Cette fonction n'est pas dérivable au point $h/2$, elle n'appartient donc pas à la classe de fonctions qui interviennent dans l'énoncé du théorème. Mais, comme $x_0(t)$ peut être approchée convenablement par des fonctions de classe C^1, il en résulte que dans l'inégalité (5) le coefficient $h/4$ est le plus petit possible.

Le théorème se trouve ainsi complètement démontré.

On pourrait démontrer même davantage: *le signe d'égalité dans la formule* (5) *n'est possible que pour les fonctions* $Cx_0(t)$ *où* C *est une constante arbitraire positive*, de sorte que *pour toute fonction* $x(t)$ *de classe* C^1 *satisfaisant aux conditions* (1) *on a dans* (5) *une inégalité forte.*

5. Soit $y(t)$ une fonction de classe C^1 satisfaisant aux conditions (1). Appliquons l'inégalité (5) à la fonction $x(t)=\sqrt{y(t)}$ ce qui nous donne l'inégalité suivante

$$\int_0^h |y'(t)|\,dt \leqslant \frac{h}{8}\int_0^h \frac{y'^2(t)}{y(t)}\,dt. \tag{11}$$

Cela veut dire que la variation totale de la fonction $y(t)$ dans l'intervalle $\langle 0,h\rangle$ se laisse évaluer par l'intégrale de la fonction $y'^2(t)/y(t)$.

De l'inégalité (11) on tire immédiatement

$$\max_{\langle 0,h\rangle}|y(t)| \leqslant \frac{h}{16}\int_0^h \frac{y'^2(t)}{y(t)}\,dt.$$

Travaux cités

[1] G. Hardy, J. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*, Cambridge 1934.

[2] Z. Opial, *Sur une inégalité de C. de la Vallée Poussin dans la théorie de l'équation différentielle linéaire du second ordre*, Ann. Polon. Math. 6 (1959), p. 83-87.

Reçu par la Rédaction le 18. 2. 1959

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VIII (1960)

Sur les zéros d'un polynôme contenant des paramètres arbitraires

par W. Jankowski (Poznań)

Je me propose, dans ce travail, de compléter la démonstration du théorème suivant:

Le polynôme

$$(z+P)^p+az^{p+1}+bz^{p+2} \tag{1}$$

a au moins p zéros dont le module ne surpasse pas le nombre

$$\frac{2(p+1)+\sqrt{2p(p+1)}}{2}\cdot|P|.$$

La démonstration de ce théorème a été donnée[1] dans les cas suivants: 1° $|a/b|\leqslant R$, 2° $R/\lambda\leqslant|a/b|$ et, en partie, dans le cas $R<|a/b|<R/\lambda$, où

$$R=\frac{2(p+1)+\sqrt{2p(p+1)}}{2},\qquad \lambda=\frac{2(p+1)-\sqrt{2p(p+1)}}{2(p+2)}.$$

Nous établirons le théorème dans le cas où $R<|a/b|<R/\lambda$. Nous avons déjà démontré que si R est la borne supérieure du module de p zéros du polynôme

$$(z+1)^p+az^{p+1}+bz^{p+2}, \tag{2}$$

le nombre $R|P|$ est la borne supérieure du module de p zéros du polynôme (1).

Nous écrivons le polynôme (2) sous la forme

$$z^{p+1}(-a-bz)\left[\frac{(z+1)^p}{z^{p+1}(-a-bz)}-1\right]. \tag{3}$$

Nous admettons que $-\pi\leqslant a=\arg a<\pi$, $-\pi+a\leqslant\beta=\arg b<\pi+a$, d'où $-\pi<a-\beta\leqslant\pi$. Soit $z=Re^{i\vartheta}$, où $a-\beta\leqslant\vartheta<2\pi+a-\beta$, l'é-

[1] W. Jankowski, *Sur les zéros des polynômes contenant des paramètres arbitraires*, Annales U. M. C. S. Lublin, Sectio A, 5 (1951), p. 31-92.

quation de la circonférence C. L'expression $(z+1)^p/z^{p+1}(-a-bz)$, où $z=Re^{i\vartheta}$, sera désignée par $f(z)$ ou encore, R étant constant, par $f(\vartheta)$. Nous désignerons par Γ la transformée de la circonférence C par la fonction $w=f(z)$. La courbe Γ est une courbe fermée et peut se couper elle-même, mais elle ne passe pas par l'origine, puisque $f(z)\neq 0$, lorsque z appartient à C. En désignant par $W(z)$ le polynôme (2) et par Z le nombre des zéros de ce polynôme à l'intérieur de C nous avons

$$Z=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{W'(z)}{W(z)}dz=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg W(z)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg z^{p+1}+\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg(-a-bz)+\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg[f(z)-1]$$

$$=p+1+\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)-1}dz=p+1+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{dw}{w-1}=p+1+$$

$$+\operatorname{ind}_\Gamma(1)\,(^2).$$

La démonstration consistera à prouver que l'indice du point 1 par rapport à la courbe Γ n'est pas inférieur à -1. L'expression $\bar{f}(\vartheta)$, obtenue de l'expression $f(\vartheta)$ en y remplaçant α, β et ϑ par $-\alpha$, $-\beta$ et $-\vartheta$, est la conjuguée de $f(\vartheta)$ et la courbe $\bar{\Gamma}$, transformée de la circonférence C par la fonction $w=\bar{f}(\vartheta)$, est symétrique de la courbe Γ par rapport à l'axe réel. Il suffit donc de se borner, dans la démonstration, au cas $0\leqslant\alpha-\beta\leqslant\pi$, car si pour $a=|a|e^{i\alpha}$, $b=|b|e^{i\beta}$ et $0\leqslant\arg a-\arg b\leqslant\pi$ $f(\vartheta)$ décrit la courbe Γ, l'expression $f(\vartheta)$ décrit pour $\bar{a}=|a|e^{-i\alpha}$ et $\bar{b}=|b|e^{-i\beta}$, c'est-à-dire $-\pi\leqslant\arg\bar{a}-\arg\bar{b}\leqslant 0$, la courbe $\bar{\Gamma}$ symétrique de la courbe Γ par rapport à l'axe réel. Nous établirons d'abord quelques lemmes.

Lemme 1. *Si $R<|a/b|<R/\lambda$, l'intervalle $\langle\alpha-\beta, 2\pi+\alpha-\beta)$ contient deux racines au plus de l'équation* $\dfrac{d}{d\vartheta}\arg f(z)=0$.

Démonstration. Nous avons

$$\frac{d}{d\vartheta}\arg f(z)=\frac{d}{d\vartheta}\operatorname{im}[\log f(z)]=\operatorname{im}\left[\frac{izf'(z)}{f(z)}\right]=\operatorname{re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]$$

$$=pR\frac{R+\cos\vartheta}{R^2+1+2R\cos\vartheta}-(p+1)-R\frac{R+|a/b|\cos(\vartheta-\alpha+\beta)}{R^2+|a/b|^2+2R|a/b|\cos(\vartheta-\alpha+\beta)},$$

où $\alpha=\arg a$, $\beta=\arg b$.

(²) $\Delta_C\arg(-a-bz)=0$, car $|a|>|b|R=|bz|$.

L'équation $\dfrac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)=0$ prend, après quelques transformations, la forme

$$2(p+3)R^2\left|\frac{a}{b}\right|\cos(\alpha-\beta)\cos^2\vartheta+2(p+3)R^2\left|\frac{a}{b}\right|\sin(\alpha-\beta)\cos\vartheta\sin\vartheta+$$

$$+\left\{[(2p+3)+3R^2]R\left|\frac{a}{b}\right|\cos(\alpha-\beta)+(p+2)R\left|\frac{a}{b}\right|^2+(p+4)R^3\right\}\cos\vartheta+$$

$$+[(2p+3)+3R^2]R\left|\frac{a}{b}\right|\sin(\alpha-\beta)\sin\vartheta+\left[2R^4+R^2\left|\frac{a}{b}\right|^2+(p+2)R^2+\right.$$

$$\left.+(p+1)\left|\frac{a}{b}\right|^2\right]=0.$$

En posant $\cos\vartheta=x$, $\sin\vartheta=y$, nous obtenons le système d'équations

$$x^2+y^2=1,\qquad F(x,y)=0, \tag{4}$$

où

$$F(x,y)\equiv 2(p+3)R^2\left|\frac{a}{b}\right|\cos(\alpha-\beta)\cdot x^2+2(p+3)R^2\left|\frac{a}{b}\right|\sin(\alpha-\beta)\cdot xy+$$

$$+\left\{[(2p+3)+3R^2]R\left|\frac{a}{b}\right|\cos(\alpha-\beta)+(p+2)R\left|\frac{a}{b}\right|^2+(p+4)R^3\right\}x+[(2p+3)+$$

$$+3R^2]R\left|\frac{a}{b}\right|\sin(\alpha-\beta)\cdot y+\left[2R^4+R^2\left|\frac{a}{b}\right|^2+(p+2)R^2+(p+1)\left|\frac{a}{b}\right|^2\right].$$

L'équation $F(x,y)=0$ représente une hyperbole dont le centre 0 a les coordonnées

$$x_0=-\frac{3R^2+2p+3}{2(p+3)R},$$

$$y_0=\frac{(3R^2+2p+3)|a/b|\cos(\alpha-\beta)-(p+4)R^2-(p+2)|a/b|^2}{2(p+3)R|a/b|\sin(\alpha-\beta)}.$$

