ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VIII (1960)

Sur une équation différentielle non linéaire du second ordre

par Z. Opial (Kraków)

1. Considérons l'équation différentielle non linéaire du second ordre

$$x''+\varphi(x, x')x'+h(x) = e(t). \tag{1}$$

Dans certaines hypothèses sur les fonctions $\varphi(x, u)$, $h(x)$ et $e(t)$, H. A. Antosiewicz [1] (voir aussi [2] et [3], p. 520) et P. Santoro [4] ont établi que toutes les solutions de l'équation (1), ainsi que leurs dérivées premières, sont bornées pour $t \geqslant 0$. Dans la présente note je me propose d'étudier le cas où les solutions de l'équation (1) sont non seulement bornées, mais tendent vers zéro lorsque t croît indéfiniment.

2. Dans la suite nous supposerons que toutes les fonctions envisagées sont continues. Nous dirons qu'une fonction $\varphi(x, u)$ est définie positive si $\varphi(x, u) > 0$ pour $x^2+u^2 > 0$.

Théorème I. *Supposons qu'il existe une fonction $g(x)$ telle que la fonction $\varphi(x, u)-g(x)u$ soit définie positive, $xh(x) > 0$ pour $x \neq 0$, $\lim_{|x|\to\infty} H(x) = +\infty$ et $0 < a(x) \leqslant A < +\infty$, où*

$$a(x) = \exp\Big(\int_0^x g(u)\,du\Big), \qquad H(x) = \int_0^x a^2(u)h(u)\,du. \tag{2}$$

Supposons enfin que l'on ait

$$\int_0^\infty |e(t)|\,dt < +\infty. \tag{3}$$

Dans ces hypothèses on a, pour toute solution $x(t)$ de l'équation (1)

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} x'(t) = 0. \tag{4}$$

3. Dans la démonstration du théorème I nous aurons besoin d'une proposition générale:

Soient $F(X) = (f_1(X), \ldots, f_n(X))$ *et* $G(X, t) = (g_1(X, t), \ldots, g_n(X, t))$ *deux fonctions vectorielles continues pour tout vecteur* $X = (x_1, \ldots, x_n)$ *et tout* $t \geqslant 0$. *Soit* $X(t)$ *une solution du système d'équations différentielles*

$$X' = F(X) + G(X, t).$$

Si $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = X_0$ *et*

$$\int_0^\infty \|G(X(t), t)\|\,dt < +\infty\,[1],$$

alors $F(X_0) = 0$.

Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi. Pour un indice k on a donc $f_k(X) \geqslant m > 0$ ou $f_k(X) \leqslant m < 0$ dans un voisinage V du point X_0. Pour fixer les idées, supposons que l'on ait la première inégalité. Choisissons un T suffisamment grand pour que l'on ait $X(t) \in V$ pour tout $t \geqslant T$. On a donc pour tout $t \geqslant T$

$$x_k(t) = x_k(T) + \int_T^t f_k(X(t))\,dt + \int_T^t g_k(X(t), t)\,dt$$
$$\geqslant x_k(T) + m(t-T) - \int_T^t \|G(X(t), t)\|\,dt$$

ce qui est en contradiction avec la relation $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = X_0$.

4. **Démonstration du théorème I.** On vérifie sans peine que pour toute solution $x(t)$ de l'équation (1) on a

$$(5) \qquad E'(t) = -\big(\varphi(x, x') - g(x)x'\big)a^2(x)x'^2 + a^2(x)e(t)x',$$

où $E(t) = \frac{1}{2}a^2(x(t))x'^2(t) + H(x(t))$. Il en résulte (cf. [1] et [4]) que les fonctions $x(t)$ et $x'(t)$ sont bornées dans tout l'intervalle $\langle 0, +\infty)$. De la relation (5) il vient

$$(6) \qquad E(t) = E(0) - \int_0^t \big(\varphi(x, x') - g(x)x'\big)a^2(x)x'^2\,dt + \int_0^t a^2(x)e(t)x'\,dt.$$

Donc, de l'inégalité (3) et de l'hypothèse $\varphi(x, x') - g(x)x' \geqslant 0$ il résulte que la fonction $E(t)$ tend vers une limite finie lorsque t tend vers l'infini. Si $\lim E(t) = E = 0$, le théorème I se trouve démontré puisque la fonction $\frac{1}{2}a^2(x)y^2 + H(x)$ est définie positive et, par suite, ne s'annule que pour $x = y = 0$. Supposons donc que l'on ait $E > 0$. La fonction $\varphi(x, x') - g(x)x'$ étant définie positive, il existe une constante $a > 0$ telle que

$$(7) \qquad a^2(x(t))\big(\varphi(x(t), x'(t)) - g(x(t))x'(t)\big) \geqslant a > 0$$

pour tout $t \geqslant 0$. De la relation (6) et de l'inégalité (7) il vient

$$(8) \qquad \int_0^\infty x'^2(t)\,dt < +\infty.$$

Mais en vertu de l'équation (1):

$$x'^2(t) = x'^2(0) + 2\int_0^t x'x''\,dt$$
$$= x'^2(0) - 2\int_0^t \big(\varphi(x, x')x'^2 + h(x)x'\big)dt + 2\int_0^t e(t)x'\,dt.$$

La fonction $x'^2(t)$ est donc une somme de deux fonctions dont l'une possède une dérivée $-2\big(\varphi(x, x')x'^2 + h(x)x'\big)$ bornée dans tout l'intervalle $\langle 0, +\infty)$ et l'autre est à variation bornée dans le même intervalle. L'inégalité (8) n'est donc possible que dans le cas où $\lim\limits_{t\to\infty} x'(t) = 0$. Comme nous l'avons montré, la fonction $E(t)$ tend vers une limite finie lorsque $t \to +\infty$. Par conséquent, il en est de même de la fonction $H(x(t))$. De l'hypothèse $xh(x) > 0$ pour $x \neq 0$ il résulte que la fonction $x(t)$ doit tendre, elle aussi, vers une limite finie x_0. D'après la proposition du nº 3, appliquée à l'équation (1), on doit avoir $h(x_0) = 0$ et, par conséquent, $x_0 = 0$, c'est-à-dire la relation (4).

