Hence

$$\int_{E\overline{E}} \mu\, ds = 2\int_0^{1/\nu} \sqrt{x_1^2+\frac{1}{\nu^2}}\sqrt[3]{\frac{1}{\nu}}\, dx_1 > 2\int_0^{1/\nu} \sqrt{x_1^2}\sqrt[3]{\frac{1}{\nu}}\, dx_1$$

$$= 2\sqrt[3]{\frac{1}{\nu}}\int_0^{1/\nu} x_1\, dx_1 = 2\sqrt[3]{\frac{1}{\nu}}\left(\frac{x_1^2}{2}\right)_0^{1/\nu} = \sqrt[3]{\frac{1}{\nu}}\cdot\frac{1}{\nu^2} = \frac{1}{\nu^{7/3}}.$$

Thus

$$I_{\nu 2} > \frac{1}{\nu^{7/3}}.$$

Therefore with respect to inequality (20) we have

$$\frac{I_{\nu 2}}{m(D_\nu)} > \frac{\nu^3}{4\nu^{7/3}} = \frac{\nu^{2/3}}{4}$$

and thence it is obvious that

$$\frac{I_{\nu 2}}{m(D_\nu)} \to \infty \quad \text{for} \quad \nu \to \infty,$$

while, if formula (6) were true, $I_{\nu 2}/m(D_\nu)$ would tend to zero. In this example the sequence S_ν satisfies all suppositions of theorem 1 except supposition 4. It may be shown that here $m(S_\nu)/F_\nu \to \infty$ as $\nu \to \infty$.

References

[1] S. Gołąb, *On the notion of gradient. I. Essentiality of regularity suppositions*, this volume, p. 1-4.

[2] W. Rubinowicz, *Wektory i tensory*, Warszawa-Wrocław 1950.

Reçu par la Rédaction le 23. 2. 1956

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VIII (1960)

Sur l'équation différentielle ordinaire du premier ordre dont le second membre satisfait aux conditions de Carathéodory

par Z. Opial (Kraków)

1. Supposons que la fonction $f(x, y)$, définie dans un rectangle R: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, vérifie les conditions de Carathéodory (cf. [2], p. 665), c'est-à-dire

(i) pour tout $y \in \langle c, d\rangle$ $f(x, y)$ est une fonction mesurable par rapport à x;

(ii) pour tout $x \in \langle a, b\rangle$ $f(x, y)$ est continue par rapport à y;

(iii) il existe une fonction mesurable $M(x)$ telle que l'on ait dans le rectangle R:

(1) $$|f(x, y)| \leqslant M(x) \quad \text{et} \quad \int_a^b M(x)\, dx < +\infty.$$

Envisageons l'équation différentielle

(2) $$y' = f(x, y).$$

On dit qu'une fonction absolument continue $y(x)$ est une solution de l'équation (2) dans un intervalle $(\alpha, \beta) \subset \langle a, b\rangle$, si la relation

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

est vérifiée en tout point de cet intervalle, sauf peut-être aux points d'un ensemble de mesure nulle. On sait (cf. [2], p. 665-674, [5], p. 140-146) que pour tout point (x_0, y_0) appartenant à l'intérieur du rectangle R il existe au moins une solution de l'équation (2), définie dans un voisinage suffisamment petit de x_0 et égale à y_0 au point x_0.

2. Toute solution $y(x)$ de l'équation (2), étant une fonction absolument continue, est dérivable presque partout dans l'intervalle où elle est définie. L'ensemble des points où la dérivée $y'(x)$ n'existe pas est donc de mesure nulle. Mais est-il possible que l'ensemble des points x en lesquels une au moins des intégrales de l'équation (2) n'est pas dérivable soit de mesure positive ou même identique à tout l'intervalle $\langle a, b\rangle$?

G. Scorza-Dragoni [7] a établi que la réponse à cette question est négative. On a notamment:

THÉORÈME. *Si la fonction $f(x, y)$ satisfait dans le rectangle R aux conditions de Carathéodory, il existe dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$ un ensemble de mesure égale à $b-a$ tel que, pour tout ξ appartenant à cet ensemble et toute intégrale $y(x)$ de l'équation (2), définie dans un voisinage de ξ, la dérivée $y'(\xi)$ existe et est égale à $f(\xi, y(\xi))$.*

La démonstration de ce théorème donnée par G. Scorza-Dragoni, ainsi que celle donnée par K. Hayashi [3], est assez compliquée. Dans la première partie de cette note je démontre ce théorème de façon beaucoup plus simple.