Nous passons du système Oxy au système O_1uv que l'on obtient en effectuant d'abord la translation $x=x_1+x_0$, $y=y_1+y_0$, et ensuite la rotation du système $O_1x_1y_1$ d'angle $(\alpha-\beta)/2$. Dans le système O_1uv l'équation de l'hyperbole prend la forme

$$2(p+3)R^2\left|\frac{a}{b}\right|\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}u^2-2(p+3)R^2\left|\frac{a}{b}\right|\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}v^2+$$

$$+\frac{p(R^2-1)(R^2-|a/b|^2)}{2(p+3)}=0.$$

Les directions asymptotiques de cette hyperbole dans le système Oxy sont déterminées par l'équation

$$2(p+3)R^2\left|\frac{a}{b}\right|\cos(\alpha-\beta)x^2+2(p+3)R^2\left|\frac{a}{b}\right|\sin(\alpha-\beta)xy=0.$$

Elles sont parallèles aux droites $x=0$ et $\cos(\alpha-\beta)\cdot x+\sin(\alpha-\beta)y=0$. L'une des asymptotes de l'hyperbole est donc la droite $x=-\dfrac{3R^2+2p+3}{2(p+3)R}$. L'abscisse du sommet de l'hyperbole $F(x,y)=0$, contenu dans le demi-plan $x>-\dfrac{3R^2+2p+3}{2(p+3)R}$, est égale à l'expression

$$-\frac{3R^2+2p+3}{2(p+3)R}+\sqrt{\frac{p(R^2-1)(|a/b|^2-R^2)}{4(p+3)^2R^2|a/b|}}$$

et elle n'est pas supérieure à -1, puisque l'inégalité

$$-\frac{3R^2+2p+3}{2(p+3)R}+\sqrt{\frac{p(R^2-1)(|a/b|^2-R^2)}{4(p+3)^2R^2|a/b|}}\leqslant -1$$

fournit, après transformation, l'inégalité

$$-p(R^2-1)\cdot\left(\left|\frac{a}{b}\right|^2-R^2\right)+[3R^2-2(p+3)R+(2p+3)]^2\left|\frac{a}{b}\right|\geqslant 0,$$

qui est vérifiée lorsque $R<|a/b|<R/\lambda$.

L'asymptote $x=-\dfrac{2R^2+2p+3}{2(p+3)R}$ ne coupe pas la circonférence $x^2+y^2=1$, car $-\dfrac{3R^2+2p+3}{2(p+3)R}<-1$. La branche de l'hyperbole qui est contenue dans le demi-plan $x<-\dfrac{3R^2+2p+3}{2(p+3)R}$ ne coupe donc pas la circonférence $x^2+y^2=1$. En tenant compte de la position du sommet de la seconde branche, la circonférence $x^2+y^2=1$ est coupée par un arc au plus de cette branche, du sommet à l'infini. Le système (4) a donc deux solutions au plus. Par conséquent l'équation $\dfrac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)=0$ admet dans l'intervalle $\langle\alpha-\beta,2\pi+\alpha-\beta)$ deux racines au plus.

Désignons $(z+1)^p/z^{p+1}$ par $u(\vartheta)$ et $(-a-bz)$ par $v(\vartheta)$. Alors on a $f(\vartheta)=u(\vartheta)/v(\vartheta)$. Nous admettons que $\arg u(0)=2\pi$.

Nous allons prouver que *dans l'intervalle $\langle 0,\pi\rangle$ on a l'inégalité*

$$\tfrac{1}{2}\pi<\arg u(\vartheta)-\arg u(\pi+\vartheta)\leqslant\pi. \tag{5}$$

Dans ce but nous étudierons la variation de la fonction $\varphi(\vartheta)=\arg u(\vartheta)-\arg u(\pi+\vartheta)$ dans l'intervalle $\langle 0,\pi\rangle$. Nous avons

$$\frac{d}{d\vartheta}\arg u(\vartheta)=pR\frac{R+\cos\vartheta}{R^2+1+2R\cos\vartheta}-(p+1)\leqslant\frac{pR}{R-1}-(p+1)=\frac{-R+p+1}{R-1}<0,$$

puisque $R>p+1$, et

$$\Delta_C\arg u(\vartheta)=\frac{1}{i}\int_C\frac{u'}{u}\,dz=(p-p-1)2\pi=-2\pi.$$

En admettant $\arg u(0)=2\pi$ nous avons $\arg u(2\pi)=0$ et $\arg u(\pi)=\arg[-(R-1)^p/R^{p+1}]=\pi$. Il en résulte que

$$\varphi(0)=\varphi(\pi)=\pi.$$

La fonction $\varphi(\vartheta)$ admet dans l'intervalle $\langle 0,\pi\rangle$ sa plus petite valeur pour $\vartheta=\frac{1}{2}\pi$, puisque

$$\varphi'(\vartheta)=pR\frac{R+\cos\vartheta}{R^2+1+2R\cos\vartheta}-(p+1)-pR\frac{R-\cos\vartheta}{R^2+1-2R\cos\vartheta}+(p+1)=-2pR(R^2-1)\frac{\cos\vartheta}{(R^2+1)^2-4R^2\cos^2\vartheta}.$$

Dans l'intervalle $\langle 0,\pi\rangle$ l'inégalité $\varphi(\frac{1}{2}\pi)\leqslant\varphi(\vartheta)\leqslant\pi$ est donc vérifiée.

Pour établir l'inégalité (5) il suffit donc de prouver que $\varphi(\frac{1}{2}\pi)-\frac{1}{2}\pi>0$. Nous avons

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\arg\frac{(Ri+1)^p(-Ri)^{p+1}}{(Ri)^{p+1}(-Ri+1)^{p+1}}=\arg\frac{(-1)(Ri+1)^p}{(Ri-1)^p}=-2p\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{R}+\pi.$$

En profitant de l'inégalité $0<\operatorname{arctg}1/R<1/R$ nous aurons

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}=-2p\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{R}+\frac{\pi}{2}>-\frac{2p}{R}+\frac{\pi}{2}>-\frac{4p}{2(p+1)+\sqrt{2p(p+1)}}+\frac{3}{2}>\frac{-4p}{2(p+1)+p\sqrt{2}}+\frac{3}{2}=\frac{(3\sqrt{2}-2)p+6}{2[(2+\sqrt{2})p+2]}>0,$$

puisque $p\geqslant 1$. Nous avons ainsi démontré que l'inégalité (5) est satisfaite dans l'intervalle $\langle 0,\pi\rangle$.

Les valeurs de la fonction $v(\vartheta)=-a-bz=-|a|e^{i\alpha}-|b|Re^{i(\vartheta+\beta)}$ appartiennent à la circonférence de centre $-a$ et de rayon $|b|R<|a|$.

Admettons que

$$0\leqslant\arg f(\alpha-\beta)<2\pi. \tag{6}$$

Nous allons prouver que si cette condition est vérifiée et si $0 \leqslant \alpha-\beta \leqslant \pi$, on a

$$-\pi < \arg v(\alpha-\beta) \leqslant 2\pi.$$

Nous avons admis (p. 36) que $\arg u(0) = 2\pi$. Il en résulte que pour $0 \leqslant \alpha-\beta \leqslant \pi$ on a $\pi \leqslant \arg u(\alpha-\beta) \leqslant 2\pi$ et par suite

$$-\pi < \arg v(\alpha-\beta) = \arg u(\alpha-\beta) - \arg f(\alpha-\beta) \leqslant 2\pi,$$

$$\arg v(\vartheta) = \arg\left[-|b|e^{i\alpha}\left(\left|\frac{a}{b}\right| + Re^{i(\vartheta-\alpha+\beta)}\right)\right] = \pi+\alpha+\arg\left(\left|\frac{a}{b}\right| + Re^{i(\vartheta-\alpha+\beta)}\right)$$

$$= \pi+\alpha+\arg\left(\left|\frac{a}{b}\right| + Re^{i(\vartheta-\alpha+\beta-2\pi)}\right).$$

Si $\vartheta = n\pi+\alpha-\beta$ $(n = 0, 1, 2)$, on a $\arg v(\vartheta) = \pi+\alpha$, car $|a/b| > R$. Nous avons donc

$$\arg v(n\pi+\alpha-\beta) = \arg v(\alpha-\beta) = \pi+\alpha \quad (n = 0, 1, 2). \tag{7}$$

Si ϑ appartient à l'intervalle $(\alpha-\beta, \pi+\alpha-\beta)$, on a

$$\arg v(\alpha-\beta) = \pi+\alpha < \arg v(\vartheta) < \pi+\alpha+\tfrac{1}{2}(\vartheta-\alpha+\beta) \tag{7'}$$

$$= \arg v(\alpha-\beta)+\tfrac{1}{2}(\vartheta-\alpha+\beta) < \arg v(\alpha-\beta)+\tfrac{1}{2}\pi,$$

puisque $0 < \vartheta-\alpha+\beta < \pi$ et de là $0 < \arg(|a/b|+Re^{i(\vartheta-\alpha+\beta)}) < \frac{1}{2}(\vartheta-\alpha+\beta) < \frac{1}{2}\pi$.

Si ϑ appartient à l'intervalle $(\pi+\alpha-\beta, 2\pi+\alpha-\beta)$, on a

$$\arg v(\alpha-\beta)-\tfrac{1}{2}\pi < \arg v(\alpha-\beta)+\tfrac{1}{2}(\vartheta-\alpha+\beta-2\pi) \tag{7''}$$

$$< \arg v(\vartheta) < \pi+\alpha = \arg v(\alpha-\beta),$$

puisque $-\pi < \vartheta-\alpha+\beta-2\pi < 0$ et de là $-\frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2}(\vartheta-\alpha+\beta)-\pi < \arg(|a/b|+Re^{i(\vartheta-\alpha+\beta-2\pi)}) < 0$.

