ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VIII (1960)

Sur quelques propriétés des lignes géodésiques

par S. Gołąb (Kraków)

§ 1. Dans la géométrie différentielle il arrive, plus souvent que dans d'autres domaines des mathématiques, qu'il existe pour une notion (être géométrique) plusieurs définitions qui ne sont pas équivalentes. Une des plus importantes notions de ce genre est celle de *ligne géodésique*. Pour des raisons de simplicité je me borne dans cet article aux surfaces à deux dimensions plongées dans l'espace euclidien à trois dimensions.

Je vais citer quelques définitions bien connues de cette notion.

I. Une courbe C située sur la surface S est dite *ligne géodésique*, si pour tout couple de points p, q de S suffisamment voisins, l'arc C^* de C contenu entre les points p et q, réalise le minimum de la longueur parmi tous les arcs rectifiables joignant p et q et situés sur S.

II. Une courbe C de S est dite *ligne géodésique*, s'il existe en tout point p de C un plan osculateur qui est perpendiculaire au plan tangent à S au point p.

III. Une courbe C de S est dite *ligne géodésique*, si sa courbure géodésique est en tout point égale à zéro.

IV. Une ligne C de S est dite *ligne géodésique*, si elle possède la propriété suivante. Désignons par T la surface développable définie d'une façon univoque par la famille des plans tangents à S le long de C. Si la courbe C (située en même temps sur T) devient, après l'application de T sur un plan, un segment de droite, alors C est appelée ligne géodésique.

V. Une ligne C de S est dite *ligne géodésique*, si elle peut être obtenue comme intégrale particulière du système d'équations

$$(*)\qquad \frac{d^2u_i}{ds^2}+\left\{{i \atop jk}\right\}\frac{du_j}{ds}\cdot\frac{du_k}{ds}=0 \qquad (i=1,2),$$

où $\left\{{i \atop jk}\right\}$ sont les symboles de Christoffel de deuxième espèce et u_i sont les coordonnées curvilignes de la surface S.

Les définitions mentionnées ci-dessus ne sont pas équivalentes entre elles. En vérité, il y a même plus de cinq définitions diverses, car quelques unes des notions, au moyen desquelles ces définitions sont construites, possèdent pour elles-mêmes quelques significations non équivalentes. Par exemple, la notion de plan osculateur d'une courbe au point envisagé peut être définie de plusieurs façons. Il en est de même de la courbure géodésique. Si nous prenons ici, pour point de départ, la définition comme courbure de la projection de C sur le plan tangent au point p, on aura aussi une ambiguité à cause du fait que la courbure même peut être définie de plusieurs manières.

Pour les surfaces qui sont suffisamment régulières, les définitions citées auparavant deviennent équivalentes (toujours au point de vue local). On peut se proposer d'étudier le rapport mutuel de ces définitions au point de vue logique si l'on fait sur la surface S des faibles hypothèses de régularité, c'est-à-dire assurant seulement l'existence de toutes les notions intervenant dans l'énoncé des définitions correspondantes. S'il s'agit du rapport entre les définitions I (variationnelle) et V (analytique), il a été élucidé dans les travaux récents de Hartman et Wintner [2], [3]. La totalité du problème, pour ce qui concerne le rapport mutuel des définitions précédentes, est encore loin d'être résolue.

Dans le présent travail je donne un résultat concernant le rapport entre les définitions III et V (ou bien III et I). Des résultats ultérieurs dans cet ordre d'idées, liés à la notion de courbure géodésique des courbes situées sur une surface S, seront publiés par mon élève M. A. Zajtz.

