coule immédiatement d'un théorème de S. Mizohata et S. Yamaguti [2]. Afin de pouvoir l'appliquer à l'équation (1) il faudrait seulement poser

$$\mu = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega e(t)\,dt$$

et remplacer ensuite les fonctions $f(x)$ et $e(t)$ par les fonctions $\bar{f}(x) = f(x)-\mu$ et $\bar{e}(t) = e(t)-\mu$.

Travaux cités

[1] S. Lefschetz, *Lectures on differential equations*, Princeton 1948.

[2] S. Mizohata and S. Yamaguti, *On the existence of periodic solutions of the non linear differential equation $x''+a(x)x'+\varphi(x) = p(t)$*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Sec. A, 27 (1952), p. 109-113.

[3] K. Urabe, *On the existence of periodic solutions for certain non-linear differential equations*, Math. Japonicae 2 (1949), p. 23-26.

[4] W. R. Utz, *Su una nota di De Castro*, Boll. Unione Mat. Ital. (3) 11 (1956), p. 28-30.

[5] T. Ważewski, *Une méthode topologique de l'examen du phénomène asymptotique relativement aux équations différentielles ordinaires*, Atti Acc. Naz. Lincei 3 (1947), p. 210-215.

Reçu par la Rédaction le 29. 12. 1958

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VIII (1960)

Sur la dépedance des solutions d'un système d'équations différentielles de leurs seconds membres. Application aux systèmes presque autonomes

par Z. Opial (Kraków)

1. Envisageons le système d'équations différentielles

$$x_i' = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ou dans la notation vectorielle

$$X' = f(t, X). \tag{1}$$

Nous supposons une fois pour toutes que la fonction vectorielle $f(t, X)$ est définie et continue dans tout l'espace $F = I\times E$ où I désigne la droite réelle et E l'espace à n dimensions des variables $x_1, \ldots, x_n$.

Dans toute la suite nous admettrons l'unicité des solutions du système (1), c'est-à-dire nous supposerons que pour tout point $P_0 = (t_0, X_0)$, où $t_0\in I$ et $X_0\in E$, il existe une et une seule solution du système (1), égale à X_0 au point t_0. Désignons-la par $X(t, P_0)$ et soit J l'intervalle maximum de son existence.

On sait (voir p. ex. [2], p. 149, [6], p. 27) que cette solution unique du système (1) passant par le point P_0 change peu lorsque le système lui-même change peu, ce qu'on exprime en disant que cette solution dépend d'une manière continue des seconds membres du système considéré.

Pour préciser, envisageons un autre système d'équations différentielles

$$X' = g(t, X) \tag{2}$$

dont le second membre est défini et continu dans tout l'espace F. On a le théorème suivant[1]:

[1] Nous nous bornons au théorème le plus simple de ce type. Pour d'autres théorèmes, plus généraux, nous renvoyons le lecteur aux livres déjà cités.

Pour tout intervalle compact $K \subset J$ $(t_0 \epsilon K)$ et tout nombre positif ε il existe un $\delta > 0$ tel que toute[2] *solution $Y(t, P_0)$ du système* (2), *égale à X_0 au point t_0, est définie dans tout l'intervalle K et y vérifie l'inégalité*

$$|X(t, P_0) - Y(t, P_0)| \leqslant \varepsilon \ ({}^3)$$

pourvu que l'on ait dans tout l'espace F:

$$|f(t, X) - g(t, X)| \leqslant \delta.$$

On peut donc dire que les solutions du système (1) changent d'une manière continue lorsque les seconds membres de ce système changent, eux aussi, d'une manière continue. Mais il est facile de s'imaginer une autre façon, non nécessairement continue, de changer les seconds membres du système (1) qui entraîne pourtant des changements continus des solutions.

En effet, considérons, pour fixer les idées, une seule équation différentielle

$$x' = f(t, x) \tag{3}$$

à second membre continu et supposons que la fonction identiquement nulle soit la solution unique de cette équation passant par le point $(0, 0)$. Prenons ensuite une suite d'équations différentielles

$$x' = f(t, x) + g_n(t) \tag{4}$$

et supposons que chacune des fonctions $g_n(t)$ soit continue et absolument intégrable dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et que l'on ait la relation

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |g_n(t)|\, dt = 0.$$

L'intuition nous dit que dans ces hypothèses les solutions $x_n(t)$ des équations (4), égales à 0 au point 0, tendent vers la solution identiquement nulle de l'équation (3) lorsque n croît indéfiniment et que cette convergence est uniforme dans tout intervalle compact. On pourrait évidemment en dire de même de n'importe quelle autre solution de l'équation (3).