Lemme 2. *Si $0 \leqslant \alpha-\beta \leqslant \pi$ et $0 \leqslant \arg f(\alpha-\beta) < 2\pi$, on a, dans l'intervalle $(\alpha-\beta, 2\pi+\alpha-\beta)$, l'inégalité*

$$\arg f(\alpha-\beta)-2\pi < \arg f(\vartheta) < \arg f(\alpha-\beta).$$

Démonstration. Si ϑ appartient à l'intervalle $(\alpha-\beta, \pi+\alpha-\beta)$, on trouve, en profitant des inégalités (5) et (7')

$$\arg f(\alpha-\beta)-\tfrac{3}{2}\pi = \arg u(\alpha-\beta)-\pi-\arg v(\alpha-\beta)-\tfrac{1}{2}\pi$$

$$\leqslant \arg u(\pi+\alpha-\beta)-\arg v(\alpha-\beta)-\tfrac{1}{2}\pi$$

$$\arg < \frac{u(\vartheta)}{v(\vartheta)} = \arg f(\vartheta) < \arg\frac{u(\alpha-\beta)}{v(\alpha-\beta)} = \arg f(\alpha-\beta).$$

Si $\vartheta = \pi+\alpha-\beta$, on a, en tenant compte de l'inégalité (5) et de l'égalité (7),

$$\arg f(\alpha-\beta)-\pi = \arg u(\alpha-\beta)-\pi-\arg v(\alpha-\beta)$$

$$\leqslant \arg u(\pi+\alpha-\beta)-\arg v(\pi+\alpha-\beta)$$

$$= \arg f(\vartheta) < \arg u(\alpha-\beta)-\tfrac{1}{2}\pi-\arg v(\alpha-\beta)$$

$$= \arg f(\alpha-\beta)-\tfrac{1}{2}\pi.$$

Si ϑ appartient à l'intervalle $(\pi+\alpha-\beta, 2\pi+\alpha-\beta)$, on obtient, en raison des inégalités (5) et (7''),

$$\arg f(\alpha-\beta)-2\pi = \arg u(\alpha-\beta)-2\pi-\arg v(\alpha-\beta)$$

$$< \arg\frac{u(\vartheta)}{v(\vartheta)} = \arg f(\vartheta) < \arg u(\pi+\alpha-\beta)-\arg v(\alpha-\beta)+\tfrac{1}{2}\pi$$

$$< \arg u(\alpha-\beta)-\tfrac{1}{2}\pi-\arg v(\alpha-\beta)+\tfrac{1}{2}\pi = \arg f(\alpha-\beta).$$

La démonstration du lemme 2 est ainsi achevée.

Lemme 3. *Si $0 \leqslant \alpha-\beta \leqslant \pi$ et $0 \leqslant \arg f(\alpha-\beta) < 2\pi$, l'équation*

$$\arg f(z) = 0 \tag{8}$$

a, dans l'intervalle $\langle\alpha-\beta, 2\pi+\alpha-\beta)$, au moins une et au plus trois racines.

Démonstration. Si $R < \left|\frac{a}{b}\right|$, la fonction $f(z) = \dfrac{(z+1)^p}{z^{p+1}(-a-bz)}$ a à l'intérieur de C p zéros et $p+1$ pôles. Donc

$$\Delta_C \arg f(z) = \frac{1}{i}\int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi(p-p-1) = -2\pi.$$

D'après le lemme 2 on a dans l'intervalle $(\alpha-\beta, 2\pi+\alpha-\beta)$

$$\arg f(\alpha-\beta)-2\pi < \arg f(\vartheta) < \arg f(\alpha-\beta) < 2\pi.$$

A cause du lemme 2 et de la continuité de la fonction $f(z)$, lorsque z décrit la circonférence C, et en raison de l'égalité $\Delta_C \arg f(z) = -2\pi$, la fonction $\arg f(z)$ admet dans l'intervalle $\langle\alpha-\beta, 2\pi+\alpha-\beta)$ chaque valeur de l'intervalle $(\arg f(2\pi+\alpha-\beta), \arg f(\alpha-\beta)\rangle$ au moins une fois et, eu égard au lemme 1, au plus trois fois. Par conséquent l'équation (8) a dans l'intervalle $\langle\alpha-\beta, 2\pi+\alpha-\beta)$ au moins une et au plus trois racines (fig. 1).

Désignons les trois racines distinctes de l'équation (8) dans l'intervalle $\langle\alpha-\beta, 2\pi+\alpha-\beta)$ par ϑ_1, ϑ_2 et ϑ_3 de telle manière que

$$\alpha-\beta \leqslant \vartheta_1 \leqslant \vartheta_2 \leqslant \vartheta_3 < 2\pi+\alpha-\beta,$$

et que $\left[\dfrac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\vartheta_2} \geqslant 0$.

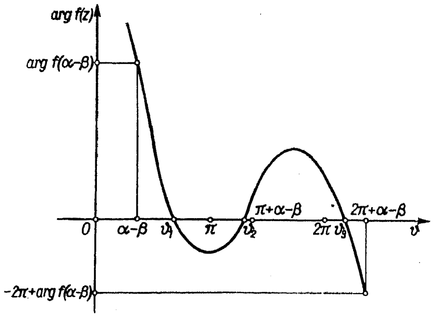

Fig. 1

LEMME 4a. *Si* $0 \leqslant \alpha-\beta \leqslant \pi$, *on a* $\alpha-\beta < \frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2) < \pi+\alpha-\beta$.

Démonstration. A cause de l'inégalité $\alpha-\beta \leqslant \vartheta_1 \leqslant \vartheta_2$, l'égalité $\alpha-\beta = \frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2)$ a lieu lorsque $\alpha-\beta = \vartheta_1 = \vartheta_2$; mais on aurait alors $\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\alpha-\beta} = 0$. Cependant on a

$$\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\alpha-\beta} \leqslant \frac{-R+p+1}{R-1} - \frac{R}{R+|a/b|} < 0.$$

Donc $\alpha-\beta < \frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2)$.

Si $\vartheta_2 < \pi+\alpha-\beta$, l'inégalité $\alpha-\beta \leqslant \vartheta_1 \leqslant \vartheta_2$ entraîne $\alpha-\beta < \frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2) < \pi+\alpha-\beta$.

Si $\vartheta_2 = \pi+\alpha-\beta$, on ne saurait avoir $\vartheta_1 = \vartheta_2$, puisque l'égalité $\vartheta_1 = \vartheta_2$ a lieu lorsque $\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\vartheta_1} = 0$ et $\left[\frac{d^2}{d\vartheta^2}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\vartheta_1} \geqslant 0$. Mais l'expression

$$\left[\frac{d^2}{d\vartheta^2}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\pi+\alpha-\beta} = pR(R^2-1)\frac{\sin(\pi+\alpha-\beta)}{[R^2+1+2R\cos(\pi+\alpha-\beta)]^2}$$

n'est pas supérieure à zéro. La condition $\left[\frac{d^2}{d\vartheta^2}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\vartheta_1} \geqslant 0$ ne pourrait donc être remplie que pour $\alpha-\beta = 0$ ou π. Si $\alpha-\beta = 0$ ou π, on a $\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\pi+\alpha-\beta} \neq 0$. Donc $\vartheta_1 < \vartheta_2$ et par suite $\alpha-\beta < \frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2) < \pi+\alpha-\beta$.

Si $\pi+\alpha-\beta < \vartheta_2 < 2\pi+\alpha-\beta$, $0 < \alpha-\beta < \pi$ et $\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\vartheta_2} \geqslant 0$,

on trouve

$$\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=2(\pi+\alpha-\beta)-\vartheta_2} \geqslant \left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=2(\pi+\alpha-\beta)-\vartheta_2} - \left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\vartheta_2}$$

$$= pR\frac{R+\cos[\vartheta_2-2(\alpha-\beta)]}{R^2+1+2R\cos[\vartheta_2-2(\alpha-\beta)]} - pR\frac{R+\cos\vartheta_2}{R^2+1+2R\cos\vartheta_2}$$

$$= 2pR(R^2-1)\frac{\sin(\beta-\alpha)\sin(\vartheta_2-\alpha+\beta)}{\{R^2+1+2R\cos[\vartheta_2-2(\alpha-\beta)]\}\cdot(R^2+1+2R\cos\vartheta_2)} > 0.$$

Il en résulte que $\alpha-\beta \leqslant \vartheta_1 < 2(\pi+\alpha-\beta)-\vartheta_2$, puisque $\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\vartheta_1} \leqslant 0$. On a donc $\alpha-\beta < \frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2) < \pi+\alpha-\beta$.

Si $\pi+\alpha-\beta < \vartheta_2 < 2\pi+\alpha-\beta$, $\alpha-\beta = 0$ ou π et $\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\vartheta_2} > 0$, on a $\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=2(\pi+\alpha-\beta)-\vartheta_2} > 0$, d'où $\alpha-\beta < \frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2) < \pi+\alpha-\beta$.

Si $\pi+\alpha-\beta < \vartheta_2 < 2\pi+\alpha-\beta$, $\alpha-\beta = 0$ ou π et $\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\vartheta_2} = 0$, on a $\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=2(\pi+\alpha-\beta)-\vartheta_2} = 0$, d'où $\alpha-\beta < \frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2) \leqslant \pi+\alpha-\beta$.

On voit donc que l'égalité $\frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2) = \pi+\alpha-\beta$ est impossible, car l'équation (8) aurait alors deux racines doubles distinctes, ce qui est en contradiction avec le lemme 3.

LEMME 4b. *Si* $0 \leqslant \alpha-\beta \leqslant \pi$, *on a* $\pi < \frac{1}{2}(\vartheta_2+\vartheta_3) < 2\pi+\alpha-\beta$.