Avant les travaux mentionnés de Hartman et Wintner les lignes géodésiques avaient été le sujet d'un travail de Busemann et Feller [1] concernant les surfaces convexes. On lit à la page 40 de ce travail: „*Auf einer konvexen Fläche haben die kürzesten Linien in jedem Flächenpunkt mit Tangentialebene die geodätische Krümmung Null*". Or, j'ai dit plus haut qu'on a plusieurs définitions différentes de la courbure géodésique. Sous ce rapport les auteurs s'expriment sans ambiguité en disant: „*die Projektion der kürzesten Linie auf die Tangentialebene die Krümmung Null hat*". Les auteurs ajoutent en outre: „*das oben gesagte auch in solchen Punkten gilt, in denen es keine Normalkrümmungen gibt oder diese unendlich sind*".

Le but de ce travail est de montrer par deux exemples d'une surface, ou bien convexe au sens large (surface cylindrique), ou bien convexe au sens strict (surface de révolution), l'existence de lignes géodésiques (au sens des définitions I resp. V) pour lesquelles la courbure géodésique (comme courbure de la projection orthogonale au plan tangent au point p) au point p convenablement choisi est égale à ∞. Cette propriétè remarquable sera satisfaite — bien entendu — au point p où la courbure de Gauss, au sens classique n'est pas finie, mais aussi pour presque toutes les géodésiques passant par p.

§ 2. Considérons la surface cylindrique S dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z et coupent la courbe

$$y = |x|^a, \tag{1}$$

où a est un nombre satisfaisant à l'inégalité

$$1 < a < 2. \tag{2}$$

Les inégalités (2) garantissent le fait que la surface S admettra en chaque point un plan tangent. La surface S possède en outre en chaque point, pour lequel on a $x \neq 0$, une courbure de Gauss au sens classique. Aux points de la génératrice $x = 0$ chaque section normale ne contenant pas la génératrice possède une courbure infinie (suivant n'importe quelle définition). La section normale le long de la génératrice a une courbure égale à zéro. Soit p_0 l'origine des coordonnées. On constate sans difficulté que, dans ce cas, les définitions I et V se confondent. Les équations de la ligne géodésique G, passant par p_0 et distincte de la génératrice, peuvent être écrites sous la forme suivante

$$x = t, \quad y = |t|^a, \quad z = k\int_0^t \sqrt{1+a^2|u|^{2a-2}}\,du, \tag{3}$$

k désigne ici un nombre réel arbitraire qui joue le rôle de paramètre pour toutes les géodésiques (sauf pour la génératrice) passant par p_0. Désignons par G^* la projection orthogonale de G sur le plan tangent Π_0 au point p_0. Puisque Π_0 se confond avec le plan $(0, x, z)$, l'équation de G^* sera

$$x = t, \quad z = k\varphi(t), \tag{4}$$

où nous avons désigné par φ la fonction

$$\varphi(t) = \int_0^t \sqrt{1+a^2|u|^{2a-2}}\,du.$$

La fonction φ est n'admet pas de seconde dérivée φ'' pour $t = 0$ et pour cette raison nous trouverons la courbure de G^* pour $t = 0$ directement en déterminant le centre de courbure. La tangente à G^* au point p_0 a l'équation

$$z = k\varphi'(0)\cdot x$$

et, en vertu de la formule

$$\varphi'(t) = \sqrt{1+a^2|t|^{2a-2}}$$

et de l'inégalité $2a-2 = 2(a-1) > 0$, on a $\varphi'(0) = 1$. L'équation de la tangente à G^* au point p_0 est donc

$$z = k\cdot x.$$

L'équation de la tangente au point $x_0 \neq 0$ étant

$$z - k\varphi(x_0) = k\varphi'(x_0)(x - x_0),$$

les équations des normales aux points p_0 et $p(x_0, z)$ seront respectivement

$$z = -\frac{1}{k}x, \quad z - k\varphi(x_0) = -\frac{x - x_0}{k\varphi'(x_0)}.$$