S'il en était bien ainsi, on pourrait dire que les solutions de l'équation (3) changent peu lorsque le changement global du second membre de cette équation est suffisamment petit.

Nous allons démontrer qu'il en est bien ainsi non seulement dans le cas spécial d'une équation (3), mais aussi pour le système général (1)[4].

[2] Il n'est pas nécessaire d'admettre l'unicité des solutions du système (2).

[3] Pour tout vecteur $X = (x_1, \ldots, x_n)$ on désigne par $|X|$ le nombre $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

[4] Comparer [7].

2. Les théorèmes sur la dépendance continue des solutions du système (1) des seconds membres de ce système, dont nous avons cité un cas particulièrement simple au début du n° précédent, ont permis à L. Markus [3] d'étudier l'allure asymptotique des solutions d'un système d'équations différentielles

$$X' = f(t, X)$$

dont le second membre tend pour $t \to +\infty$ vers une fonction $f(X)$ qui ne dépend que de X, système qu'il appelle asymptotiquement autonome, à l'aide du système limite autonome

$$X' = f(X).$$

De même, les théorèmes sur la dépendance continue des solutions du système (1) des changements „globalement petits" des seconds membres de ce système nous permettront d'étudier l'allure asymptotique des solutions du système

$$X' = f(X) + g(t, X),$$

presque autonome en ce sens que l'on a

$$|g(t, X)| \leqslant g(t)|X| \quad \text{et} \quad \int_0^\infty |g(t)|\, dt < +\infty,$$

ou dans d'autres sens qui vont être précisés dans la suite.

C'est à cette étude que nous consacrons la seconde partie de la présente note.

Première partie

1. Comme nous l'avons déjà dit, nous admettons dans toutes nos considérations ultérieures l'unicité des solutions du système (1) — hypothèse sans laquelle les théorèmes énoncés ci-dessous cesseraient d'être valables. Il est cependant à noter que tous nos raisonnements resteraient valides, si l'on remplaçait l'espace F tout entier par un domaine ouvert quelconque de cet espace. Néanmoins nous nous bornerons à envisager le cas où le système (1) est défini dans tout l'espace F, car cela simplifiera considérablement les énoncés et les démonstrations des théorèmes.

THÉORÈME I. *Soit $X(t, P_0)$ une solution du système* (1) *passant par le point $P_0 = (t_0, X_0)$ $(t_0 \epsilon I, X_0 \epsilon E)$ et J l'intervalle maximum de son existence. Pour tout intervalle compact $K \subset J$ $(t_0 \epsilon K)$ et tout nombre positif ε il existe un $\delta > 0$ tel que toute solution $Y(t, P_0)$ du système d'équations différentielles*

$$X' = f(t, X) + g(t), \tag{5}$$

où $g(t)$ est une fonction vectorielle continue satisfaisant à l'inégalité

$$\int_K |g(t)|\,dt \leqslant \delta, \tag{6}$$

égale à X_0 au point t_0, est définie dans tout l'intervalle K et y vérifie l'inégalité

$$|X(t, P_0) - Y(t, P_0)| \leqslant \varepsilon. \tag{7}$$

Démonstration. Pour la démonstration par l'absurde supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe un intervalle compact $K_0 \subset J$ $(t_0 \in K_0)$ et un nombre positif ε_0 pour lesquels le choix d'un δ convenable est impossible. Désignons par V_0 l'ensemble des points (t, X) défini par les conditions

$$|X - X(t, P_0)| \leqslant \varepsilon_0, \quad t \in K_0$$

et construisons une fonction vectorielle $f^*(t, X)$ de telle sorte qu'elle soit continue et bornée dans tout l'espace F et égale à $f(t, X)$ dans l'ensemble V_0. On a donc

$$|f^*(t, X)| \leqslant M \tag{8}$$

où M est une constante convenablement choisie.

Envisageons maintenant le système auxiliaire d'équations différentielles

$$X' = f^*(t, X). \tag{9}$$

La restriction de la fonction $X(t, P_0)$ à l'intervalle K_0 est évidemment une solution du système (9). De la définition de la fonction $f^*(t, X)$ il résulte que pour ε_0, l'intervalle K_0, la solution $X(t, P_0)$ et le système (9) le choix convenable d'un δ pour lequel on aurait la conclusion du théorème I n'est non plus possible.