Démonstration. Nous prouverons d'abord que $\vartheta_2 = \pi$ entraîne $\vartheta_3 > \pi$. Supposons que $\vartheta_2 = \vartheta_3 = \pi$. On aurait alors $\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\pi} = 0$ et $\left[\frac{d^2}{d\vartheta^2}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\pi} \leqslant 0$. Mais

$$\left[\frac{d^2}{d\vartheta^2}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\pi} = R\left|\frac{a}{b}\right|\left(\left|\frac{a}{b}\right|^2 - R^2\right)\frac{\sin(\pi-\alpha+\beta)}{[R^2+|a/b|^2+2R|a/b|\cos(\pi-\alpha+\beta)]^2}.$$

Donc la condition $\left[\frac{d^2}{d\vartheta^2}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\pi} \leqslant 0$ est remplie lorsque $\alpha-\beta = 0$ ou π. Cependant, lorsque $\alpha-\beta = 0$ ou π, on a

$$\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\pi}=\frac{pR}{R-1}-(p+1)-\frac{R}{R\pm|a/b|}\neq 0\ [3].$$

L'hypothèse $\vartheta_2=\vartheta_3=\pi$ était donc fausse.

Si $\alpha-\beta<\vartheta_2<\pi$, $0<\alpha-\beta<\pi$ et $\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\vartheta_2}\geqslant 0$, on a

$$\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=2\pi-\vartheta_2}\geqslant\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=2\pi-\vartheta_2}-\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\vartheta_2}$$

$$=R\frac{R+\left|\frac{a}{b}\right|\cos(\vartheta_2-\alpha+\beta)}{R^2+\left|\frac{a}{b}\right|^2+2R\left|\frac{a}{b}\right|\cos(\vartheta_2-\alpha+\beta)}-R\frac{R+\left|\frac{a}{b}\right|\cos(\vartheta_2+\alpha-\beta)}{R^2+\left|\frac{a}{b}\right|^2+2R\left|\frac{a}{b}\right|\cos(\vartheta_2+\alpha-\beta)}$$

$$=2|a/b|R(|a/b|^2-R^2)\times$$

$$\times\frac{\sin\vartheta_2\sin(\alpha-\beta)}{\left[R^2+\left|\frac{a}{b}\right|^2+2R\left|\frac{a}{b}\right|\cos(\vartheta_2-\alpha+\beta)\right]\left[R^2+\left|\frac{a}{b}\right|^2+2R\left|\frac{a}{b}\right|\cos(\vartheta_2+\alpha-\beta)\right]}>0.$$

Il en résulte que $2\pi-\vartheta_2<\vartheta_3<2\pi+\alpha-\beta$, puisque $\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\vartheta_3}\leqslant 0$. On a donc $\pi<\frac{1}{2}(\vartheta_2+\vartheta_3)<2\pi+\alpha-\beta$.

Si $\alpha-\beta<\vartheta_2<\pi$, $\alpha-\beta=0$ ou π et $\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\vartheta_2}>0$, on a $\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=2\pi-\vartheta_2}>0$, d'où $\pi<\frac{1}{2}(\vartheta_2+\vartheta_3)<2\pi+\alpha-\beta$.

Si $\alpha-\beta<\vartheta_2<\pi$, $\alpha-\beta=0$ ou π et $\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\vartheta_2}=0$, on a $\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=2\pi-\vartheta_2}=0$. Par suite $\pi\leqslant\frac{1}{2}(\vartheta_2+\vartheta_3)<2\pi+\alpha-\beta$. L'égalité $\frac{1}{2}(\vartheta_2+\vartheta_3)=\pi$ est pourtant impossible, car l'équation (8) aurait alors deux racines distinctes doubles, en contradiction avec le lemme 3. Le lemme 4b est ainsi démontré.

[3]
$$\frac{pR}{R-1}-(p+1)-\frac{R}{R+|a/b|}=\frac{-R+p+1}{R-1}-\frac{R}{R+|a/b|}<0,$$
$$\frac{pR}{R-1}-(p+1)+\frac{R}{|a/b|-R}>\frac{-R+p+1}{R-1}+\frac{R}{R/\lambda-R}=0.$$

Lemme 4c. *Si $0\leqslant\alpha-\beta\leqslant\vartheta_1\leqslant B$, où B est la racine de l'équation*

$$\arg u(\vartheta)-\tfrac{1}{2}\vartheta-\tfrac{3}{2}\pi=0, \tag{9}$$

ϑ_2 et ϑ_3 n'existent pas.

Démonstration. Nous établirons d'abord que l'équation (9) a dans l'intervalle $\langle 0,2\pi\rangle$ une seule racine et que celle-ci est inférieure à $\frac{1}{2}\pi$. Dans ce but, désignons le premier membre de l'équation (9) par $h(\vartheta)$. Nous avons $h(0)=\frac{1}{2}\pi$, $h(\frac{1}{2}\pi)=\arg u(\frac{1}{2}\pi)-\frac{1}{4}\pi-\frac{3}{2}\pi<\frac{3}{2}\pi-\frac{7}{4}\pi=-\frac{1}{4}\pi<0$ [4] *et* $h'(\vartheta)<0$, puisque $\frac{d}{d\vartheta}\arg u(\vartheta)<0$. Il en résulte que l'unique racine de l'équation (9) dans l'intervalle $\langle 0,2\pi\rangle$ appartient à l'intervalle $(0,\frac{1}{2}\pi)$.

Si $0\leqslant\alpha-\beta\leqslant\vartheta_1\leqslant B$, on a $\alpha-\beta>\pi$, car en vertu de l'inégalité (7')

$$\pi+\tfrac{1}{2}(\pi+B)=\arg u(B)\leqslant\arg u(\vartheta_1)=\arg v(\vartheta_1)<\pi+\tfrac{1}{2}(\vartheta_1+\alpha+\beta)$$
$$\leqslant\pi+\tfrac{1}{2}(B+\alpha+\beta).$$

Supposons que l'équation (8) ait trois racines. On aurait alors, d'après le lemme 4b, $\arg u(\vartheta_3)<\pi$, puisque $\vartheta_3>\pi$. Considérons deux cas: 1. $\pi<\vartheta_3\leqslant\pi+\alpha-\beta$, 2. $\pi\leqslant\pi+\alpha-\beta<\vartheta_3<2\pi+\alpha-\beta$.

1. De l'inégalité (7') et de l'égalité (7) il s'ensuit

$$\tfrac{1}{2}(\pi+\alpha+\beta)<\tfrac{1}{2}(\vartheta_3+\alpha+\beta)\leqslant\arg v(\alpha-\beta)-\tfrac{1}{2}\pi<\arg v(\alpha-\beta)\leqslant\arg v(\vartheta_3)$$
$$=\arg u(\vartheta_3)<\pi,$$

ce qui est impossible, puisque $\alpha+\beta>\pi$.

2. En raison de l'inégalité (7'') et de l'égalité (7) nous aurions

$$\tfrac{1}{2}(\pi+\alpha+\beta)<\tfrac{1}{2}(\vartheta_3+\alpha+\beta)<\arg v(\vartheta_3)=\arg u(\vartheta_3)<\pi$$

ce qui est impossible, car $\alpha+\beta>\pi$. Par conséquent, si l'hypothèse du lemme 4c est vérifiée, ϑ_2 et ϑ_3 n'existent pas.

Lemme 4d. *Si $B<\vartheta_1<\pi$, on a $\vartheta_3<2\pi-B$.*

Démonstration. Si $B<\vartheta_1<\pi$, on a $\alpha+\beta>-\pi$, puisque, en vertu de (7) et (7'), $\pi<\arg u(\vartheta_1)=\arg v(\vartheta_1)<\pi+\frac{1}{2}(\vartheta_1+\alpha+\beta)<\pi+\frac{1}{2}(\pi+\alpha+\beta)$.

[4] Dans l'intervalle $(0,\pi)$ on a $g(\vartheta)=\arg u(\vartheta)-2\pi+\vartheta<0$ puisque

$$g(0)=g(\pi)=0,\quad g'(\vartheta)=-p\frac{1+R\cos\vartheta}{R^2+1+2R\cos\vartheta},$$

$$g''(\vartheta)=pR(R^2-1)\frac{\sin\vartheta}{(R^2+1+2R\cos\vartheta)^2}>0.$$

Nous allons prouver que l'intervalle $\langle 2\pi-B, 2\pi+\alpha-\beta)$ ne contient pas de racines de l'équation (8). Dans la démonstration nous distinguerons deux cas: 1. $\pi+\alpha-\beta \leqslant 2\pi-B$, 2. $2\pi-B < \pi+\alpha-\beta$.

Premier cas. Si $\pi+\alpha-\beta \leqslant 2\pi-B \leqslant \vartheta < 2\pi+\alpha-\beta$, en trouve, d'après (7'') et (7),

$$\arg u(\alpha-\beta)-2\pi < \arg u(\vartheta) \leqslant \arg u(2\pi-B) = 2\pi-\arg u(B)\ (^5)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\pi-B) \leqslant \tfrac{1}{2}(\vartheta-\pi) < \tfrac{1}{2}(\vartheta+\alpha+\beta) < \arg v(\vartheta) < \arg v(\alpha-\beta).$$

D'où

$$-2\pi+\arg f(\alpha-\beta) = \arg u(\alpha-\beta)-2\pi-\arg v(\alpha-\beta) < \arg f(\vartheta) < 0,$$

donc l'équation (8) n'est pas vérifiée.