Au n° 5 je l'applique à la démonstration d'une proposition sur les inégalités différentielles. Je dois l'idée de cette démonstration à M. S. Łojasiewicz.

Récemment G. Aquaro [1] a démontré un théorème d'existence pour les solutions d'équations différentielles dont les seconds membres satisfont aux conditions (i), (ii) et

(iv) quelle que soit la fonction $\varphi(x)$, définie et continue dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$ telle que $c \leqslant \varphi(x) \leqslant d$, la fonction $f(x, \varphi(x))$ est sommable dans l'intervalle envisagé et l'ensemble des fonctions $\int_a^x f(s, \varphi(s))\,ds$ forme une famille de fonctions équiabsolument continues.

Dans la seconde partie de la présente note je démontre que les conditions de Carathéodory et de Aquaro sont équivalentes.

3. Dans la démonstration du théorème énoncé au n° précédent nous aurons besoin de deux lemmes auxiliaires de la théorie des fonctions réelles.

Convenons de désigner par mE, mF etc. les mesures linéaires de Lebesgue des ensembles E, F etc.

LEMME I. *Si la fonction $f(x, y)$ vérifie dans le rectangle R les conditions* (i) *et* (ii), *pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble parfait F de mesure $mF \geqslant (b-a)-\varepsilon$ tel que la fonction $f(x, y)$ envisagée dans l'ensemble $F\times\langle c, d\rangle$ soit continue par rapport aux variables x et y.*

Ce lemme a été établi par G. Scorza-Dragoni [6].

LEMME II. *Soit $M(x)$ une fonction non négative, définie et sommable dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$ et E un sous-ensemble mesurable de cet intervalle. Pour presque tout x appartenant à l'ensemble complémentaire de E par rapport à $\langle a, b\rangle$ on a*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{E_h(x)} M(x)\,dx = 0, \tag{3}$$

où $E_h(x)$ désigne la partie commune de l'ensemble E et de l'intervalle $\langle x, x+h\rangle$.

Cette proposition s'obtient immédiatement du théorème bien connu de Lebesgue sur la dérivée d'une intégrale, appliqué à la fonction $\overline{M}(x)$ égale à $M(x)$ dans l'ensemble E et à 0 dans l'ensemble complémentaire.

4. Démonstration du théorème. Prenons un $\varepsilon > 0$. Soit F l'ensemble parfait dont il était question dans le lemme I. Désignons par E son complémentaire par rapport à l'intervalle $\langle a, b\rangle$ et par F' l'ensemble des points de densité de F. Soit enfin F'' le sous-ensemble de F' pour les points duquel on a la relation (3). On a d'après le lemme II

$$mF'' = mF' = mF \geqslant (b-a)-\varepsilon.$$

Soit ξ un point appartenant à F'' et $y(x)$ une intégrale quelconque de l'équation (2), définie dans un voisinage de ξ. Pour tout h suffisamment petit on a donc

$$\frac{y(\xi+h)-y(\xi)}{h} = \frac{1}{h}\int_\xi^{\xi+h} f(x, y(x))\,dx = f(\xi, y(\xi)) + \tag{4}$$

$$+\frac{1}{h}\int_{F_h(\xi)}\big(f(x, y(x))-f(\xi, y(\xi))\big)\,dx + \frac{1}{h}\int_{E_h(\xi)}\big(f(x, y(x))-f(\xi, y(\xi))\big)\,dx$$

où $F_h(\xi) = F\cdot\langle \xi, \xi+h\rangle$. D'après le lemme I la fonction $f(x, y)$ est continue dans l'ensemble $F\times\langle c, d\rangle$, l'avant-dernière intégrale tend donc vers zéro lorsque $h\to 0$. Il en est de même de la dernière intégrale car on a, en raison de l'inégalité (1)

$$\left|\frac{1}{h}\int_{E_h(\xi)}\big(f(x, y(x))-f(\xi, y(\xi))\big)\,dx\right| \leqslant \frac{1}{|h|}\int_{E_h(\xi)} M(x)\,dx + |f(\xi, y(\xi))|\,\frac{mE_h(\xi)}{h}.$$

De la relation (4) il résulte donc que la dérivée $y'(\xi)$ existe et est égale à $f(\xi, y(\xi))$.