La fonction $f^*(t, X)$ étant par hypothèse bornée dans tout l'espace F, toutes les solutions d'un système

$$X' = f^*(t, X) + g(t) \tag{5*}$$

où $g(t)$ est une fonction vectorielle continue, sont définies sur la droite I tout entière et, à plus forte raison, dans tout l'intervalle K_0.

D'après notre hypothèse il existe une suite $\{g_n(t)\}$ de fonctions continues telles que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{K_0} |g_n(t)|\,dt = 0 \tag{10}$$

et une suite $\{X_n(t, P_0)\}$ de solutions des systèmes

$$X' = f^*(t, X) + g_n(t), \tag{11}$$

égales à X_0 au point t_0, définies dans tout l'intervalle K_0 et telles que l'on ait

$$|X_n(t_n, P_0) - X(t_n, P_0)| > \varepsilon_0 \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{12}$$

pour une suite $\{t_n\}$ de points de l'intervalle K_0.

Pour tout n on a, en vertu des équations (11):

$$X_n(t, P_0) = X_0 + \int_{t_0}^{t} f^*\big(s, X_n(s, P_0)\big)\,ds + \int_{t_0}^{t} g_n(s)\,ds. \tag{13}$$

Il s'ensuit, en raison des relations (8) et (10), que dans l'intervalle K_0 les fonctions $X_n(t, P_0)$ sont équicontinues et bornées dans leur ensemble. On peut donc extraire de la suite $\{X_n(t, P_0)\}$ une suite partielle $\{X_{n_k}(t, P_0)\}$ convergente uniformément dans l'intervalle K_0 vers une fonction continue $X_0(t)$. En passant à la limite dans les relations (13) on en tire

$$X_0(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} f^*\big(s, X_0(s)\big)\,ds$$

d'où il résulte que la fonction $X_0(t)$ est une solution du système (9), égale à X_0 au point t_0. Par conséquent, $X_0(t)$ est identique dans l'intervalle K_0 à la solution $X(t, P_0)$ du système (1), ce qui est en contradiction avec les inégalités (12).

Le théorème I se trouve ainsi démontré.

2. Dans quelques cas particuliers il est facile d'évaluer effectivement la différence entre les intégrales $X(t, P_0)$ et $Y(t, P_0)$ des systèmes (1) et (5) respectivement. Supposons, par exemple, que la fonction vectorielle $f(t, X)$ satisfasse à la condition de Lipschitz:

$$|f(t, X_1) - f(t, X_2)| \leqslant M|X_1 - X_2|$$

pour tout $t \in I$ et tous les $X_1, X_2 \in E$. Des équations (1) et (5) on obtient

$$Y(t) - X(t) = \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(s, Y(s)\big) - f\big(s, X(s)\big)\Big)\,ds + \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds$$

et, par conséquent, pour tout $t \in K$:

$$|Y(t) - X(t)| \leqslant \int_K |g(s)|\,ds + M\int_{t_0}^{t} |Y(s) - X(s)|\,ds.$$

Il en résulte (voir [1], p. 35) que dans tout l'intervalle K on a l'inégalité

$$|Y(t)-X(t)| \leqslant \int_K |g(s)|\, ds \cdot \exp(M|t-t_0|).$$

Il est à noter que l'on obtient la même inégalité en résolvant un autre problème, à savoir lorsque l'on évalue la différence des deux intégrales $X(t)$ et $Y(t)$ du système (1) pour lesquelles on a

$$|X(t_0)-Y(t_0)| \leqslant \int_K |g(s)|\, ds.$$

On peut donc dire que pour les systèmes lipschitziens l'addition d'un terme $g(t)$ au second membre du système produit un effet analogue au déplacement du point initial de la solution considérée.

Il en est de même, si l'on remplace la condition de Lipschitz par l'inégalité

$$|f(t, X_1)-f(t, X_2)| \leqslant \omega(t, |X_1-X_2|),$$

où $\omega(t, u)$ est une fonction continue et croissante au sens large par rapport à la variable u. Supposons pour simplifier que t_0 soit l'extrémité gauche de l'intervalle K. On a alors

$$|Y(t)-X(t)| \leqslant \int_K |g(s)|\, ds + \int_{t_0}^{t} \omega(s, |Y(s)-X(s)|)\, ds,$$

d'où il vient (voir p. ex. [4]) que pour $t \in K$:

$$|Y(t)-X(t)| \leqslant u(t, t_0),$$

où $u(t, t_0)$ désigne l'intégrale supérieure à droite de l'équation différentielle $u' = \omega(t, u)$, issue du point $\left(t_0, \int_K |g(s)|\, ds\right)$.