Désignons par (x_1, z_1) les coordonnées du point de rencontre de ces normales. En résolvant par rapport à x l'équation

$$-\frac{1}{k}x = k\varphi(x_0) - \frac{x - x_0}{k\varphi'(x_0)}$$

nous obtenons

$$x_1 = \frac{x_0 + k^2\varphi(x_0)\varphi'(x_0)}{1 - \varphi'(x_0)}. \tag{5}$$

(Remarque. On a pour $x_0 \neq 0$ $\varphi'(x_0) = \sqrt{1 + a^2|x_0|^{2(a-1)}} > 1$, il est donc permis de diviser par $1 - \varphi'(x_0)$). En multipliant le dénominateur et le numérateur du second membre de l'équation (5) par $1 + \varphi'(x_0)$, nous obtenons

$$x_1 = -\frac{\left(1 + \sqrt{1 + a^2|x_0|^{2(a-1)}}\right)\left\{x_0 + k^2\sqrt{1 + a^2|x_0|^{2(a-1)}}\int\limits_0^{x_0}\sqrt{1 + a^2|u|^{2(a-1)}}\,du\right\}}{a^2|x_0|^{2(a-1)}}.$$

En appliquant à l'intégrale le théorème de la moyenne nous pouvons écrire

$$x_1 = -\frac{\left[1 + \sqrt{1 + a^2|x_0|^{2(a-1)}}\right]\left[x_0 + k^2\sqrt{1 + a^2|x_0|^{2(a-1)}} \cdot x_0\sqrt{1 + a^2|\Theta x_0|^{2(a-1)}}\right]}{a^2|x_0|^{2(a-1)}}$$

ou finalement

$$x_1 = -\operatorname{sgn}(x_0)\frac{[1 + \varphi'(x_0)][1 + k^2\varphi'(x_0)\varphi'(\Theta x_0)]}{a^2|x_0|^{2a-3}}.$$

Remarquons que $\varphi'(x_0) \to 1$, $\varphi'(\Theta x_0) \to 1$, quand $x_0 \to 0$ ce qui entraîne que le numérateur tend vers $2(1 + k^2)$. Le comportement du dénominateur dépend de la position du nombre a par rapport à $\frac{3}{2}$. Nous avons

$$|x_1| \to \infty \qquad \text{pour} \quad a > \tfrac{3}{2},$$

$$x_1 \to -2\operatorname{sgn}(x_0)\frac{1 + k^2}{a^2} \qquad \text{pour} \quad a = \tfrac{3}{2},$$

$$x_1 \to 0 \qquad \text{pour} \quad a < \tfrac{3}{2}.$$

Nous avons, par conséquent, en tenant compte de $z_1 = -x_1/k$, les corollaires suivants:

Si $a > \frac{3}{2}$, la courbure de G^* au point p_0 est égale à zéro, donc la courbure géodésique de G s'annule.

Si $a < \frac{3}{2}$, la courbure de G^* au point p_0 est infinie. Dans ce cas non seulement G, mais aussi sa projection G^* admet une courbure infinie. Ceci a lieu pour tous les k, c'est-à-dire pour chaque ligne géodésique différente de la génératrice.

Dans le cas $a = \frac{3}{2}$ la projection G^* possède au point p_0 une inflexion, les centres de courbure à gauche et à droite existent et sont distincts.

§ 3. Nous donnerons maintenant un exemple d'une surface convexe au sens strict, c'est-à-dire telle que le plan tangent possède en chaque point seulement le point de contact commun avec S. L'exemple concerne des surfaces de révolution. Les lignes géodésiques situées sur les surfaces de révolution ont été étudiées sous les hypothèses de faible régularité (rectifiabilité du méridien) dans un travail de E. A. Morozowa [4]. C'est ce travail qui m'a suggéré la recherche de l'allure de la courbure géodésique des lignes géodésiques situées sur les surfaces de révolution, spécialement aux points où la courbure de Gauss est infinie.