Second cas. Si $2\pi-B \leqslant \vartheta < \pi+\alpha-\beta$, on obtient, d'après (7'), (7) et (5),

$$\arg u(\alpha-\beta)-\pi \leqslant \arg u(\pi+\alpha-\beta) < \arg u(\vartheta) \leqslant \arg u(2\pi-B)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\pi-B) \leqslant \tfrac{1}{2}(\vartheta-\pi) < \tfrac{1}{2}(\vartheta+\alpha+\beta) < \arg v(\alpha-\beta)-\tfrac{1}{2}\pi$$
$$< \arg v(\alpha-\beta) < \arg v(\vartheta) < \arg v(\alpha-\beta)+\tfrac{1}{2}\pi.$$

D'où

$$-\tfrac{3}{2}\pi+\arg f(\alpha-\beta)$$
$$= \arg u(\alpha-\beta)-\pi-\arg v(\alpha-\beta)-\tfrac{1}{2}\pi < \arg\frac{u(\vartheta)}{v(\vartheta)} = \arg f(\vartheta) < 0$$

et on voit que l'équation (8) n'est pas vérifiée.

Si $2\pi-B < \pi+\alpha-\beta \leqslant \vartheta < 2\pi+\alpha-\beta$, on obtient, d'après (7'') et (7),

$$\arg u(\alpha-\beta)-2\pi < \arg u(\vartheta) < \arg u(2\pi-B)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\pi-B) < \tfrac{1}{2}(\vartheta-\pi) < \tfrac{1}{2}(\vartheta+\alpha+\beta) < \arg v(\vartheta) < \arg v(\alpha-\beta).$$

D'où

$$-2\pi+\arg f(\alpha-\beta) = \arg u(\alpha-\beta)-2\pi-\arg v(\alpha-\beta)$$
$$< \arg\frac{u(\vartheta)}{v(\vartheta)} = \arg f(\vartheta) < 0$$

donc l'équation (8) n'est pas vérifiée.

Nous avons ainsi prouvé que si $B < \vartheta_1 < \pi$, l'intervalle $\langle 2\pi-B, 2\pi+\alpha-\beta)$ ne contient pas de racines de l'équation (8). On a donc $\vartheta_3 < 2\pi-B$, ce qu'il fallait démontrer.

---

(5) $$\arg u(B)+\arg u(2\pi-B) = \arg\frac{(Re^{iB}+1)^p(Re^{-iB}+1)^p}{R^{2(p+1)}} = 2\pi,$$

car on a $\pi < \arg u(B) < 2\pi$, $0 < \arg u(2\pi-B) < \pi$.

Lemme 4e. *Si $B < \vartheta_1 < A$, on a $\vartheta_3 < 2\pi-A$, où A satisfait à l'équation*

$$\arg u(\vartheta)-\tfrac{1}{2}\vartheta-\pi = 0. \tag{10}$$

Démonstration. Nous prouverons d'abord que l'équation (10) admet dans l'intervalle $\langle 0, 2\pi\rangle$ une seule racine, celleci étant inférieure à π. Pour cela désignons le premier membre de l'équation (10) par $g(\vartheta)$. On a $g(0) = \pi$, $g(\pi) = -\tfrac{1}{2}\pi$, $g'(\vartheta) < 0$, car $\dfrac{d}{d\vartheta}\arg u(\vartheta) < 0$. Il en résulte que l'unique racine de l'équation (10) dans l'intervalle $\langle 0, 2\pi\rangle$ est inférieure à π.

Si $B < \vartheta_1 < A$, on a $\alpha+\beta > 0$, car $\pi+\tfrac{1}{2}A = \arg u(A) < \arg u(\vartheta_1)$ $= \arg v(\vartheta_1) < \pi+\tfrac{1}{2}(\vartheta_1+\alpha+\beta) < \pi+\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

Nous allons prouver que l'intervalle $\langle 2\pi-A, 2\pi+\alpha-\beta)$ ne contient pas de racines de l'équation (8). Nous distinguerons deux cas: 1. $\pi+\alpha-\beta \leqslant 2\pi-A$, 2. $2\pi-A < \pi+\alpha-\beta$.

Premier cas. Si $\pi+\alpha-\beta \leqslant 2\pi-A < \vartheta < 2\pi+\alpha-\beta$, on a d'après (7'')

$$\arg u(2\pi+\alpha-\beta) = \arg u(\alpha-\beta)-2\pi < \arg u(\vartheta) < \arg u(2\pi-A)$$
$$= 2\pi-\arg u(A) = \pi-\tfrac{1}{2}A < \tfrac{1}{2}\vartheta < \tfrac{1}{2}(\vartheta+\alpha+\beta) < \arg v(\vartheta) < \arg v(\alpha-\beta).$$

D'où

$$-2\pi+\arg f(\alpha-\beta) < \arg u(\alpha-\beta)-2\pi-\arg v(\alpha-\beta)$$
$$< \arg\frac{u(\vartheta)}{v(\vartheta)} = \arg f(\vartheta) < 0,$$

donc l'équation (8) n'est pas vérifiée.

Second cas. Si $2\pi-A \leqslant \vartheta \leqslant \pi+\alpha-\beta$, on obtient d'après (5), (7) et (7')

$$\arg u(\alpha-\beta)-\pi \leqslant \arg u(\pi+\alpha-\beta) \leqslant \arg u(\vartheta)$$
$$\leqslant \arg u(2\pi-A) = \pi-\tfrac{1}{2}A \leqslant \tfrac{1}{2}\vartheta < \tfrac{1}{2}(\vartheta+\alpha+\beta) < \arg v(\alpha-\beta) < \arg v(\vartheta)$$
$$< \arg v(\alpha-\beta)+\tfrac{1}{2}(\vartheta-\alpha+\beta) \leqslant \arg v(\alpha-\beta)+\tfrac{1}{2}\pi.$$

D'où

$$-\tfrac{3}{2}\pi+\arg f(\alpha-\beta) < \arg u(\alpha-\beta)-\pi-\arg v(\alpha-\beta)-\tfrac{1}{2}\pi$$
$$< \arg\frac{u(\vartheta)}{v(\vartheta)} = \arg f(\vartheta) < 0,$$

donc l'équation (8) n'est pas vérifiée dans l'intervalle $\langle 2\pi - A, \pi + \alpha - \beta)$.

Si $2\pi - A < \pi + \alpha - \beta \leqslant \vartheta < 2\pi + \alpha - \beta$, on trouve d'après (7'')

$$\begin{aligned}\arg u(2\pi+\alpha-\beta) &= \arg u(\alpha-\beta) - 2\pi < \arg u(\vartheta) < \arg u(2\pi - A) \\ &= \pi - \tfrac{1}{2}A < \tfrac{1}{2}\vartheta < \tfrac{1}{2}(\vartheta+\alpha+\beta) < \arg v(\vartheta) < \arg v(\alpha-\beta).\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}-2\pi + \arg f(\alpha-\beta) &< \arg u(\alpha-\beta) - 2\pi - \arg v(\alpha-\beta) \\ &< \arg\frac{u(\vartheta)}{v(\vartheta)} = \arg f(\vartheta) < 0\end{aligned}$$

et l'équation (8) n'est pas vérifiée dans l'intervalle $\langle \pi+\alpha-\beta, 2\pi+\alpha-\beta)$.

Nous avons ainsi établi que si $B < \vartheta_1 < A$, l'intervalle $\langle 2\pi - A$, $2\pi + \alpha - \beta)$ ne contient pas de racines de l'équation (8). Par conséquent $\vartheta_3 < 2\pi - A$, ce qu'il fallait démontrer.

Introduisons maintenant la fonction auxiliaire

$$c(\vartheta) = -|u(\vartheta)|\frac{\sin[\arg u(\vartheta) - \frac{1}{2}\vartheta]}{\sin\frac{1}{2}\vartheta} \tag{11}$$

qui a les quatre propriétés suivantes:

Propriété I. *La fonction $c(\vartheta)$ est continue dans l'intervalle* $(0, 2\pi)$; en effet, pour $0 < \vartheta < 2\pi$ on a $\sin\frac{1}{2}\vartheta \neq 0$ et $|u(\vartheta)|$ est borné.

Propriété II. *Dans l'intervalle* $(0, 2\pi)$ *la fonction $c(\vartheta)$ est symétrique par rapport à $\vartheta = \pi$*; en effet, on a

$$\begin{aligned}c(2\pi-\vartheta) - c(\vartheta) &= -|u(2\pi-\vartheta)|\cdot\frac{\sin[\arg u(2\pi-\vartheta) - \frac{1}{2}(2\pi-\vartheta)]}{\sin\frac{1}{2}(2\pi-\vartheta)} + \\ &\quad + |u(\vartheta)|\frac{\sin[\arg u(\vartheta)-\frac{1}{2}\vartheta]}{\sin\frac{1}{2}\vartheta} \\ &= -|u(\vartheta)|\frac{2\cos\left[\frac{1}{2}\left(\arg u(2\pi-\vartheta)+\arg u(\vartheta)\right) - \frac{1}{2}\pi\right]}{\sin\frac{1}{2}\vartheta} \times \\ &\quad \times \sin\left[\tfrac{1}{2}\left(\arg u(2\pi-\vartheta) - \arg u(\vartheta)\right) - \tfrac{1}{2}(\pi-\vartheta)\right] \\ &= -|u(\vartheta)|\frac{2\cos\frac{1}{2}\pi \sin\frac{1}{2}[\pi+\vartheta-2\arg u(\vartheta)]}{\sin\frac{1}{2}\vartheta} = 0.\end{aligned}$$

Propriété III. *La fonction $c(\vartheta)$ est négative dans l'intervalle* $(A, 2\pi - A)$, *positive dans les intervalles* (B, A), $(2\pi - A, 2\pi - B)$, *où A et B satisfont respectivement aux équations* (10) *et* (9).