On obtient une évaluation analogue dans le cas du déplacement du point initial de la solution $X(t)$.

3. Dans l'énoncé du théorème I on pourrait remplacer la condition (6) par une autre, plus générale. En effet, pour que la démonstration de ce théorème reste valable, il suffit de supposer que l'on ait au lieu de (6) l'inégalité suivante

$$\left|\int_L g(t)\, dt\right| \leqslant \delta,$$

quel que soit le sous-intervalle L de l'intervalle K.

4. Du théorème I on peut obtenir, par quelques modifications faciles de ses hypothèses et de sa démonstration, plusieurs théorèmes analogues que nous nous bornerons à énoncer.

Désignons par $V(t, \varepsilon)$ l'ensemble des points (t, X) défini par l'inégalité

$$|X-X(t, P_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $g(t, X)$ une fonction vectorielle continue. Posons

$$g_\varepsilon(t) = \max_{V(t,\varepsilon)} |g(t, X)|.$$

THÉORÈME II. *Pour tout intervalle compact $K \subset J$ $(t_0 \in K)$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que toute solution $Y(t, P_0)$ du système d'équations différentielles*

$$X' = f(t, X)+g(t, X),$$

où $g(t, X)$ est une fonction vectorielle continue satisfaisant à l'inégalité

$$\int_K g_\varepsilon(t)\, dt \leqslant \delta,$$

égale à X_0 au point t_0, est définie dans tout l'intervalle K et y vérifie l'inégalité (7).

Dans les théorèmes I et II on considérait les solutions des systèmes d'équations différentielles, qui passaient toutes par le même point fixe P_0. Dans notre étude de l'allure asymptotique des solutions d'un système presque autonome nous aurons besoin d'un théorème plus général, à savoir:

THÉORÈME III. *Pour tout intervalle compact $K \subset J$ $(t_0 \in K)$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que toute solution $Y(t, P)$ du système* (5) *où $g(t)$ est une fonction continue satisfaisant à l'inégalité* (6), *passant par le point P de l'espace F tel que $|P-P_0| \leqslant \delta$, existe dans tout l'intervalle K et y vérifie l'inégalité* (7).

Deuxième partie

1. Envisageons le système d'équations différentielles

$$X' = f(X)+g(t, X), \tag{14}$$

où $f(X)$ et $g(t, X)$ sont des fonctions définies et continues dans les espaces E et F respectivement. A côté du système (14) considérons le système autonome

$$X' = f(X) \tag{15}$$

et admettons l'unicité des solutions de ce système. Nous supposons de plus que toutes les solutions de ce système sont définies dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

DÉFINITION. Nous dirons que le système (14) est *presque autonome*, si pour toute fonction vectorielle continue et bornée $X(t)$, définie dans un intervalle $(t_0, +\infty)$, on a l'inégalité

$$\int_{t_0}^{\infty} |g(t, X(t))|\,dt < +\infty. \tag{16}$$

Il en est ainsi, par exemple, si la fonction $g(t, X)$ satisfait à l'inégalité

$$|g(t, X)| \leqslant g(t)\,\varrho(|X|),$$

où $\varrho(u)$ est une fonction positive et continue pour $u \geqslant 0$ et $g(t)$ admet une intégrale finie dans l'intervalle $\langle 0, +\infty)$.

2. Soit $X(t)$ une solution du système (14), définie dans un intervalle $\langle t_0, +\infty)$. Sans restreindre la généralité on peut admettre que $t_0 = 0$. Désignons par $X(\infty)$ l'ensemble limite

$$X(\infty) = \prod_{\tau < +\infty} \overline{\sum_{t \geqslant \tau} X(t)}.$$

Donc, pour qu'un point X_0 de l'espace E appartienne à l'ensemble $X(\infty)$, il faut et il suffit qu'il existe une suite de nombres $\{t_n\}$ tels que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} X(t_n) = X_0.$$

L'ensemble $X(\infty)$ est fermé. Si l'ensemble $X(\infty)$ est borné, il est aussi connexe.