Nous considérons dans le plan (x, z) le méridien donné par les équations paramétriques

$$x = \varphi(s), \quad z = \psi(s), \tag{6}$$

où nous avons posé

$$\varphi(s) = 1 - |s|^a, \quad -\delta \leqslant s \leqslant \delta < 1, \tag{7}$$

en supposant que le paramètre s représente l'arc du méridien. Quant à la valeur de l'exposant a, nous en disposerons plus tard. La condition (7) nous permettra de déterminer la fonction ψ d'une façon univoque par la condition initiale

$$\psi(0) = 0. \tag{8}$$

En effet, nous avons

$$\frac{dx}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = -a\operatorname{sgn}s\,|s|^{a-1},$$

d'où, à cause de la relation

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = 1,$$

on obtient

$$\psi(s) = \varepsilon\int_0^s \sqrt{1-a^2|u|^{2a-2}}\,du. \tag{9}$$

Nous posons dans la suite $\varepsilon = 1$. Je vais montrer que l'arc L défini au moyen des équations (6) est convexe au sens strict. Dans ce but remarquons que les fonctions φ et ψ sont régulières pour les valeurs $s \neq 0$. Le seul point singulier du méridien peut être le point $s = 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} &\varphi'(s) = -a\eta|s|^{a-1}, && \psi'(s) = \sqrt{1-a^2|s|^{2a-2}}, \\ &\varphi''(s) = -a(a-1)|s|^{a-2}, && \psi''(s) = \frac{-\eta a^2(a-1)|s|^{2a-3}}{\sqrt{1-a^2|s|^{2a-2}}}, \end{aligned} \tag{10}$$

où nous avons posé

$$\eta = \operatorname{sgn} s.$$

De là nous tirons

$$\begin{aligned} \varphi'\psi''-\psi'\varphi'' &= \frac{a^3(a-1)|s|^{3a-4}}{\sqrt{1-a^2|s|^{2a-2}}} + a(a-1)|s|^{a-2}\sqrt{1-a^2|s|^{2a-2}} \\ &= \frac{a(a-1)|s|^{a-2}}{\sqrt{1-a^2|s|^{2a-2}}}. \end{aligned} \tag{11}$$

On voit donc que pour $a > 1$ le déterminant $\begin{vmatrix} \varphi' & \varphi'' \\ \psi' & \psi'' \end{vmatrix}$ a un signe constant, ce qui démontre la convexité de l'arc L. La singularité $s = 0$ ne peut détruire cette propriété, puisque L admet au point $s = 0$ une tangente. Comme $\varphi'^2+\psi'^2 = 1$, la courbure de L est donnée par la formule

$$k(s) = \varphi'\psi''-\psi'\varphi''. \tag{12}$$

Si nous prenons pour a une valeur satisfaisant aux inégalités

$$1 < a < 2, \tag{13}$$

l'arc L aura pour $s = 0$ une courbure infinie. Nous admettrons dans la suite les inégalités (13). L'arc L, étant convexe, est en même temps rectifiable. La surface S engendrée par L par une rotation autour de l'axe des z sera convexe au sens strict. Les lignes géodésiques de S, comme lignes les plus courtes, s'obtiennent d'après le théorème de Morozowa par l'intégration du système $(*)$. Si nous écrivons les équations paramétriques de la surface S sous la forme

$$x = \varphi(u)\cos v, \quad y = \varphi(u)\sin v, \quad z = \psi(u),$$

l'intégration du système $(*)$ conduira — comme on le sait — à l'équation

$$\frac{dv}{du} = \frac{k}{\varphi(u)\sqrt{\varphi^2(u)-k^2}}, \tag{14}$$

où k désigne une constante arbitraire dont le module est plus petit que l'unité (nous omettons ainsi le méridien même, comme ligne géodésique, ce qui est sans importance pour notre raisonnement). Nous allons considérer les géodésiques qui passent par le point p_0 correspondant à la valeur $u = 0$ et n'importe quelle valeur de v, par exemple $v = 0$. L'équation d'une telle ligne géodésique s'écrit sous la forme

