ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VIII (1960)

Sur les solutions de l'équation différentielle $x''+h(x)x'+f(x) = e(t)$

par Z. Opial (Kraków)

1. Envisageons l'équation différentielle de Liénard généralisée

$$x''+h(x)x'+f(x) = e(t). \tag{1}$$

On sait qu'elle peut être remplacée par un système d'équations

$$x' = v-g(x), \qquad v' = -f(x)+e(t) \tag{2}$$

où nous avons posé

$$g(x) = \int_0^x h(s)\,ds. \tag{3}$$

Dans certaines hypothèses sur les fonctions $g(x)$, $f(x)$ et $e(t)$ S. Lefschetz [1], K. Urabe [3] et W. R. Utz [4] ont démontré que pour $t \geqslant 0$ toutes les solutions du système (2) sont bornées et, par conséquent, les solutions de l'équation (1) ainsi que leurs dérivées premières sont aussi bornées. Je me propose d'établir dans cette note un théorème généralisant considérablement les résultats des auteurs mentionnés.

2. Théorème. *Supposons que les fonctions $f(x)$, $h(x)$ et $e(t)$ soient continues pour tout x et tout $t \geqslant 0$ et que l'on ait*

$$|e(t)| \leqslant m \qquad (t \geqslant 0), \tag{4}$$

$$\liminf_{x\to+\infty} f(x) > m, \qquad \limsup_{x\to-\infty} f(x) < -m \tag{5}$$

et pour un nombre positif p suffisamment petit

$$\liminf_{|x|\to+\infty} \big(g^2(x)-2p\,|g(x)|-4m\,|x|\big) > -\infty, \tag{6}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty. \tag{7}$$

Dans ces hypothèses toutes les solutions du système (2) *sont bornées dans l'intervalle* $\langle 0, +\infty)$.

3. Choisissons un nombre positif η de telle sorte que l'on ait pour $|x| \geqslant \eta$:

(8) $$|f(x)| > m, \qquad |g(x)| > 2p,$$

(9) $$g^2(x) - 2p\,|g(x)| - 4m\,|x| > -4m\eta.$$

Pour un $\xi > \eta$ construisons dans le plan (x, v) une courbe C_1: $P_1P_2P_3P_4$ de sorte (fig. 1) que l'arc P_1P_2 soit donné par l'équation

(10) $$\tfrac{1}{2}v^2 - pv + F(x) - mx = \tfrac{1}{2}g^2(\xi) - pg(\xi) + F(\xi) - m\xi$$

où $F(x) = \int\limits_0^x f(s)\,ds$ et l'arc P_3P_4 par l'équation

(11) $$\tfrac{1}{2}v^2 - pv + F(x) + mx = F(\xi) + m\xi.$$

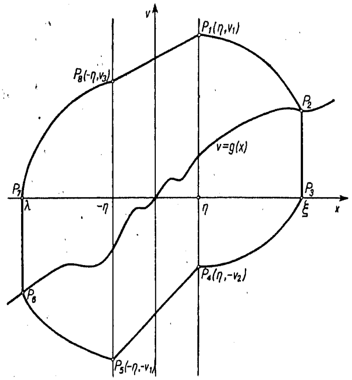

Fig. 1

Il est immédiat que les points P_1 et P_4 s'éloignent vers l'infini quand ξ croît indéfiniment. Nous allons montrer que l'on a

(12) $$v_1 - v_2 \geqslant 2p.$$

En effet, des relations (10) et (11) il vient que

$$\tfrac{1}{2}v_1^2 - \tfrac{1}{2}v_2^2 - p(v_1 + v_2) = \tfrac{1}{2}g^2(\xi) - pg(\xi) - 2m(\xi - \eta)$$

et par suite, en raison de l'inégalité (9):

$$\tfrac{1}{2}(v_1 + v_2)\{(v_1 - v_2) - 2p\} \geqslant 0$$

d'où l'on tire immédiatement l'inégalité (12).

A partir du point $P_5(-\eta, -v_1)$ on construit une courbe C_2: $P_5P_6P_7P_8$ de sorte que l'arc P_5P_6 soit donné par l'équation

$$\tfrac{1}{2}v^2 + pv + F(x) + mx = \tfrac{1}{2}g^2(\lambda) + pg(\lambda) + F(\lambda) + m\lambda$$

et l'arc P_7P_8 par l'équation

$$\tfrac{1}{2}v^2 + pv + F(x) - mx = F(\lambda) - m\lambda.$$

En s'appuyant sur l'inégalité (9) on montre facilement que

(13) $$v_1 - v_3 \geqslant 2p.$$

Des courbes C_1 et C_2 on obtient une courbe fermée C_ξ en joignant par des segments rectilignes les points P_4, P_5 et P_8, P_1. Les coefficients angulaires de ces segments sont, en vertu des inégalités (12) et (13), plus grands que p/η. On démontre sans peine que pour tout ξ suffisamment grand les courbes intégrales du système (2) entrent par la surface cylindrique $C_\xi \times \langle 0, +\infty)$ à l'intérieur du tuyau limité par cette surface. Notre théorème se trouve ainsi démontré.