THÉORÈME IV. *Si le système* (14) *est presque autonome et pour une solution $X(t)$ de ce système l'ensemble $X(\infty)$ n'est pas vide, il est composé de solutions du système autonome* (15).

Démonstration. Soit X_0 un point arbitraire de l'ensemble $X(\infty)$. Désignons par T la courbe intégrale de l'équation (15) passant par le point X_0. Pour démontrer que T est contenu dans l'ensemble $X(\infty)$, il suffit évidemment de montrer qu'il en est de même de toute partie bornée de T.

Soit donc $\overline{T}$ une partie connexe de T située à l'intérieur d'une boule $|X| \leqslant R$ et telle que $X_0 \epsilon \overline{T}$. Construisons une fonction vectorielle continue $\overline{X}(t)$, égale à $X(t)$ dans tout intervalle du demi-axe $t \geqslant 0$ où $|X(t)| < R$ et satisfaisant à la condition $|\overline{X}(t)| \leqslant R$ dans l'ensemble complémentaire de la somme de ces intervalles par rapport à l'intervalle $\langle 0, +\infty)$. C'est donc une fonction continue et bornée, définie dans l'intervalle $\langle 0, +\infty)$. Le système (14) étant par hypothèse presque autonome, on a

$$\int_{0}^{\infty} |g(t, \overline{X}(t))|\,dt < +\infty. \tag{17}$$

Dans tout intervalle du demi-axe $t \geqslant 0$ où $|X(t)| < R$, $\overline{X}(t)$ est une solution du système (14). De l'hypothèse $X_0 \epsilon X(\infty)$, de l'inégalité (17) et du théorème III il résulte donc que $\overline{T} \subset X(\infty)$.

3. Du théorème IV on déduit immédiatement les corollaires suivants:

COROLLAIRE I(5). *Si le système* (14) *est presque autonome et si pour une solution $X(t)$ de ce système $\lim_{t\to\infty} X(t) = X_0$, le point X_0 est un point singulier du système autonome* (15) *c'est-à-dire $f(X_0) = 0$.*

COROLLAIRE II. *Si le système* (14) *est presque autonome et si aucune solution du système limite* (15) *n'est bornée pour $t \to +\infty$, il en est de même des solutions du système* (14).

COROLLAIRE III. *Si le système autonome* (15) *n'a pas de solutions qui soient bornées dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, le système presque autonome* (14) *n'a pas de solutions bornées pour $t \to +\infty$.*

COROLLAIRE IV. *Si le système autonome* (15) *n'a qu'un seul point singulier X_0 et si aucune autre solution de ce système n'est bornée dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, pour toute solution $X(t)$ du système presque autonome* (14), *bornée pour $t \to +\infty$, on a $\lim_{t\to\infty} X(t) = X_0$.*

Il en est ainsi, par exemple, pour le système linéaire

$$X' = A \cdot X,$$

où A est une matrice dont toutes les racines caractéristiques ont des parties réelles négatives.

De même que dans la note de L. Markus ([3], Théorème IV) on démontre le théorème suivant:

THÉORÈME V. *Si le système* (14) *est presque autonome et si $X(t)$ est une solution de ce système, périodique pour t assez grand, l'ensemble $X(\infty)$ se réduit à une trajectoire fermée du système autonome* (15).

(5) Comparer [5], n° 3.

4. Dans le cas où l'espace E se réduit au plan il est possible, grâce à la structure particulièrement simple de la famille des courbes intégrales d'un système autonome à deux dimensions, de mieux étudier l'allure asymptotique des solutions d'un système presque autonome. En particulier, si le système (15) n'a pas de points singuliers, aucune solution de ce système ne peut être bornée ni pour $t \to +\infty$ ni pour $t \to -\infty$. On a donc:

THÉORÈME VI. *Si le système autonome à deux dimensions* (15) *n'a pas de points singuliers, aucune solution du système presque autonome* (14) *n'est bornée pour* $t \to +\infty$.

On a aussi:

THÉORÈME VII. *Soit* (14) *un système presque autonome à deux dimensions. Supposons que pour une solution* $X(t)$ *de ce système l'ensemble* $X(\infty)$ *soit borné et ne contienne aucun point singulier du système autonome* (15). *Dans ces hypothèses l'ensemble* $X(\infty)$ *est composé des trajectoires fermées du système* (15).