$$v = v(u)$$

où

$$v(u) = \int_0^u \frac{k\,dt}{\varphi(t)\sqrt{\varphi^2(t)-k^2}}. \tag{15}$$

Nous allons montrer qu'en choisissant convenablement l'exposant a, pour tous les $k \neq 0$, non seulement la géodésique G même, mais aussi sa projection G^* sur le plan tangent à S au point p_0 aura une courbure infinie. Puisque $\varphi'(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$, la tangente au méridien au point p_0 est la droite perpendiculaire à l'axe des x et, par conséquent, le plan tangent Π_0 à S au point p_0 est le plan $x = 1$. La projection G^* de la géodésique G sur Π_0 aura les équations paramètriques

$$y = \varphi(u)\sin v(u), \quad z = \psi(u), \tag{16}$$

et il s'agit d'examiner la courbure de cette courbe pour $u = 0$. La formule classique ne peut être appliquée ici, car la fonction φ ne possède pas de dérivée seconde pour $u = 0$. Les fonctions $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ admettent cependant des dérivées secondes pour $u \neq 0$ et pour $u \neq 0$ on peut calculer la courbure $k^*(u)$ de la projection G^*. Ayant calculé cette courbure $K^*(u)$, on peut examiner l'existence de la limite

$$\lim_{u\to 0} K^*(u). \tag{17}$$

Si elle existe (étant finie ou infinie), sera-t-elle la courbure de G^* pour $u = 0$? Or, on sait bien que pour une courbe continue, s'il existe une position limite de la tangente au point p pour $p \to p_0$, cette limite est en même temps la tangente au point p_0. Par analogie, on pourrait présumer l'existence d'un théorème analogue concernant la courbure. Comme je n'ai pas pu trouver le théorème correspondant dans la littérature, je le rapporte sous forme du lemme suivant.

Lemme. *Soit une courbe plane C, donnée par les équations paramétriques*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Nous supposons que les fonctions $x(t), y(t)$ sont de classe C_2 pour $t \neq 0$ et que pour $t = 0$ elles possèdent des dérivées premières continues ne s'annulant pas simultanément. Nous supposons enfin que la limite de la courbure existe:

$$\lim_{t\to 0+0} K(t) = g. \tag{18}$$

Dans ces hypothèses C admet pour $t = 0$ une courbure (unilatérale) égale à g dans ce sens que, si o désigne le point $(x(0), y(0))$, N_0 la normale à C au point o, N la normale à C au point p, q le point d'intersection de N avec N_0, alors on a

$$\lim_{p\to p_0} \frac{1}{\overline{oq}} = |g|. \tag{19}$$

Démonstration. Il suffit de traiter les trois cas suivants: I. $g = \infty$, II. $g > 0$, III. $g = 0$. Dans les cas I et II la fonction $K(t)$ a un signe constant dans un voisinage du point o, donc une partie voisine de C contenant o est strictement convexe, et par suite rectifiable (la rectifiabilité dans tous les cas I, II, III résulte d'ailleurs de la continuité des dérivées premières x', y' et de l'inégalité $x'^2+y'^2 > 0$). En introduisant l'arc s (compté à partir de o) et un repère cartésien dont l'origine est o et l'axe des x se confond avec la tangente à C au point o, les équations de C peuvent être écrites sous la forme

$$x = F(s), \quad y = G(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant \delta, \tag{20}$$

où les fonctions F, G sont de classe C_2 pour $s > 0$ et vérifient la relation

$$F'^2+G'^2 = 1 \tag{21}$$

dans l'intervalle fermé $\langle 0, \delta\rangle$. Nous avons en outre

$$\begin{gathered} F(0) = G(0) = 0, \quad F'(0) = 1, \quad G'(0) = 0, \\ K(s) = F'(s)\,G''(s) - G'(s)\,F''(s) \quad \text{pour} \quad s > 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Pour $s = 0$ les fonctions F, G peuvent ne pas posséder de dérivées secondes. En vertu de (21) nous pouvons écrire

$$\begin{gathered} G'(s) = \varepsilon\sqrt{1-F'^2(s)}, \qquad G''(s) = \frac{-\varepsilon F'(s)F''(s)}{\sqrt{1-F'^2(s)}}, \\ K(s) = \frac{-\varepsilon F''(s)}{\sqrt{1-F'^2(s)}}. \end{gathered} \tag{23}$$