5. Dans le cas où $g(x) = 0$, on déduit facilement du théorème précédent un théorème analogue au théorème 1 de H. A. Antosiewicz.

THÉORÈME II. *Supposons que la fonction* $\varphi(x, u)$ *soit définie positive,* $xh(x) > 0$ *pour* $x \neq 0$ *et*

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_0^x h(u)\,du = +\infty.$$

Supposons enfin que la fonction $e(t)$ *satisfasse à l'inégalité* (3). *Dans ces hypothèses, on a, pour toute solution* $x(t)$ *de l'équation* (1) *les relations* (4).

6. On peut de même démontrer un théorème analogue au théorème 2 de H. A. Antosiewicz. Considérons, à cet effet, l'équation différentielle

$$(1') \qquad x'' + \big(f(x) + g(x)x'\big)x' + h(x) = e(t)$$

[1] $\|X\|$ désigne $\sqrt{\sum_i x_i^2}$.

et admettons que les fonctions $a(x)$ et $H(x)$ soient définies de la même façon que dans l'énoncé du théorème I (cf. les formules (2)) et que

$$b(x) = \int_0^x a(u)f(u)\,du.$$

THÉORÈME III. *Si l'on a* $xh(x) > 0$, $xb(x) > 0$ *pour* $x \neq 0$, $0 < a(x) \leqslant A < +\infty$, $\lim_{|x|\to\infty} H(x) = +\infty$ *et si la fonction* $e(t)$ *satisfait à l'inégalité* (3), *toute solution* $x(t)$ *de l'équation* (1') *vérifie les relations* (4).

Démonstration. On vérifie aisément que pour toute solution $x(t)$ de l'équation (1') on a

$$F'(t) = -a(x)b(x)h(x) + a(x)e(t)\big(a(x)x' + b(x)\big),$$

où $F(t) = \frac{1}{2}\Big(a\big(x(t)\big)x'(t) + b\big(x(t)\big)\Big)^2 + H\big(x(t)\big)$. Il en résulte (cf. [1]) que les fonctions $x(t)$, $x'(t)$ et $a(x)x' + b(x)$ sont bornées dans tout l'intervalle $\langle 0, +\infty)$. De même qu'au nº 4, on démontre que la fonction $F(t)$ tend vers une limite finie lorsque t tend vers l'infini. De la relation

$$F(t) = F(0) - \int_0^t a(x)b(x)h(x)\,dt + \int_0^t a(x)e(t)\big(a(x)x' + b(x)\big)\,dt$$

il vient

$$\int_0^\infty a(x)b(x)h(x)\,dt < +\infty, \tag{9}$$

puisque $b(x)h(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. La fonction $x(t)$ est bornée dans l'intervalle $\langle 0, +\infty)$, donc $a\big(x(t)\big) \geqslant a > 0$ et, par suite, de l'inégalité (9) on tire

$$\int_0^\infty b(x)h(x)\,dt < +\infty. \tag{10}$$

Nous allons montrer que ce n'est possible que dans le cas où $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Supposons, en effet, que l'on ait

$$\limsup_{t\to\infty} |x(t)| > 0. \tag{11}$$

En raison de l'équation (1') la dérivée seconde de la fonction $x(t)$ est la somme d'une fonction bornée $-\Big(f\big(x(t)\big) + g\big(x(t)\big)x'(t)\Big)x'(t) - h\big(x(t)\big)$ et d'une fonction $e(t)$ qui admet une intégrale finie dans l'intervalle $\langle 0, +\infty)$. De l'inégalité (11) il résulte donc que, pour un $\delta > 0$ convenablement

choisi, la mesure de l'ensemble des points $t \geqslant 0$, pour lesquels $|x(t)| \geqslant \delta$, est infinie. L'inégalité (10) serait donc impossible. On a donc

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0. \tag{12}$$

Il s'ensuit que la fonction $\Big(a\big(x(t)\big)x'(t) + b\big(x(t)\big)\Big)$ converge, pour $t \to +\infty$, vers la même limite que $\sqrt{2F(t)}$. D'autre part, de la relation (12) il vient

$$\lim_{t\to\infty} a\big(x(t)\big) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\infty} b\big(x(t)\big) = 0.$$

La fonction $x'(t)$ tend donc, pour $t \to +\infty$, vers une limite finie, ce qui n'est possible que dans le cas où $\lim_{t\to\infty} x'(t) = 0$.

Le théorème II se trouve ainsi démontré.

Travaux cités

[1] H. A. Antosiewicz, *On non-linear differential equations of the second order with integrable forcing term*, Journ. London Math. Soc. 30 (1955), p. 64-67.

[2] B. Manfredi, *Sulla stabilità del moto di sistemi a più gradi di libertà in condizioni non lineari*, Boll. Unione Mat. Ital., Serie III, Anno XI (1956), p. 64-71.

[3] G. Sansone, R. Conti, *Equazioni differenziali non lineari*, Ed. Cremonese, Roma 1956.

[4] P. Santoro, *Un criterio di limitatezza in futuro delle soluzioni di una equazione differenziale non lineare*, Boll. Unione Mat. Ital., Serie III, Anno XI (1956), p. 432.

Reçu par la Rédaction le 18. 11. 1958