Démonstration. Par hypothèse l'ensemble $X(\infty)$ n'est pas vide. Supposons, pour la démonstration par l'impossible, qu'il contienne une trajectoire non fermée T du système autonome (15). Il contient par conséquent une trajectoire fermée S, limite de T lorsque t croît indéfiniment. Une des allures possibles de la trajectoire T dans un voisinage suffisamment petit de S est indiquée dans la figure 1.

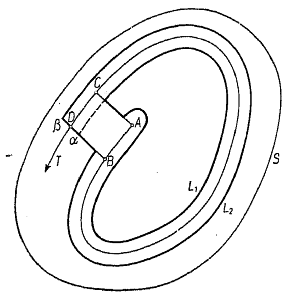

Fig. 1

Choisissons sur la trajectoire T quatre points A, B, C, D de sorte que les segments parallèles AC et BD soient sans contact avec les trajectoires du système (15) et qu'il en soit de même de tout segment rectiligne parallèle à AC et contenu dans le quadrilatère curviligne $ABCD$. Désignons par V le voisinage de l'arc ABC, limité par deux courbes fermées L_1 et L_2. Il est facile de montrer que la courbe $X = X(t)$ doit, pour t suffisamment grands, être située à l'extérieur Ω de la courbe L_1. En effet, il existe une suite de nombres $\{t_n\}$ tels que les points $X(t_n)$ sont tous situés à l'extérieur de la courbe L_2. Pour sortir du domaine Ω pour $t > t_n$, la courbe $X(t)$ $(t > t_n)$ doit soit couper l'arc AD de la trajectoire T, soit entrer par le segment BD à l'intérieur du quadrilatère curviligne $ABCD$ et en sortir par le segment AC. Or, pour n suffisamment grand c'est impossible, puisque

le système (14) est presque autonome. En effet, pour un t_0 assez grand l'intégrale

$$\int_{t_0}^{\infty} \left|g\big(t, X(t)\big)\right| dt \tag{18}$$

est aussi petite que l'on veut. Donc, si pour un t_1 plus grand qu'un t_0 convenablement choisi la courbe $X(t)$ coupe l'arc $ABCD$, elle doit sortir du voisinage V de cet arc par le segment $\alpha\beta$, c'est-à-dire elle doit rentrer à l'extérieur de la courbe L_2 sans quitter le domaine Ω. De même pour $t > t_0$ la courbe $X(t)$ ne peut pas entrer à l'intérieur du quadrilatère $ABCD$ par le segment BD et en sortir par AC, si l'intégrale (18) est suffisamment petite.

Il en vient que la trajectoire T ne peut pas appartenir à l'ensemble $X(\infty)$ et le théorème VII se trouve ainsi démontré.

5. Du théorème VII on obtient immédiatement:

COROLLAIRE V. *Si les hypothèses du théorème* VII *sont satisfaites et l'ensemble de toutes les trajectoires fermées du système autonome* (15) *n'a pas de points intérieurs, l'ensemble* $X(\infty)$ *se réduit à une seule trajectoire fermée du système* (15).

Il est facile de donner une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi, même si les trajectoires fermées du système autonome limite (15) remplissent le plan tout entier. On a notamment:

THÉORÈME VIII. *Supposons que le système autonome à deux dimensions* (15) *ait un seul point singulier* $(0, 0)$ *et que toutes les trajectoires de ce système soient fermées. Supposons de plus qu'il existe une intégrale première de ce système* $H(x_1, x_2)$ *de classe* C^1 *dans tout le plan* (x_1, x_2) *et telle que pour tout* $C \geqslant 0$ *l'équation* $H(x_1, x_2) = C$ *détermine une et une seule solution du système* (15).

Si l'ensemble $X(\infty)$ *d'une solution* $X(t)$ *du système presque autonome* (14) *est non vide, il se réduit ou bien à une trajectoire fermée du système* (15), *ou bien au point singulier* $(0, 0)$.

Démonstration. Soit $X(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big)$ une solution du système presque autonome

$$x_1' = P(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2, t), \qquad x_2' = Q(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2, t).$$

On a par hypothèse dans tout le plan (x_1, x_2):

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} P(x_1, x_2) + \frac{\partial H}{\partial x_2} Q(x_1, x_2) \equiv 0$$

et, par conséquent

$$(19)\quad \frac{d}{dt}H\big(x_1(t),x_2(t)\big)=\frac{\partial H}{\partial x_1}g_1\big(x_1(t),x_2(t),t\big)+\frac{\partial H}{\partial x_2}g_2\big(x_1(t),x_2(t),t\big).$$

oit $P(\xi,\eta)$ un point appartenant à l'ensemble $X(\infty)$ et désignons par T la trajectoire fermée du système

$$x_1'=P(x_1,x_2),\qquad x_2'=Q(x_1,x_2)$$

donnée par l'équation $H(x_1,x_2)=H(\xi,\eta)=C_0$. Soit D le domaine borné, déterminé par l'inégalité $H(x_1,x_2)<C_0+1$. Dans le domaine D les dérivées du premier ordre de la fonction $H(x_1,x_2)$ sont bornées par une constante positive M convenablement choisie.