Le nombre positif ε étant tout à fait arbitraire, notre théorème se trouve ainsi démontré.

5. Supposons pour simplifier que la fonction $f(x, y)$ satisfasse aux conditions de Carathéodory dans la bande: $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y < +\infty$. Soit $\varphi(x)$ une fonction absolument continue qui vérifie presque partout dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$ l'inégalité différentielle

$$\varphi'(x) \leqslant f(x, \varphi(x)) \tag{5}$$

et $\varphi(a) = 0$. Pour tout $\xi\in\langle a, b\rangle$ désignons par $\varphi_\xi(x)$ la fonction égale à $\varphi(x)$ dans l'intervalle $\langle a, \xi\rangle$ et à une intégrale de l'équation (2), issue du point $(\xi, \varphi(\xi))$, dans l'intervalle $\langle \xi, b\rangle$. En vertu de l'inégalité (1), toutes ces fonctions sont équiabsolument continues dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$. Donc, la fonction

$$\psi(x) = \sup_{a\leqslant\xi\leqslant b} \varphi_\xi(x)$$

est aussi absolument continue dans l'intervalle envisagé. On a en outre $\psi(a) = 0$ et

$$\varphi(x) \leqslant \psi(x). \tag{6}$$

Nous allons montrer que l'on a presque partout dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$: $\psi'(x) = f(x, \psi(x))$. En effet, dans l'ensemble ouvert où $\varphi(x) < \psi(x)$ la fonction $\psi(x)$, comme enveloppe des intégrales de l'équation (2), est une intégrale. D'autre part, pour presque tout ξ tel que $\varphi(\xi) = \psi(\xi)$ on a, en vertu du théorème démontré au n° précédent:

$$\varphi'_\xi(\xi) \leqslant \psi'(\xi) = \varphi'(\xi) \leqslant f(\xi, \varphi(\xi)) = f(\xi, \psi(\xi)) = f(\xi, \varphi_\xi(\xi)) = \varphi'_\xi(\xi)$$

et, par conséquent $\psi'(\xi) = f(\xi, \psi(\xi))$.

La fonction $\psi(x)$ est donc une intégrale de l'équation différentielle (2). Nous avons ainsi démontré la proposition suivante (voir aussi [4]):

Si une fonction absolument continue $\varphi(x)$ satisfait presque partout dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$ à l'inégalité différentielle (5) *et $\varphi(a) = 0$, on a dans cet intervalle l'inégalité* (6), *où $\psi(x)$ est une intégrale de l'équation* (2), *issue du point* $(0, 0)$.

6. Pour démontrer l'équivalence dont il était question au n° 2, il suffit évidemment de montrer que toute fonction $f(x, y)$ qui satisfait aux conditions (i), (ii) et (iv) doit forcément satisfaire à la condition (iii).

Posons $M(x) = \max\limits_{c\leqslant y\leqslant d} |f(x, y)|$. C'est une fonction mesurable, car pour une suite quelconque de points $\{\eta_n\}$ partout dense dans l'intervalle $\langle c, d\rangle$ on a $M(x) = \limsup\limits_{n\to\infty} |f(x, \eta_n)|$. Nous allons montrer que $M(x)$ est sommable dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$. Pour la démonstration par l'absurde supposons que l'on ait

$$\int_a^b M(x)\,dx = +\infty \tag{7}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot mE_k = +\infty, \tag{8}$$

où $E_k = \mathop{E}\limits_x\{k \leqslant M(x) \leqslant k+1\}$. On a d'autre part

$$\sum_{k=0}^{\infty} mE_k = b-a < +\infty. \tag{9}$$

Posons $\alpha(x) = \max\limits_y \mathop{E}\{f(x, y) = M(x)\}$. La fonction $\alpha(x)$ est mesurable puisque pour tout $a \leqslant d$ on a

$$\mathop{E}_x\{\alpha(x) \geqslant a\} = \mathop{E}_x\{M(x) = M_a(x)\},$$

où $M_a(x) = \max\limits_{c\leqslant y\leqslant a} |f(x, y)|$.