Démonstration. Nous prouverons d'abord que $\arg u(2\pi - A) - \frac{1}{2}(2\pi - A) = 0$, où A satisfait à l'équation (10). Nous avons $\Delta_C \arg u(\vartheta) = -2\pi$, $\frac{d}{d\vartheta}\arg u(\vartheta) < 0$ et $\arg u(0) = 2\pi$. Il en résulte que $0 < \arg u(2\pi - A) < \arg u(A) < 2\pi$. On a donc

$$\arg u(A) + \arg u(2\pi - A) = \arg\frac{(Re^{iA}+1)^p (Re^{-iA}+1)^p}{R^{2(p+1)}} = 2\pi.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\arg u(2\pi - A) - \tfrac{1}{2}(2\pi - A) &= 2\pi - \arg u(A) - \pi + \tfrac{1}{2}A \\ &= -\arg u(A) + \tfrac{1}{2}A + \pi = 0.\end{aligned}$$

Si $A < \vartheta < 2\pi - A$, on a $0 < \arg u(\vartheta) - \frac{1}{2}\vartheta < \pi$, car $\frac{d}{d\vartheta}\left[\arg u(\vartheta) - \frac{\vartheta}{2}\right] < 0$ et $\arg u(A) - \frac{1}{2}A = \pi$ et $\arg u(2\pi - A) - \frac{1}{2}(2\pi - A) = 0$. Donc, lorsque ϑ appartient à l'intervalle $(A, 2\pi - A)$, on a $0 < \sin[\arg u(\vartheta) - \frac{1}{2}\vartheta] < 1$. Par suite $c(\vartheta) < 0$ lorsque ϑ appartient à l'intervalle $(A, 2\pi - A)$.

Nous avons $\arg u(B) - \frac{1}{2}B = \frac{3}{2}\pi$, $\arg u(A) - \frac{1}{2}A = \pi$ et $\frac{d}{d\vartheta}\left[\arg u(\vartheta) - \frac{\vartheta}{2}\right] < 0$. Donc, lorsque $B < \vartheta < A$, on a $\pi < \arg u(\vartheta) - \frac{1}{2}\vartheta < \frac{3}{2}\pi$. Pour $B < \vartheta < A$ on a donc $-1 < \sin[\arg u(\vartheta) - \frac{1}{2}\vartheta] < 0$ et par suite $c(\vartheta) > 0$, lorsque ϑ appartient à l'intervalle (B, A). En vertu de la propriété II on a aussi $c(\vartheta) > 0$, lorsque ϑ appartient à l'intervalle $(2\pi - A, 2\pi - B)$.

Propriété IV. *La fonction $c(\vartheta)$ est décroissante dans l'intervalle* (B, π) *et croissante dans l'intervalle* $(\pi, 2\pi - B)$.

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}c'(\vartheta) = c(\vartheta)\Bigg\{&\frac{-pR\sin\vartheta}{R^2+1+2R\cos\vartheta} - \tfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} + \\ &+ \left[\frac{d}{d\vartheta}\arg u(\vartheta) - \tfrac{1}{2}\right]\operatorname{ctg}\left[\arg u(\vartheta) - \frac{\vartheta}{2}\right]\Bigg\}.\end{aligned}$$

Si $B < \vartheta < A$, on a en vertu de la propriété III $c(\vartheta) > 0$ et

$$\frac{-pR\sin\vartheta}{R^2+1+2R\cos\vartheta} - \tfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} + \left[\frac{d}{d\vartheta}\arg u(\vartheta) - \tfrac{1}{2}\right]\operatorname{ctg}\left[u(\vartheta) - \frac{\vartheta}{2}\right] < 0,$$

car $\frac{d}{d\vartheta}\arg u(\vartheta) < 0$ et $\pi < \arg u(\vartheta) - \frac{1}{2}\vartheta < \frac{3}{2}\pi$. Lorsque ϑ appartient à l'intervalle (B, A) on a donc $c'(\vartheta) < 0$.

Si $\vartheta = A$, on a

$$c'(\vartheta) = -|u(A)|\frac{\cos[\arg u(A) - \frac{1}{2}A]}{\sin\frac{1}{2}A}\cdot\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg u(\vartheta) - \tfrac{1}{2}\right]_{\vartheta = A} < 0,$$

car

$$\cos[\arg u(A)-\tfrac{1}{2}A] = \cos\pi = -1 < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{d\vartheta}\arg u(\vartheta) < 0.$$

Si ϑ appartient à l'intervalle (A, π), on a en vertu de la propriété III $c(\vartheta) < 0$. Il suffit donc de prouver que pour $A < \vartheta < \pi$ on a l'inégalité

$$(12)\quad \frac{-pR\sin\vartheta}{R^2+1+2R\cos\vartheta} - \tfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} + \left[\frac{d}{d\vartheta}\arg u(\vartheta) - \tfrac{1}{2}\right]\operatorname{ctg}\left[\arg u(\vartheta) - \frac{\vartheta}{2}\right] > 0\,(^6).$$

Lorsque ϑ croît de A à π, $\arg u(\vartheta) - \frac{1}{2}\vartheta$ décroît constamment de π à $\frac{1}{2}\pi$. Comme le premier membre de l'inégalité (12) est nul pour $\vartheta = \pi$, il suffit de démontrer que sa dérivée est négative dans l'intervalle (A, π). Mais cette dérivée, multipliée par $\sin^2\frac{1}{2}\vartheta$, est égale à l'expression:

$$(13)\quad \operatorname{ctg}\left[\arg u(\vartheta) - \frac{\vartheta}{2}\right]\cdot\sin^2\frac{\vartheta}{2}\cdot\frac{d^2}{d\vartheta^2}\arg u(\vartheta) -$$

$$-\frac{\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}{\sin^2[\arg u(\vartheta)-\frac{1}{2}\vartheta]}\left[\frac{d}{d\vartheta}\arg u(\vartheta) - \tfrac{1}{2}\right]^2 - \frac{pR\sin^2\frac{1}{2}\vartheta[(R^2+1)\cos\vartheta+2R]}{(R^2+1+2R\cos\vartheta)^2} + \tfrac{1}{4}.$$

On constate aisément que pour $\vartheta = \pi$ et pour la valeur R donnée à la p. 33, l'expression (13) est nulle, son premier terme étant aussi nul. Etant donnée que

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2}\arg u(\vartheta) = \frac{pR(R^2-1)\sin\vartheta}{(R^2+1+2R\cos\vartheta)^2} > 0,$$

le premier terme de l'expression (13) est négatif lorsque $A < \vartheta < \pi$, et l'expression $\left(\frac{d}{d\vartheta}\arg u(\vartheta) - \frac{1}{2}\right)^2$ décroît lorsque ϑ croît. D'autre part, on a $\arg u(\pi) = \pi$, donc lorsque $A < \vartheta < \pi$, on a $\arg u(\vartheta) > \pi$, c'est-à-dire $\pi - \left(\arg u(\vartheta) - \frac{1}{2}\vartheta\right) < \frac{1}{2}\vartheta$ et $\dfrac{\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}{\sin^2\left(\arg u(\vartheta) - \frac{1}{2}\vartheta\right)} > 1$, alors que pour $\vartheta = \pi$ ce rapport est égal à 1. Ainsi le second terme de (13) est plus petit pour $0 < \vartheta < \pi$ que pour $\vartheta = \pi$. Le troisième terme de l'expression (13) n'est positif que dans l'intervalle $\arccos\dfrac{-2R}{R^2+1} < \vartheta < \pi$. Il est facile de constater (en s'appuyant sur l'inégalité $R \geqslant 3$) que $\dfrac{-(R^2+1)\cos\vartheta+2R}{(R^2+1+2R\cos\vartheta)^2}$ est, de même que $\sin^2\frac{1}{2}\vartheta$, une fonction positive et croissante dans cet intervalle; il en résulte que la valeur du troisième terme de (13) pour $A < \vartheta < \pi$ est aussi plus petite que pour $\vartheta = \pi$. L'expression (13) est donc bien négative dans l'intervalle $A < \vartheta < \pi$.

(6) La démonstration de l'inégalité (12) est due à M. Biernacki.

Nous avons ainsi démontré que $c(\vartheta)$ décroît dans l'intervalle (B, π). Par conséquent, d'après la propriété II, la fonction $c(\vartheta)$ est croissante dans l'intervalle $(\pi, 2\pi - B)$.

Lemme 5. *Si* $0 \leqslant \alpha - \beta \leqslant \pi$ *et* $B < \vartheta_1 < \frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2) < \pi$, *on a* $c(\vartheta_2) < \min\{c(\vartheta_1), c(\vartheta_3)\} < 0 < \max\{c(\vartheta_1), c(\vartheta_3)\}$, *lorsque* $c(\vartheta_1)\cdot c(\vartheta_3) < 0$, *ou* $c(\vartheta_2) < \min\{c(\vartheta_1), c(\vartheta_3)\} < \max\{c(\vartheta_1), c(\vartheta_3)\} < 0$, *lorsque* $c(\vartheta_1)\cdot c(\vartheta_3) > 0$.

Démonstration. Si $c(\vartheta_1) > 0$, en vertu de la propriété III de la fonction $c(\vartheta)$ on a $B < \vartheta_1 < A$. D'après les lemmes 4e et 4b on obtient alors $\pi < \vartheta_3 < 2\pi - A$ et par suite $c(\vartheta_3) < 0$. Donc, si $B < \vartheta_1 < \pi$, l'un des nombres $c(\vartheta_1)$ et $c(\vartheta_3)$ au plus est positif.