Construisons maintenant une fonction vectorielle continue $\overline{X}(t)=\big(\overline{x}_1(t),\overline{x}_2(t)\big)$, égale à $X(t)$ dans tout intervalle, où $X(t)$ appartient au domaine D, et satisfaisant partout à l'inégalité

$$H\big(\overline{x}_1(t),\overline{x}_2(t)\big)\leqslant C_0+1.$$

C'est donc une fonction bornée dans l'intervalle $(0,+\infty)$. On a par hypothèse, pour un t_0 suffisamment grand

$$(20)\qquad \int_{t_0}^{\infty}|\overline{g}_1(t)|\,dt<\frac{1}{4M},\qquad \int_{t_0}^{\infty}|\overline{g}_2(t)|\,dt<\frac{1}{4M},$$

où nous avons posé pour abréger: $\overline{g}_1(t)=g_1\big(\overline{x}_1(t),\overline{x}_2(t),t\big)$ et $\overline{g}_2(t)=g_2\big(\overline{x}_1(t),\overline{x}_2(t),t\big)$. Choisissons maintenant un $t_1>t_0$ de telle sorte que l'on ait

$$(21)\qquad H\big(\overline{x}_1(t_1),\overline{x}_2(t_1)\big)<C_0+\tfrac{1}{2}.$$

C'est toujours possible vu que le point P appartient à l'ensemble $X(\infty)$. De la relation (19) il vient

$$(22)\quad H\big(\overline{x}_1(t),\overline{x}_2(t)\big)=H\big(\overline{x}_1(t_1),\overline{x}_2(t_1)\big)+\int_{t_1}^{t}\Big(\frac{\partial H}{\partial x_1}\overline{g}_1(t)+\frac{\partial H}{\partial x_2}\overline{g}_2(t)\Big)dt$$

pour tout intervalle (t_1,t) dans lequel $\overline{X}(t)$ reste à l'intérieur du domaine D et, par conséquent, est égale à $X(t)$. Il en résulte, en vertu des inégalités (20) et (21)

$$H\big(\overline{x}_1(t),\overline{x}_2(t)\big)\leqslant H\big(\overline{x}_1(t_1),\overline{x}_2(t_1)\big)+M\int_{t_1}^{t}\big(|\overline{g}_1(t)|+|\overline{g}_2(t)|\big)dt<C_0+1,$$

ce qui signifie que pour tout $t\geqslant t_1$ on a $\overline{X}(t)=X(t)$. De la relation (22) il résulte enfin que la fonction $H\big(x_1(t),x_2(t)\big)$ tend vers une limite finie

C^* lorsque t croît indéfiniment. L'ensemble $X(\infty)$ se réduit donc à une seule trajectoire fermée $H(x_1,x_2)=C^*$ du système autonome limite et le théorème VIII se trouve ainsi démontré.

6. Revenons au théorème VII. Supposons que l'ensemble limite $X(\infty)$ de la solution $X(t)$ du système presque autonome à deux dimensions (14) soit borné et ne contienne aucun point singulier du système autonome (15). Le théorème VII nous dit que $X(\infty)$ se compose exclusivement des trajectoires fermées du système (15), mais la réponse à la question s'il peut réellement en contenir plusieurs n'est pas immédiate, d'autant plus que le théorème VIII exclut cette possibilité dans le cas où la famille des trajectoires fermées du système autonome limite est assez régulière.

Pour le système asymptotiquement autonome, comme l'avait montré L. Markus, ceci est possible même pour le système autonome limite

$$(23)\qquad x_1'=-x_2,\qquad x_2'=x_1,$$

où les trajectoires fermées sont des cercles de centres à l'origine des coordonnées. Bien plus, il semble que pour tout système autonome pour lequel la famille des trajectoires est homéomorphe à la famille des cercles du système (23), on pourrait construire un système asymptotiquement autonome de telle sorte que pour une solution $X(t)$ de ce système l'ensemble $X(\infty)$ se compose d'une infinité de trajectoires fermées du système autonome envisagé.