4. Au lieu des surfaces $C_\xi \times \langle 0, +\infty)$ on peut envisager les surfaces $C_\xi \times (-\infty, +\infty)$. Si l'inégalité (4) est vérifiée pour tout t, pour ξ suffisamment grand tous les points de cette surface sont des points d'entrée des intégrales du système (2). Il en vient (cf. T. Ważewski [5]) *qu'il existe au moins une intégrale du système* (2) *qui est bornée dans tout l'intervalle* $(-\infty, +\infty)$.

5. Le théorème énoncé au nº 2 nous dit que les intégrales du système (2) sont bornées pour $t \geqslant 0$, mais il ne serait pas difficile de démontrer davantage, à savoir qu'*il existe une constante positive K telle que l'on ait pour toute intégrale $x(t)$, $v(t)$ du système* (2):

$$\limsup_{t\to+\infty} |x(t)| \leqslant K, \qquad \limsup_{t\to+\infty} |v(t)| \leqslant K.$$

Il existe par suite une constante positive L telle que l'on ait pour toute intégrale $x(t)$ de l'équation (1):

$$\limsup_{t\to+\infty} |x(t)| \leqslant L, \qquad \limsup_{t\to+\infty} |x'(t)| \leqslant L.$$

6. Dans l'énoncé de notre théorème, c'est la condition (6) qui est la plus compliquée. Or, il n'est pas difficile de la remplacer par d'autres conditions plus restrictives, mais en même temps plus simples. Par exemple, on vérifie aisément que l'inégalité (6) est satisfaite si l'on a

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)/\sqrt{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x)/\sqrt{-x} = -\infty.$$

Il en résulte que les théorèmes de S. Lefschetz, K. Urabe et W. R. Utz constituent des cas particuliers de notre théorème.

7. Dans l'hypothèse que la fonction $e(t)$ soit périodique de période ω, on pourrait faire usage de la construction du nº 3 pour démontrer l'existence d'une solution périodique de l'équation (1). Mais ce serait une complication inutile, car l'existence d'une solution périodique découle immédiatement d'un théorème de S. Mizohata et S. Yamaguti [2]. Afin de pouvoir l'appliquer à l'équation (1) il faudrait seulement poser

$$\mu = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega e(t)\,dt$$

et remplacer ensuite les fonctions $f(x)$ et $e(t)$ par les fonctions $\bar{f}(x) = f(x)-\mu$ et $\bar{e}(t) = e(t)-\mu$.

Travaux cités

[1] S. Lefschetz, *Lectures on differential equations*, Princeton 1948.

[2] S. Mizohata and S. Yamaguti, *On the existence of periodic solutions of the non linear differential equation $x''+a(x)x'+\varphi(x) = p(t)$*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Sec. A, 27 (1952), p. 109-113.

[3] K. Urabe, *On the existence of periodic solutions for certain non-linear differential equations*, Math. Japonicae 2 (1949), p. 23-26.

[4] W. R. Utz, *Su una nota di De Castro*, Boll. Unione Mat. Ital. (3) 11 (1956), p. 28-30.

[5] T. Ważewski, *Une méthode topologique de l'examen du phénomène asymptotique relativement aux équations différentielles ordinaires*, Atti Acc. Naz. Lincei 3 (1947), p. 210-215.

Reçu par la Rédaction le 29. 12. 1958

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VIII (1960)

Sur la dépedance des solutions d'un système d'équations différentielles de leurs seconds membres. Application aux systèmes presque autonomes

par Z. Opial (Kraków)

1. Envisageons le système d'équations différentielles

$$x_i' = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ou dans la notation vectorielle

$$X' = f(t, X). \tag{1}$$

Nous supposons une fois pour toutes que la fonction vectorielle $f(t, X)$ est définie et continue dans tout l'espace $F = I\times E$ où I désigne la droite réelle et E l'espace à n dimensions des variables $x_1, \ldots, x_n$.

Dans toute la suite nous admettrons l'unicité des solutions du système (1), c'est-à-dire nous supposerons que pour tout point $P_0 = (t_0, X_0)$, où $t_0 \epsilon I$ et $X_0 \epsilon E$, il existe une et une seule solution du système (1), égale à X_0 au point t_0. Désignons-la par $X(t, P_0)$ et soit J l'intervalle maximum de son existence.

On sait (voir p. ex. [2], p. 149, [6], p. 27) que cette solution unique du système (1) passant par le point P_0 change peu lorsque le système lui-même change peu, ce qu'on exprime en disant que cette solution dépend d'une manière continue des seconds membres du système considéré.

Pour préciser, envisageons un autre système d'équations différentielles

$$X' = g(t, X) \tag{2}$$

dont le second membre est défini et continu dans tout l'espace F. On a le théorème suivant[1]:

[1] Nous nous bornons au théorème le plus simple de ce type. Pour d'autres théorèmes, plus généraux, nous renvoyons le lecteur aux livres déjà cités.