion fermée de la surface s, située entre les plans $t = 0$ et $t = \text{const}$.

Enfin, désignons par S_t la variété à $n-1$ dimensions, formée par l'intersection de la surface s et du plan $t = \text{const}$.

Soit T une constante positive, arbitraire, finie. Considérons le domaine D_T et supposons que la surface s_T possède, suivant la terminologie de J. Hadamard, une orientation du temps (voir [3]) relative à l'équation aux dérivées partielles du type parabolique:

$$(1) \quad H[u(X, t)] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k(X, t)\frac{\partial u}{\partial x_k} + c(X, t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

où les coefficients $a_{ij}(X, t)$, $b_k(X, t)$, $c(X, t)$ sont continus dans le produit