Remarquons que l'on a dans les cas I et II $|F'| < 1$ pour $s > 0$ et suffisamment petit, car de l'inégalité $\varepsilon F'' < 0$ il s'ensuit que $F'(s)$ est strictement monotone dans le voisinage de $s = 0$. De là nous avons d'après (23) l'inégalité

$$G'(s) \neq 0 \tag{24}$$

valable pour s suffisamment petit. Remarquons encore que la propriété de Darboux de la fonction $F'(s)$ et l'inégalité $K(s) > 0$ (dans les cas I et II) entraînent l'existence de la limite

$$\lim_{s\to 0} F'(s) = 1. \tag{25}$$

Calculons l'ordonnée η du point q. Or, dans les cas I et II la normale N coupe la normale N_0 au point q (en vertu de l'inégalité (24)) et l'ordonnée η du point q est égale à

$$\eta = G(s)+F(s)\cdot\frac{F'(s)}{G'(s)} = \frac{F(s)F'(s)+G(s)G'(s)}{G'(s)}.$$

Calculons la limite $\lim\limits_{s\to 0}\eta$ en appliquant le théorème de l'Hôspital. Formons dans ce but l'expression

$$I(s) = \frac{(FF'+GG')'}{(G')'} = \frac{1+FF''+GG''}{G''} = G+\frac{1+FF''}{G''}.$$

Comme $G(s)\to 0$, il suffit d'examiner la limite du quotient $(1+FF'')/G''$. D'après l'hypothèse nous avons

$$\frac{F''}{\sqrt{1-F'^2}} \to -\varepsilon g.$$

D'où, en vertu de (23) et de (25), nous obtenons

$$G'' \to -\varepsilon g.$$

Maintenant, il faut distinguer deux cas. Supposons tout d'abord que $g > 0$. Dans ce cas nous avons

$$FF'' = F\sqrt{1-F'^2}\cdot\frac{F''}{\sqrt{1-F'^2}} \to 0\cdot 0\cdot(-\varepsilon g) = 0$$

et, par conséquent,

$$\lim_{s\to 0} I(s) = -\varepsilon/g,$$

d'où

$$\lim_{s\to 0}\eta(s) = -\varepsilon/g,$$

ce qui établit notre énoncé. Supposons maintenant $g = \infty$. Dans ce cas nous avons

$$\left|\frac{1+FF''}{G''}\right| \leqslant \frac{1}{|G''|} + F\frac{\sqrt{1-F'^2}}{F'}.$$

Mais $|G''| \to \infty$, $F \to 0$, $F' \to 1$, $\sqrt{1-F'^2} \to 0$, donc de l'inégalité précédente résulte

$$\frac{1+FF''}{G''} \to 0$$

ou

$$\lim_{s\to 0} I(s) = 0,$$

donc

$$\lim_{s\to 0} \eta = 0$$

conformément à l'énoncé.

Dans le cas III l'inégalité (24) ne doit pas être satisfaite dans le voisinage du point $s = 0$ et la normale N ne doit pas couper la normale N_0. Dans ce cas il s'agit de montrer que, si $G'(s) \neq 0$, la valeur η est grande, en valeur absolue, pour s suffisamment petit.

Puisque dans ce cas il peut exister dans chaque voisinage du point $s = 0$ des solutions de l'équation $G'(s) = 0$, le théorème de l'Hôspital ne peut pas être appliqué et le raisonnement doit être différent.