Il n'en est pas de même pour les systèmes presque autonomes. Pour que l'ensemble limite $X(\infty)$ d'une solution $X(t)$ d'un tel système contienne plusieurs trajectoires fermées du système autonome limite, il faut que ce système limite ne soit pas tout à fait arbitraire. Plus précisément, il faut que la structure de la famille des trajectoires fermées de ce système ne soit pas trop régulière.

Néanmoins la construction d'un système presque autonome qui possède la propriété en question est possible. Mais une telle construction, exposée avec tous les détails, exigerait trop de place, c'est pourquoi nous nous bornerons à en donner seulement une esquisse.

Envisageons dans le plan (x_1,x_2) le système (23) et prenons deux trajectoires de ce système: T_1: $x_1^2+x_2^2=1$ et T_2: $x_1^2+x_2^2=4$. Dans l'anneau limité par ces cercles nous modifierons convenablement le système envisagé. Prenons à cet effet deux autres cercles T_3 et T_4 de centres sur l'axe des x_1 et situés comme dans la figure 2. Supposons que ce soient les trajectoires du système autonome que nous construisons.

Supposons maintenant qu'un point mobile se meuve d'abord sur la trajectoire T_1. Au voisinage du point A_1 il passe ensuite sur la trajectoire T_3 et après l'avoir parcouru plusieurs fois il passe de nouveau sur la trajectoire T_4 (au voisinage du point B_1) et ainsi de suite. Si les points A_1, B_1, C_1 sont suffisamment proches des points A_2, B_2, C_2 respectivement, tous ces passages d'une trajectoire à l'autre n'exigeront qu'une petite modification du système autonome que nous construisons. En effet, tout cela revient à remplacer le système autonome

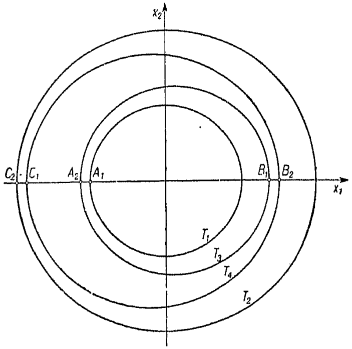

Fig. 2

$$x_1' = P(x_1, x_2), \quad x_2' = Q(x_1, x_2) \tag{24}$$

par le système

$$x_1' = P(x_1, x_2) + p(t), \qquad x_2' = Q(x_1, x_2) + q(t) \tag{25}$$

où les fonctions continues $p(t)$ et $q(t)$ sont égales à zéro en dehors d'une somme de trois intervalles aussi petits que l'on veut.

Dans l'anneau limité par les cercles T_2 et T_4 on construit de nouveau deux cercles T_5 et T_6 de sorte qu'ils soient les trajectoires du système (24) et que le point mobile puisse passer de T_2 à T_5, de T_5 à T_6 et enfin de T_6 à T_4 à l'aide d'une modification de ce système du type (25) aussi petite que l'on veut. On fait ensuite une construction pareille dans les anneaux (T_4, T_3) et (T_3, T_1).

En poursuivant indéfiniment cette construction on parvient enfin à un système (24) dont toutes les trajectoires sont des cerles. De ce que nous avons dit il résulte immédiatement que l'on peut le faire de sorte que l'ensemble limite $X(\infty)$ d'une solution du système (25), où les fonctions $p(t)$ et $q(t)$ satisfont aux conditions

$$\int_0^\infty |p(t)|\,dt < +\infty, \qquad \int_0^\infty |q(t)|\,dt < +\infty,$$

soit identique à l'anneau limité par les cercles T_1 et T_2.

Travaux cités

[1] R. Bellman, *Stability theory of differential equations*, New York 1953.

[2] E. Kamko, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, New York 1947.

[3] L. Markus, *Asymptotically autonomous differential systems*. Contributions to the theory of nonlinear oscillations, vol. III, Princeton 1956.

[4] Z. Opial, *Sur un système d'inégalités différentielles*, Ann. Polon. Math. 3 (1957), p. 200-209.

[5] — *Sur une équation différentielle non linéaire du second ordre*, ce volume, p. 65-69.

[6] G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte prima, Bologna 1948.

Reçu par la Rédaction le 18. 2. 1959