Il résulte de l'hypothèse que $B < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \pi$ ou $B < \vartheta_1 < 2\pi - \vartheta_2 < \pi$. D'où on tire, en vertu des propriétés IV et II de la fonction $c(\vartheta)$

$$(14)\qquad c(\vartheta_2) < c(\vartheta_1).$$

De l'hypothèse du lemme 5 et des lemmes 4b et 4d il résulte que $\pi < \vartheta_2 < \vartheta_3 < 2\pi - B$ ou $\pi < 2\pi - \vartheta_2 < \vartheta_3 < 2\pi - B$. D'où il s'ensuit, d'après les propriétés IV et II de la fonction $c(\vartheta)$

$$(15)\qquad c(\vartheta_2) < c(\vartheta_3).$$

Des inégalités (14) et (15) il résulte que $c(\vartheta_2) < \min\{c(\vartheta_1), c(\vartheta_3)\} < \max\{c(\vartheta_1), c(\vartheta_3)\}$, $c(\vartheta_2)$ étant un nombre négatif, car l'un au plus des nombres $c(\vartheta_1)$ et $c(\vartheta_3)$ peut être positif. La démonstration du lemme 5 est ainsi achevée.

Nous établirons maintenant la relation

$$(16)\qquad |v(\vartheta)| = -y(\vartheta)\frac{\sin\frac{1}{2}\vartheta}{\sin[\arg v(\vartheta) - \frac{1}{2}\vartheta]},$$

où

$$(16')\qquad y(\vartheta) = -|v(\pi-2\beta)|\frac{\sin[\arg v(\pi-2\beta) - \frac{1}{2}\vartheta]}{\sin\frac{1}{2}\vartheta}.$$

Démonstration. Nous prouverons d'abord que

$$\frac{|v(\vartheta)|\cdot\sin[\arg v(\vartheta) - \frac{1}{2}\vartheta]}{|v(\pi-2\beta)|\cdot\sin[\arg v(\pi-2\beta) - \frac{1}{2}\vartheta]} = 1$$

($\arg v(\vartheta)$ satisfait aux conditions (7), (7′) et (7″) de la p. 38). Nous avons

$$\frac{|v(\vartheta)|\sin[\arg v(\vartheta)-\frac{1}{2}\vartheta]}{|v(\pi-2\beta)|\sin[\arg v(\pi-2\beta)-\frac{1}{2}\vartheta]} = \frac{\mathrm{im}\{v(\vartheta)e^{-i\vartheta/2}\}}{\mathrm{im}\{v(\pi-2\beta)e^{-i\vartheta/2}\}}$$

$$= \frac{\mathrm{im}\{-ae^{-i\vartheta/2}-bRe^{i\vartheta/2}\}}{\mathrm{im}\{-ae^{-i\vartheta/2}-bR^{i(\pi-2\beta-\vartheta/2)}\}} = \frac{\mathrm{im}\{-|a|e^{i(\alpha-\vartheta/2)}-|b|Re^{i(\beta+\vartheta/2)}\}}{\mathrm{im}\{-|a|e^{i(\alpha-\vartheta)/2}-|b|Re^{i(\pi-\beta-\vartheta/2)}\}}$$

$$= \frac{|a|\sin(\alpha-\frac{1}{2}\vartheta)+|b|R\sin(\beta+\frac{1}{2}\vartheta)}{|a|\sin(\alpha-\frac{1}{2}\vartheta)+|b|R\sin(\pi-\beta-\frac{1}{2}\vartheta)} = 1.$$

D'où

$$|v(\vartheta)| = -|v(\pi-2\beta)|\frac{\sin[\arg v(\pi-2\beta)-\frac{1}{2}\vartheta]}{\sin\frac{1}{2}\vartheta}\cdot\frac{-\sin\frac{1}{2}\vartheta}{\sin[\arg v(\vartheta)-\frac{1}{2}\vartheta]}$$

$$= -y(\vartheta)\frac{\sin\frac{1}{2}\vartheta}{\sin[\arg v(\vartheta)-\frac{1}{2}\vartheta]}.$$

LEMME 6. *Si* $0 \leqslant \alpha-\beta < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \vartheta_3 < 2\pi$, *on a*

$$\min\{y(\vartheta_1), y(\vartheta_3)\} \leqslant y(\vartheta_2) \leqslant \max\{y(\vartheta_1), y(\vartheta_3)\}. \tag{17}$$

Démonstration. Si $0 < \arg v(\pi-2\beta) < \pi$, l'inégalité (17) est vérifiée, car $y'(\vartheta) = |v(\pi-2\beta)|\dfrac{\sin[\arg v(\pi-2\beta)]}{2\sin^2\frac{1}{2}\vartheta} > 0$, d'où $y(\vartheta_1) < y(\vartheta_2) < y(\vartheta_3)$.

Si $\pi < \arg v(\pi-2\beta) < 2\pi$, l'inégalité (17) est aussi vraie, car $y'(\vartheta) < 0$, d'où $y(\vartheta_3) < y(\vartheta_2) < y(\vartheta_1)$.

Si $\arg v(\pi-2\beta) = 0$, on a, en vertu de la relation (16') $y(\vartheta) = |v(\pi-2\beta)| = \mathrm{const}$.

Enfin, si $\arg v(\pi-2\beta) = \pi$, on a, d'après la relation (16'), $y(\vartheta) = -|v(\pi-2\beta)| = \mathrm{const}$.

LEMME 7. *Si* $0 \leqslant \alpha-\beta \leqslant \pi$ *et* ϑ_k $(k = 1, 2, 3)$ *sont les valeurs de la variable* ϑ *qui satisfont à l'équation* (8) *et si* $\min\{f(\vartheta_1), f(\vartheta_3)\} > 1$, *on a* $f(\vartheta_2) > 1$.

Démonstration. Nous distinguerons trois cas:

1. $0 \leqslant \alpha-\beta \leqslant \vartheta_1 \leqslant B$; 2. $B < \vartheta_1 < \frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2) < \pi$;

3. $\pi \leqslant \frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2) < \pi+\alpha-\beta \leqslant 2\pi$

(l'inégalité $\frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2) < \pi+\alpha-\beta$ est une conséquence du lemme 4a).

Premier cas. Si $0 \leqslant \alpha-\beta \leqslant \vartheta_1 \leqslant B$, il résulte du lemme 4c que les valeurs ϑ_2 et ϑ_3 n'existent pas.

Second cas. Si $B < \vartheta_1 < \frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2) < \pi$, on a en vertu du lemme 5 $c(\vartheta_2) < \min\{c(\vartheta_1), c(\vartheta_3)\} < 0 < \max\{c(\vartheta_1), c(\vartheta_3)\}$, lorsque $c(\vartheta_1)\cdot c(\vartheta_3) < 0$, ou bien $c(\vartheta_2) < \min\{c(\vartheta_1), c(\vartheta_3)\} < \max\{c(\vartheta_1), c(\vartheta_3)\} < 0$ lorsque $c(\vartheta_1)\cdot c(\vartheta_3) > 0$. En tenant compte des relations (11) et (16) on a $f(\vartheta_k) = c(\vartheta_k)/y(\vartheta_k)$ $(k = 1, 2, 3)$.

On a, par hypothèse, $c(\vartheta_1)/y(\vartheta_1) > 1$ et $c(\vartheta_3)/y(\vartheta_3) > 1$. Supposons que le théorème soit faux. Alors, on aurait

$$y(\vartheta_2) < c(\vartheta_2) < \min\{c(\vartheta_1), c(\vartheta_3)\} < \min\{y(\vartheta_1), y(\vartheta_3)\} < 0$$
$$< \max\{y(\vartheta_1), y(\vartheta_3)\} < \max\{c(\vartheta_1), c(\vartheta_3)\},$$

lorsque $c(\vartheta_1)\cdot c(\vartheta_3) < 0$, ou bien

$$y(\vartheta_2) < c(\vartheta_2) < \min\{c(\vartheta_1), c(\vartheta_3)\} < \min\{y(\vartheta_1), y(\vartheta_3)\} < 0,$$

lorsque $c(\vartheta_1)\cdot c(\vartheta_3) > 0$, ce qui est impossible, car on a, en vertu du lemme 6, $\min\{y(\vartheta_1), y(\vartheta_3)\} \leqslant y(\vartheta_2)$.

Troisième cas. Si $\pi \leqslant \frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2) < \pi+\alpha-\beta \leqslant 2\pi$, il vient

$$\cos\vartheta_2-\cos\vartheta_1 = -2\sin\tfrac{1}{2}(\vartheta_2+\vartheta_1)\sin\tfrac{1}{2}(\vartheta_2-\vartheta_1) \geqslant 0,$$

$$\cos(\vartheta_2-\alpha+\beta)-\cos(\vartheta_1-\alpha+\beta)$$
$$= -2\sin[\tfrac{1}{2}(\vartheta_2+\vartheta_1)-\alpha+\beta]\sin\tfrac{1}{2}(\vartheta_2-\vartheta_1) \leqslant 0.$$

Nous avons donc

$$|u(\vartheta_2)| = \frac{(R^2+1+2R\cos\vartheta_2)^{p/2}}{R^{p+1}} \geqslant \frac{(R^2+1+2R\cos\vartheta_1)^{p/2}}{R^{p+1}} = |u(\vartheta_1)|,$$

$$|v(\vartheta_2)| = |b|\left\{R^2+\left|\frac{a}{b}\right|^2+2R\left|\frac{a}{b}\right|\cos(\vartheta_2-\alpha+\beta)\right\}^{1/2}$$

$$\leqslant |b|\left\{R^2+\left|\frac{a}{b}\right|^2+2R\left|\frac{a}{b}\right|\cos(\vartheta_1-\alpha+\beta)\right\}^{1/2} = |v(\vartheta_1)|.$$

D'où $f(\vartheta_2) = \dfrac{|u(\vartheta_2)|}{|v(\vartheta_2)|} \geqslant \dfrac{|u(\vartheta_1)|}{|v(\vartheta_1)|} = f(\vartheta_1) > 1$, lorsque l'hypothèse du lemme 7 est vérifiée.

Nous prouverons maintenant que *si* $0 \leqslant \alpha-\beta \leqslant \pi$, *l'indice du point* 1 *par rapport à la courbe* Γ *n'est pas inférieur à* -1.

Il résulte du lemme 3 que le demi-axe réel positif coupe la courbe Γ en un point au moins et en trois points au plus (exceptionnellement en deux points, si l'on a, en un de ces points, $\dfrac{d}{d\vartheta}\arg f(z) = 0$). Désignons les points d'intersection de la courbe Γ avec le demi-axe réel positif par

$$f(\vartheta_k, |b|) = \frac{(Re^{i\vartheta_k}+1)^p}{R^{p+1}e^{i(p+1)\vartheta_k}[-|a/b|e^{i\alpha}-Re^{i(\vartheta_k+\beta)}]|b|}, \tag{18}$$

où ϑ_k $(k = 1, 2, 3)$ satisfont à l'équation (8). Si l'on fixe α, β et $|a/b|$, les valeurs ϑ_k ne dépendent pas de la variable $|b|$, car en raison de l'égalité

$$\arg f(\vartheta) = \arg\frac{(Re^{i\vartheta}+1)^p}{R^{p+1}e^{i(p+1)\vartheta}} - \arg\left[-\left|\frac{a}{b}\right|e^{i\alpha}-Re^{i(\vartheta+\beta)}\right]$$

les racines de l'équation (8) ne dépendent pas de $|b|$. Si α, β et $|a/b|$ sont fixés, les expressions positives $f(\vartheta_k, |b|)$ $(k = 1, 2, 3)$ sont des fonctions décroissantes de la variable $|b|$, puisque $\dfrac{\partial}{\partial |b|} f(\vartheta_k, |b|) < 0$.

Si le module du nombre b est très grand, les expressions $f(\vartheta_k, |b|)$ $(k = 1, 2, 3)$ sont inférieures à l'unité, car les expressions

$$(19) \qquad \frac{(Re^{i\vartheta_k}+1)^p}{R^{p+1}e^{i(p+1)\vartheta_k}[-|a/b|e^{i\alpha}-Re^{i(\vartheta_k-\beta)}]} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

sont réelles positives et bornées. Alors $\mathrm{ind}_\Gamma(1) = 0$.

Si $|b|$ est suffisamment petit, les expressions positives $f(\vartheta_k, |b|)$ $(k = 1, 2, 3)$ sont supérieures à l'unité. Alors $\mathrm{ind}_\Gamma(1) = -1$, car $\mathrm{ind}_\Gamma(0) = -1$.

Désignons les expressions (19) par b_k $(k = 1, 2, 3)$. Nous avons $f(\vartheta_k, b_k) = 1$. Si α, β et $|a/b|$ sont fixés, la courbe $\Gamma_{|b|}$ dépend de la variable $|b|$. Nous étudierons les accroissements de l'indice du point 1 par rapport à la courbe Γ, quand $f(\vartheta_k, |b|) = 1$ $(k = 1, 2, 3)$ et le module du nombre b croît.

Si $k = 2$ et le module du nombre b croît, on a, pour $|b| = b_2$, $\Delta\,\mathrm{ind}_\Gamma(1) = -1$. Démonstration: On a $\dfrac{\partial}{\partial |b|} f(\vartheta_2, |b|) < 0$. Donc, pour $|b| = b_2-\varepsilon$, où ε est un nombre positif suffisamment petit, il vient $f(\vartheta_2, |b|) > 1$. Pour $|b| = b_2+\varepsilon$ on a $f(\vartheta_2, |b|) < 1$. De plus, $\left[\dfrac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\vartheta_2} = \mathrm{im}\left\{\dfrac{izf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$, d'où $0 < \left(\arg\dfrac{izf'(z)}{f(z)}\right)_{\vartheta=\vartheta_2} = (\arg izf'(z))_{\vartheta=\vartheta_2} < \pi$, où $(\arg izf'(z))_{\vartheta=\vartheta_2}$ est l'argument de la tangente à la courbe Γ au point $f(\vartheta_2, |b|)$. Donc, si pour $b_2-\varepsilon < |b| < b_2$ on a $\mathrm{ind}_\Gamma(1) = q$, pour $b_2 < |b| < b_2+\varepsilon$ on a $\mathrm{ind}_\Gamma(1) = q-1$. Par conséquent $\Delta\,\mathrm{ind}_{\Gamma_{|b|=b_2}}(1) = \mathrm{ind}_{\Gamma_{|b|=b_2+\varepsilon}}(1)-\mathrm{ind}_{\Gamma_{|b|=b_2-\varepsilon}}(1) = -1$.

Si $k = 1$ ou 3 et le module du nombre b croît, on a pour $|b| = b_k$ $\Delta\,\mathrm{ind}_\Gamma(1) = 1$. Démonstration: A cause de $\dfrac{\partial}{\partial |b|} f(\vartheta_k, |b|) < 0$ on a $f(\vartheta_k, b_k-\varepsilon) > 1$ et $f(\vartheta_k, b_k+\varepsilon) < 1$. De plus, $\left[\dfrac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta)\right]_{\vartheta=\vartheta_k} = \mathrm{im}\left\{\dfrac{izf'(z)}{f(z)}\right\}_{\vartheta=\vartheta_k} < 0$, d'où $\pi < \left(\arg\dfrac{izf'(z)}{f(z)}\right)_{\vartheta=\vartheta_k} = (\arg izf'(z))_{\vartheta=\vartheta_k} < 2\pi$, où $(\arg izf'(z))_{\vartheta=\vartheta_k}$ est l'argument de la tangente à la courbe Γ ou point $f(\vartheta_k, |b|)$. Donc, si pour $b_k-\varepsilon < |b| < b_k$ on a $\mathrm{ind}_\Gamma(1) = q$, pour $b_k < |b| < b_k+\varepsilon$ on a $\mathrm{ind}_\Gamma(1) = q+1$. Par conséquent $\Delta\,\mathrm{ind}_{\Gamma_{|b|=b_k}}(1) = \mathrm{ind}_{\Gamma_{|b|=b_k+\varepsilon}}(1)-\mathrm{ind}_{\Gamma_{|b|=b_k-\varepsilon}}(1) = 1$.

Si $\vartheta_1 = \vartheta_2$ et le module du nombre b croît, on a pour $|b| = b_1 = b_2$ $\Delta\,\mathrm{ind}_\Gamma(1) = 0$. Démonstration: A cause de $\dfrac{\partial}{\partial |b|} f(\vartheta_k, |b|) < 0$ $(k = 1, 2)$ on a $f(\vartheta_k, b_k-\varepsilon) > 1$ et $f(\vartheta_k, b_k+\varepsilon) < 1$. Au point $\vartheta = \vartheta_1 = \vartheta_2$ on a $\dfrac{d}{d\vartheta}\arg f(\vartheta) = 0$, d'où $(\arg izf'(z))_{\vartheta=\vartheta_1=\vartheta_2} = 0$ ou π. Si ε est un nombre positif suffisamment petit, on a $\mathrm{ind}_{\Gamma_{|b|=b_k-\varepsilon}}(1) = \mathrm{ind}_{\Gamma_{|b|=b_k+\varepsilon}}(1)$, d'où $\Delta\,\mathrm{ind}_{\Gamma_{|b|=b_k}}(1) = 0$.

De même $\Delta\,\mathrm{ind}_\Gamma(1) = 0$ lorsque $\vartheta_2 = \vartheta_3$ et $|b| = b_2 = b_3$.

Si α, β et $|a/b|$ sont fixés et si le module du nombre b croît, les cas suivants peuvent donc se présenter:

$$\text{I. } \mathrm{ind}_\Gamma(1) = -1, -2, -1, 0; \qquad \text{II. } \mathrm{ind}_\Gamma(1) = -1, 0, -1, 0;$$

$$\text{III. } \mathrm{ind}_\Gamma(1) = -1, 0, +1, 0; \qquad \text{IV. } \mathrm{ind}_\Gamma(1) = -1, 0.$$

Le premier cas ne pourrait se présenter que si l'on avait

$$0 < f(\vartheta_2) < 1 < \min\{f(\vartheta_1), f(\vartheta_3)\} \qquad \text{pour} \qquad b_2 < |b| < \min(b_1, b_3),$$

ce qui est en contradiction avec le lemme 7. Donc, pour $0 \leqslant \alpha-\beta \leqslant \pi$, l'indice du point 1 par rapport à la courbe Γ n'est pas inférieur à -1, ce qu'il fallait démontrer.

Si $0 \leqslant \alpha-\beta \leqslant \pi$ et si ϑ croît de $\alpha-\beta$ à $2\pi+\alpha-\beta$, $f(z)$ décrit une courbe Γ telle que $\mathrm{ind}_\Gamma(1) \geqslant -1$. Si l'on remplace α et β par $-\alpha$ et $-\beta$, l'expression $f(z)$ décrira, lorsque ϑ croît de $-2\pi+\alpha-\beta$ à $\alpha-\beta$, la courbe $\bar{\Gamma}$ symétrique de la courbe Γ par rapport à l'axe réel. Par conséquent, pour $-\pi \leqslant \alpha-\beta \leqslant 0$, l'indice du point 1 par rapport à la courbe $\bar{\Gamma}$ est aussi au moins égal à -1.

Reçu par la Rédaction le 10. 7. 1958