Comme la courbe C possède, par hypothèse, une tangente T_0 au point o et que cette tangente T_0 est la position limite de la tangente T au point voisin p, alors, en prenant l'origine du système cartésien des coordonnées au point o et la tangente T_0 pour axe des x, on peut mettre l'équation de la courbe C dans le voisinage du point o sous la forme normale

$$y = f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \delta,$$

où f possède pour $x > 0$ une dérivée seconde f'' et

$$\lim_{x\to 0+0} f'(x) = 0. \tag{26}$$

La courbure $K(x)$ s'exprime alors par la formule

$$K(x) = \frac{f''(x)}{[1+f'^2(x)]^{3/2}}.$$

L'hypothèse (18) avec la relation (26) donne

$$\lim_{x\to 0+0} f''(x) = K_0 = 0,$$

ce qui montre, d'après un théorème bien connu, qu'il existe une dérivée $f''(0)$ unilatérale et, par conséquent, l'arc C admet au point p_0 une courbure au sens de l'énoncé du théorème. Notre lemme se trouve ainsi démontré.

Nous allons maintenant calculer la limite de $K^*(u)$ pour $u \to 0$. Le paramètre u n'est évidemment pas l'arc pour la courbe G^* (il représente l'arc du méridien et n'est, en général, l'arc ni pour G ni pour G^*). Donc la formule suivante subsiste:

$$K^*(u) = \frac{y'(u)z''(u) - z'(u)y''(u)}{[y'^2(u)+z'^2(u)]^{3/2}}. \tag{27}$$

Nous nous occuperons tout d'abord du dénominateur du second membre de (27). Le calcul de sa limite ne présente aucune difficulté. On a

$$v'(u) = \frac{k}{\varphi(u)\sqrt{\varphi^2(u)-k^2}}, \qquad v''(u) = \frac{k^3\varphi'(u) - 2k\varphi^2(u)\varphi'(u)}{\varphi^2(u)[\varphi^2(u)-k^2]^{3/2}},$$

d'où résulte

$$\lim_{u\to 0} v'(u) = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}, \qquad \lim_{u\to 0} v''(u) = 0,$$

car $\varphi'(0) = 0$. Nous avons ensuite

$$y' = \varphi'\sin v + \varphi v'\cos v, \qquad z' = \psi', \tag{28}$$

d'où

$$\lim_{u\to 0} y' = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}, \qquad \lim_{n\to 0} z' = 1$$

et finalement

$$\lim_{u\to 0} [y'^2+z'^2]^{3/2} = \frac{1}{(1-k^2)^{3/2}} > 0.$$

En différentiant les relations (28) nous obtenons

$$y'' = \varphi''\sin v + 2\varphi' v'\cos v - \varphi v'^2 \sin v + \varphi v''\cos v, \qquad z'' = \psi''.$$

De là nous avons

$$\begin{aligned} y'z'' - y''z' &= \varphi'\psi''\sin v + \varphi\psi'' v'\cos v - \varphi''\psi'\sin v - 2\varphi'\psi' v'\cos v + \\ &\quad + \varphi\psi' v'^2 \sin v - \varphi\psi' v''\cos v \\ &= (\varphi'\psi'' - \varphi''\psi')\sin v + \varphi\psi'' v'\cos v + R(u), \end{aligned}$$

où nous avons posé pour abréger

$$R(u) = -2\varphi'\psi' v'\cos v + \varphi\psi' v'^2 \sin v - \varphi\psi' v''\cos v.$$

En tenant compte des relations

$$v \to 0, \quad v' \to \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}, \quad v'' \to 0, \quad \varphi \to 1, \quad \varphi' \to 0, \quad \psi' \to 1$$

nous constatons que

$$\lim_{u\to 0} R(u) = 0.$$

Remarquons ensuite que l'on a

$$v(u) = \frac{ku}{\varphi^2(\Theta u)\sqrt{\varphi^2(\Theta u)-k^2}}, \qquad 0 < \Theta < 1,$$

ce qui peut être écrit sous la forme

$$v(u) = \frac{ku}{\sqrt{1-k^2}}\,\varrho(u),$$

où la fonction

$$\varrho(u) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{\varphi^2(\Theta u)}\sqrt{\frac{1-k^2}{\varphi^2(\Theta u)-k^2}}$$

possède la propriété

$$\lim_{u\to 0}\varrho(u) = 1.$$

On peut donc écrire

$$\sin v = v\,\sigma(u),$$

où

$$\lim_{u\to 0}\sigma(u) = 1.$$

Comme

$$\sin v = \frac{ku}{\sqrt{1-k^2}}\,\varrho\sigma$$

on a d'après (11)

$$(\varphi'\psi''-\varphi''\psi')\sin v = \frac{k\varrho\sigma\alpha(\alpha-1)\operatorname{sgn} u}{\sqrt{1-k^2}}\cdot\frac{|u|^{\alpha-1}}{\sqrt{1-\alpha^2|u|^{2\alpha-2}}},$$

d'où l'on voit — d'après l'hypothèse $\alpha > 1$ — que

$$\lim_{u\to 0}\{(\varphi'\psi''-\varphi''\psi')\sin v\} = 0.$$

Il est donc évident que le terme dont dépend essentiellement le passage à la limite de l'expression $y'z''-y''z'$ est le terme $\varphi\psi''v'\cos v$. Puisque

$$\varphi v'\cos v \to \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \neq 0,$$

il nous reste à examiner la limite $\lim\limits_{u\to 0}\psi''(u)$. De la formule (10) il s'ensuit que

1. pour $\alpha > \frac{3}{2}$ $\lim\limits_{u\to 0}\psi''(u) = 0$ et, par conséquent,

$$\lim_{u\to 0} k^*(u) = 0;$$

2. si $\alpha = \frac{3}{2}$, alors

$$\lim_{u\to 0+0}\psi''(u) = \alpha^2(\alpha-1) = \tfrac{9}{8}, \qquad \lim_{u\to 0-0}\psi''(u) = -\alpha^2(\alpha-1) = -\tfrac{9}{8}$$

et, par conséquent,

$$\lim_{u\to 0+0} K^*(u) = \frac{9k}{8\sqrt{1-k^2}}, \qquad \lim_{u\to 0-0} K^*(u) = -\frac{9k}{8\sqrt{1-k^2}};$$

3. si $\alpha < \frac{3}{2}$, alors $\lim\limits_{u\to 0}\psi''(u) = \pm\infty$ et, par conséquent,

$$\lim_{u\to 0} K^*(u) = \infty.$$

Nous constatons donc que la courbure géodésique de G au point $u = 0$ est égale à zéro seulement dans le cas $\alpha > \frac{3}{2}$.

Dans tous les deux exemples (surface cylindrique et surface de révolution) l'exposant $\alpha = \frac{3}{2}$ joue un rôle spécial. Ce fait trouvera son explication dans un travail de A. Zajtz qui paraîtra prochainement.

Les résultats contenus dans ce travail ont été exposés, en partie dans une séance de la Société Polonaise de Mathématique (Section de Wrocław) en 1955 et au Congrès Mathématique de Vienne en 1956.

Travaux cités

[1] H. Busemann und W. Feller, *Krümmungseigenschaften konvexer Flächen*, Acta Math. 66 (1935), p. 1-47.

[2] P. Hartman, *On the local uniqueness of geodesics*, Amer. J. Math. 72 (1950), p. 723-730.

[3] P. Hartman and A. Wintner, *On the problem of geodesics in the small*, Amer. J. Math. 73 (1951), p. 132-148.

[4] Е. А. Морозова, *Кратчайшие линии на поверхностях вращения со спрямляемым меридианом*, ДАН СССР 84 (1952), p. 1135-1138.

Reçu par la Rédaction le 10. 1. 1957