Pour $\varepsilon = 1$ il existe par hypothèse un $\delta > 0$ tel que pour toute fonction continue $\varphi(x)$ définie dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$ et tout ensemble mesurable E de mesure $mE \leqslant \delta$ on ait l'inégalité

$$\int_E |f(x, \varphi(x))|\,dx < 1. \tag{10}$$

D'après les relations (8) et (9) il est possible de trouver deux nombres entiers $p < q$ tels que

$$m\Big(\sum_p^q E_k\Big) = \sum_p^q mE_k \leqslant \delta \quad \text{et} \quad \sum_p^q k\cdot mE_k \geqslant 2. \tag{11}$$

D'après le théorème bien connu de Lusin on peut trouver dans chacun des ensembles E_k $(p \leqslant k \leqslant q)$ un sous-ensemble fermé F_k de mesure $mF_k \geqslant \frac{1}{2}mE_k$ tel que la restriction de la fonction mesurable $\alpha(x)$ à l'ensemble $F = \sum\limits_p^q F_k$ soit continue. Désignons par $\beta(x)$ une fonction continue, égale à $\alpha(x)$ dans l'ensemble F et linéaire dans son complémentaire par rapport à l'intervalle $\langle a, b\rangle$. On a en raison des inégalités (11):

$$mF \leqslant \delta, \qquad \int_F |f(x, \beta(x))|\,dx = \int_F |f(x, \alpha(x))|\,dx \geqslant \sum_p^q k\cdot mF_k \geqslant 1$$

ce qui est en contradiction avec l'inégalité (10). Nous avons donc démontré que la relation (7) est impossible.

Travaux cités

[1] G. Aquaro, *Sul teorema di esistenza di Carathéodory per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie*, Boll. Unione Mat. Ital. VIII (1955), p. 208-212.

[2] C. Carathéodory, *Vorlesungen über Reelle Funktionen*, Leipzig-Berlin 1927.

[3] K. Hayashi, *On the differential equation of Carathéodory's type*, Memoirs of the College of Sciences, Kyoto, Vol. XXVIII, N° 2 (1954), p. 129-132.

[4] C. Olech et Z. Opial, *Sur une inégalité différentielle*, Ann. Polon. Math. 7 (1959), p. 247-254.

[5] G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte seconda, Bologna 1949.

[6] G. Scorza-Dragoni, *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*, Rend. Sem. Mat. Padova 17 (1948), p. 102-106.

[7] — *Una applicazione della quasi-continuità semiregolare delle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto ad un'altra variabile*, Atti Acc. Naz. Lincei XII, 1 (1952), p. 55-61.

Reçu par la Rédaction le 29. 12. 1958

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VIII (1960)

Sur une inégalité

par Z. Opial (Kraków)

1. Soit $x(t)$ une fonction de classe C^1 définie dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ $(h > 0)$ et telle que

$$x(0) = x(h) = 0, \quad x(t) > 0 \quad \text{pour} \quad 0 < t < h. \tag{1}$$

On a alors (v. [1], p. 185):

$$\int_0^h x^2(t)\,dt \leqslant \frac{h^2}{\pi^2}\int_0^h x'^2(t)\,dt. \tag{2}$$

Grâce à l'inégalité (2) il est facile d'évaluer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^h |x(t)x'(t)|\,dt. \tag{3}$$

En effet, en appliquant à l'intégrale (3) d'abord l'inégalité de Schwarz, puis l'inégalité (2), on obtient

$$\int_0^h |x(t)x'(t)|\,dt \leqslant \frac{h}{\pi}\int_0^h x'^2(t)\,dt, \tag{4}$$

inégalité que nous avons utilisée dans notre note [2].

La question se pose de savoir si l'inégalité (4) est la plus précise de ce type ou, autrement dit, si le coefficient h/π est le plus petit possible. Le théorème suivant nous fournit la réponse.

Pour toute fonction $x(t)$ de classe C^1 satisfaisant aux conditions (1) *on a*

$$\int_0^h |x(t)x'(t)|\,dt \leqslant \frac{h}{4}\int_0^h x'^2(t)\,dt. \tag{5}$$

Le coefficient $h/4$ est le plus petit possible.

2. Avant de passer à la démonstration de l'inégalité (5) nous allons démontrer le lemme suivant: