ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
LXXV.3 (2000)

Noethérianité de certaines algèbres de fonctions analytiques et applications

par Abdelhafed Elkhadiri et Mouttaki Hlal (Kinitra)

Abstract. Let $M \subset \mathbb{R}^n$ be a real-analytic submanifold and $\mathcal{H}(M)$ the algebra of real analytic functions on M. If $K \subset M$ is a compact subset we consider $S_K = \{f \in \mathcal{H}(M) \mid f(x) \neq 0$ for all $x \in K\}$; S_K is a multiplicative subset of $\mathcal{H}(M)$. Let $S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$ be the localization of $\mathcal{H}(M)$ with respect to S_K. In this paper we prove, first, that $S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$ is a regular ring (hence noetherian) and use this result in two situations:

1) For each open subset $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, we denote by $\mathcal{O}(\Omega)$ the subalgebra of $\mathcal{H}(\Omega)$ defined as follows: $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ if and only if for all $x \in \Omega$, the germ of f at x, f_x, is algebraic on $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$. We prove that if Ω is a bounded subanalytic subset, then $\mathcal{O}(\Omega)$ is a regular ring (hence noetherian).

2) Let $M \subset \mathbb{R}^n$ be a Nash submanifold and $\mathcal{N}(M)$ the ring of Nash functions on M; we have an injection $\mathcal{N}(M) \to \mathcal{H}(M)$. In [2] it was proved that every prime ideal $\wp$ of $\mathcal{N}(M)$ generates a prime ideal of analytic functions $\wp\mathcal{H}(M)$ if M or $V(\wp)$ is compact. We use our Theorem 1 to give another proof in the situation where $V(\wp)$ is compact. Finally we show that this result holds in some particular situation where M and $V(\wp)$ are not assumed to be compact.

Introduction. Soit $M \subset \mathbb{R}^m$ une sous-variété réelle analytique; on désigne par $\mathcal{H}(M)$ l'algèbre des fonctions analytiques sur M. Soit $K \subset M$ un compact et considérons $S_K = \{f \in \mathcal{H}(M) \mid f(x) \neq 0$ pour tout $x \in K\}$; S_K est une partie multiplicativement stable. Dans cet article on montre que le localisé de $\mathcal{H}(M)$ par rapport à S_K, $S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$, est un anneau régulier (donc noethérien) et on applique ce résultat aux deux situations :

1) Pour chaque ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on désigne par $\mathcal{O}(\Omega)$ la sous-algèbre de $\mathcal{H}(\Omega)$ formée des $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ telles que, pour chaque $x \in \Omega$, le germe de f en x, f_x, est algébrique sur $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$. On montre que si Ω est un ouvert

2000 *Mathematics Subject Classification*: 30H05, 32B20, 14P17.

Key words and phrases: analytic algebra, Nash functions, subanalytic sets, regular rings.

Recherches menées dans le cadre du Programme d'Appui à la Recherche Scientifique (PARS MI 33).

borné sous-analytique, alors $\mathcal{O}(\Omega)$ est un anneau régulier (donc noethérien). Remarquons que $\mathcal{O}(\Omega)$ contient l'anneau des fonctions de Nash sur Ω.

2) Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de Nash ; on désigne par $\mathcal{N}(M)$ l'anneau des fonctions de Nash sur M. On a une injection $\mathcal{N}(M) \to \mathcal{H}(M)$. La question suivante a été considérée dans [2] :

L'extension d'un idéal premier, $\wp$, *de* $\mathcal{N}(M)$ *à* $\mathcal{H}(M)$ *est-il premier dans* $\mathcal{H}(M)$ *?*

Une réponse positive dans le cas où M est compacte est donnée dans [2]. Si M est non compacte mais $V(\wp)$ (lieu des zéros d'un système de générateurs de $\wp$) est compact, la réponse est aussi positive [2]. Nous donnons une preuve directe de ce dernier cas en utilisant le théorème 1.

On désigne par $\operatorname{Reg} V(\wp) \subset V(\wp)$ les points au voisinage desquels $V(\wp)$ est une sous-variété analytique et on pose $\operatorname{Sing} V(\wp) = V(\wp) - \operatorname{Reg} V(\wp)$. Si maintenant ni M ni $V(\wp)$ n'est supposé compact, la méthode que nous avons utilisée nous permet de traiter le cas particulier suivant :

$\operatorname{Sing} V(\wp)$ est compact et pour chaque $x \in \operatorname{Reg} V(\wp)$, $\wp\mathcal{H}_x$ engendre l'idéal des germes de fonctions analytiques qui s'annulent sur le germe de $V(\wp)$ en x.

Ces conditions sont automatiqument vérifiées dans le cas $M = \mathbb{R}^2$.

1. Localisation de $\mathcal{H}(M)$. Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété réelle analytique. On désigne par $\mathcal{H}(M)$ l'anneau des fonctions analytiques sur M. Pour chaque $f \in \mathcal{H}(M)$ et chaque $x \in M$, f_x désigne le germe de f en x. Soit $K \subset M$; on pose $S_K = \{f \in \mathcal{H}(M) \mid f(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \in K\}$. S_K est une partie multiplicativement stable de $\mathcal{H}(M)$; on note $S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$ le localisé de $\mathcal{H}(M)$ par rapport à S_K. On a un morphisme, $i_S : \mathcal{H}(M) \to S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$, plat. Pour chaque $x \in M$, $\underline{M}_x$ désigne l'idéal maximal des $f \in \mathcal{H}(M)$ qui s'annulent en x et $\mathcal{H}_x$ l'anneau des germes de fonctions analytiques en x.

THÉORÈME 1. *Si K est un compact, alors $S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$ est un anneau noethérien.*

Preuve. Si $\bar{I}$ est un idéal de $S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$, soit I un idéal de $\mathcal{H}(M)$ tel que $i_S(I)$ engendre $\bar{I}$. On considère le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ défini comme suit :

$$\mathcal{I}_x = I\mathcal{H}_x \quad \forall x \in M.$$

$\mathcal{I}$ est un faisceau cohérent d'idéaux sur M. Puisque K est compact, il existe un nombre fini d'éléments de I, $f_1, \ldots, f_q$, tels que, pour chaque $x \in K$, $\mathcal{I}_x = (f_{1,x}, \ldots, f_{q,x})\mathcal{H}_x$.

Soit $g \in I$ et considérons le faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{J}$ défini par

$$\mathcal{J}_x = (f_{1,x}, \ldots, f_{q,x})\mathcal{H}_x : g_x \quad \forall x \in M.$$

Pour chaque $x \in K$ on a $\mathcal{J}_x = \mathcal{H}_x$; d'après le théorème A de Cartan, pour chaque $x \in K$ il existe un voisinage U de x et $\varphi^U \in \Gamma(M, \mathcal{J})$ tels que $\varphi^U(y) \neq 0$ pour tout $y \in U$. On recouvre K par un nombre fini d'ouverts $U_1, \ldots, U_s$ et on pose $\varphi = \sum_{i=1}^s (\varphi^{U_i})^2$. Visiblement, $\varphi(x) \neq 0$ pour tout $x \in K$ et $\varphi \in \Gamma(M, \mathcal{J})$. Soit $\mathcal{M}$ le faisceau cohérent d'idéaux défini par

$$\mathcal{M}_x = (\varphi_x g_x, f_{1,x}, \ldots, f_{q,x})\mathcal{H}x \quad \forall x \in M.$$

Il est clair que pour chaque $x \in M$, $\mathcal{M}_x$ est engendré par les germes en x de $f_1, \ldots, f_q$. Le théorème B de Cartan entraîne alors que $\Gamma(M, \mathcal{M})$ est engendré sur $\Gamma(M, \mathcal{H}) = \mathcal{H}(M)$ par $f_1, \ldots, f_q$. Comme $\varphi g \in \Gamma(M, \mathcal{M})$, on conclut alors que $\varphi g = \sum_{j=1}^q \lambda_j f_j$, $\lambda_j \in \mathcal{H}(M)$, $j = 1, \ldots, q$. Puisque $\varphi \in S_K$ on en déduit que $\bar{I}$ est engendré par $(f_1, \ldots, f_q)$.

Corollaire 1. *Pour chaque $x \in M$, le localisé de $\mathcal{H}(M)$ par rapport à l'idéal $\underline{M}_x$, $\mathcal{H}(M)_{\underline{M}_x}$, est un anneau noethérien.*

Preuve. On suppose que M est connexe et que $\dim M = m$. Soit $x \in M$; il existe $u = (u_1, \ldots, u_m)$ éléments de $\mathcal{H}(M)$ qui forment un système de coordonnées analytiques en x. On a les injections suivantes :

$$\mathbb{R}[u_1, \ldots, u_m]_{\underline{M}_x} \to \mathcal{H}(M)_{\underline{M}_x} \to \mathcal{H}_x.$$

On voit alors que le complété de $\mathcal{H}(M)_{\underline{M}_x}$ pour la topologie $\underline{M}_x$-adique est l'anneau des séries formelles $\mathbb{R}[[u_1, \ldots, u_m]]$. On en déduit que $\mathcal{H}(M)_{\underline{M}_x}$ est un anneau régulier de dimension m.

Proposition 1. *K étant toujours compact, l'ensemble des idéaux maximaux de $S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$ s'identifie à K.*

Preuve. Soit $\widetilde{m}$ un idéal maximal de $S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$; il existe alors un idéal maximal, $\underline{m}$, de $\mathcal{H}(M)$ tel que $\underline{m} \cap S_K = \emptyset$ et l'idéal engendré par $i_S(\underline{m})$ est $\widetilde{m}$. Supposons que pour chaque $x \in K$ il existe $f \in \underline{m}$ tel que $f(x) \neq 0$. On recouvre alors K par un nombre fini d'ouverts $U_1, \ldots, U_s$ pour lesquels il existe $f_i \in \underline{m}$, $i = 1, \ldots, s$, avec $f_i(y) \neq 0$ pour tout $y \in U_i$. On pose $\varphi = \sum_{i=1}^s f_i^2$; on a $\varphi \in \underline{m} \cap S_K$, ce qui est absurde ; donc il existe $x \in K$ tel que $\underline{m} = \underline{M}_x$.

Proposition 2. *$S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$ est un anneau régulier.*

Preuve. Ceci découle de la proposition 1, du fait que $(S_K^{-1}\mathcal{H}(M))_{\underline{M}_x} = \mathcal{H}(M)_{\underline{M}_x}$ pour chaque $x \in K$, et du corollaire 1.

2. Algèbres de Nash analytiques. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert; on désigne par $\mathcal{O}(\Omega)$ la sous-algèbre de $\mathcal{H}(\Omega)$ formée des $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ telles que pour chaque $x \in \Omega$ le germe de f en x est algébrique sur $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, i.e. vérifie une équation $\sum_{i=1}^p a_i f_x^i = 0$, où les $a_i \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ sont non tous nuls. Les éléments de $\mathcal{O}(\Omega)$ seront appelés par la suite les *fonctions de Nash analytiques.*

Visiblement si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \Omega$, alors $1/f \in \mathcal{O}(\Omega)$. On désigne par $\mathcal{O}_x$ l'anneau des germes des fonctions de Nash analytiques en $x \in \Omega$. Il est clair que l'on a une inclusion $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)_{\underline{M}_x} \to \mathcal{O}_x$. On a, visiblement, la proposition suivante :

PROPOSITION 3. *$\mathcal{O}_x$ est la fermeture algébrique de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)_{\underline{M}_x}$ dans son complété* $\mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]$; *c'est donc le hensélisé de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)_{\underline{M}_x}$; en particulier $\mathcal{O}_x$ est un anneau régulier* (*donc noethérien*) *de dimension n fidèlement plat sur $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)_{\underline{M}_x}$.*

COROLLAIRE 2. *Si Ω est connexe*, *l'anneau $\mathcal{O}(\Omega)$ est intégralement clos.*

Preuve. Comme Ω est connexe, les anneaux $\mathcal{O}_x$ et $\mathcal{H}(\Omega)$ sont canoniquement plongés dans $\mathcal{H}_x$ et on a $\mathcal{O}(\Omega) = \mathcal{O}_x \cap \mathcal{H}(\Omega)$. D'où le résultat car $\mathcal{H}(\Omega)$ est intégralement clos et de même pour $\mathcal{O}_x$ d'après la proposition précédente.

3. Algèbres Ω-noethériennes. Une sous-algèbre $\mathcal{A}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega)$ est dite *Ω-noethérienne* [3] si :

(i) $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] \subset \mathcal{A}(\Omega)$ et $\mathcal{A}(\Omega)$ est stable par dérivation.

(ii) Ω muni de la topologie induite par celle de SM $\mathcal{A}(\Omega)$ (spectre maximal de $\mathcal{A}(\Omega)$) est un espace noethérien (tout point $x \in \Omega$ est identifié à l'idéal maximal, m_x, des fonctions de $\mathcal{A}(\Omega)$ qui s'annulent en x).

Pour chaque idéal $I \subset \mathcal{A}(\Omega)$ on pose $V(I) = \{x \in \Omega \mid f(x) = 0$ pour tout $f \in I\}$ et on désigne par $\operatorname{Reg} V(I)$ l'ensemble des points au voisinage desquels $V(I)$ est une sous-variété ; $\operatorname{Reg} V(I)$ est dense dans $V(I)$ (pour la topologie euclidienne). Si I est engendré par un seul élément, f, on écrit $V(f)$.

PROPOSITION 4. *Soit $\mathcal{A}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega)$ une sous-algèbre stable par dérivation et contenant l'anneau des polynômes. On suppose que pour chaque $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $\operatorname{Reg} V(f)$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. Alors $\mathcal{A}(\Omega)$ est une algèbre Ω-noethérienne.*

Preuve. Soit $F \subset \Omega$ un fermé pour la topologie induite par celle de SM $\mathcal{A}(\Omega)$; $F = V(I)$ où I est un idéal de $\mathcal{A}(\Omega)$. Montrons d'abord qu'il existe un nombre fini d'éléments de I, $g_1, \ldots, g_k$, tels que $F = V(g_1, \ldots, g_k)$.

Soit $g \in I$, $g \neq 0$. On a $V(I) \subset V(g)$. $\operatorname{Reg} V(g)$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes: $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{s_1}$; on pose $\mu_1 = \max\{\dim \Gamma_j \mid \Gamma_j \not\subset V(I)\}$. Soient $\Gamma_{i_1}, \ldots, \Gamma_{i_p}$ les composantes connexes de $\operatorname{Reg} V(g)$ telles que

$$\mu_1 = \dim \Gamma_{i_j}, \quad j = 1, \ldots, p, \quad \text{et} \quad \Gamma_{i_j} \not\subset V(I).$$

Il existe alors $h_{i_j} \in I$, $h_{i_j} \neq 0$ sur Γ_{i_j}, $j = 1, \ldots, p$. On pose $h = \sum_{j=1}^{p} h_{i_j}^2 \in I$; on a $V(I) \subset V(g, h) \subset V(g)$. Visiblement si $r = \max\{\dim \Lambda_j \mid \Lambda_j$ est une composante connexe de $\operatorname{Reg} V(g, h)$ avec $\Lambda_j \not\subset V(I)\}$, alors $r < \mu_1$. En faisant la même chose pour $V(\psi)$ où $\psi = g^2 + h^2$, on voit que $V(I) = V(\varphi)$ avec $\varphi \in I$.

Soit maintenant une suite de fermés, (F_i), strictement décroissante; on a $F_i = V(f_i)$, $f_i \in \mathcal{A}(\Omega)$. Associons à chaque $V(f_i)$ le $n+1$-uplet $\nu_i = (\nu_{i,n}, \nu_{i,n-1}, \ldots, \nu_{i,0}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tel que $\nu_{i,j}$ est le nombre des composantes connexes de $\operatorname{Reg} V(f_i)$ de dimension j. On considère sur $\mathbb{N}^{n+1}$ l'ordre lexicographique. Alors si $V(f_{i+1}) \subsetneq V(f_i)$ on a $\nu_{i+1} < \nu_i$, et donc la suite (F_i) est stationnaire.

Remarque. La condition de la proposition 4 n'est pas nécessaire; l'algèbre $\mathcal{A}(\Omega) = \mathbb{R}[x, \sin x, \cos x]$ est $\mathbb{R}$-noethérienne (même noethérienne), cependant $\operatorname{Reg} V(\sin x) = V(\sin x)$ a un nombre infini de composantes connexes.

Lemme 1. *Soit Ω un ouvert borné sous-analytique. Alors l'algèbre $\mathcal{O}(\Omega)$ est Ω-noethérienne et de plus* $\mathrm{SM}\,\mathcal{O}(\Omega)$ *s'identifie à Ω.*

Preuve. On peut supposer que Ω est connexe. Il suffit, d'après la proposition 4, de montrer que pour tout $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $V(f)$ est un sous-analytique de $\mathbb{R}^n$; en effet $\operatorname{Reg} V(f)$ sera encore sous-analytique de $\mathbb{R}^n$ et puisqu'il est borné, il n'aura qu'un nombre fini de composantes connexes.

On va montrer que le graphe, G, de f est sous-analytique dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Le problème est local en tout $a \in \partial\Omega$; on peut alors supposer que f est racine d'un polynôme P sans facteurs multiples à coefficients analytiques au voisinage de $\overline{\Omega}$. Soit Δ le discriminant de P, $\Delta \neq 0$; on pose $Y = \{x \in \Omega \mid \Delta(x) \neq 0\}$. Visiblement $G \cap Y \times \mathbb{R}$ est une réunion de composantes connexes de $V(P) \cap Y \times \mathbb{R}$, est donc sous-analytique; or $G = \overline{G \cap Y \times \mathbb{R}} \cap \Omega \times \mathbb{R}$ car f est continue, donc G est sous-analytique.

Soit $\underline{m}$ un idéal maximal de $\mathcal{O}(\Omega)$; supposons que pour tout $x \in \Omega$, $\underline{m} \not\subset \underline{m}_x = \{f \in \mathcal{O}(\Omega) \mid f(x) = 0\}$. Soit $x \in \Omega$; il existe $f_1 \in \underline{m}$ avec $f_1(x) \neq 0$; $V(f_1)$ est non vide, sinon f_1 serait inversible dans $\mathcal{O}(\Omega)$. Soit $x_1 \in V(f_1)$; comme $\underline{m} \not\subset \underline{m}_{x_1}$, il existe $f_2 \in \underline{m}$ tel que $f_2(x_1) \neq 0$. On a $V(f_1, f_2) \subset V(f_1)$ et $V(f_1, f_2)$ est non vide, sinon $\varphi = f_1^2 + f_2^2 \in \underline{m}$ serait inversible dans $\mathcal{O}(\Omega)$. En continuant, on construit une suite strictement decroissante de fermés qui est infinie, ce qui est absurde. Donc il existe $x \in \Omega$ tel que $\underline{m} \subset \underline{m}_x$.

Dans la preuve de notre résultat, nous aurons besoin de la proposition suivante qui est une conséquence directe de [3, 6.2.1].

Proposition 5. *Soit $I \subset \mathcal{A}(\Omega)$ un idéal d'une algèbre Ω-noethérienne; il existe un idéal $I' \subset I$ de type fini tel que pour tout $x \in \Omega$, $I'\mathcal{H}_x = I\mathcal{H}_x$.*

Proposition 6. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \Omega$; alors le localisé de $\mathcal{O}(\Omega)$ par rapport à $\underline{m}_a$, $\mathcal{O}(\Omega)_{\underline{m}_a}$, est un anneau local régulier* (*donc noethérien*) *de dimension n fidèlement plat sur $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)_{\underline{M}_a}$.*

Preuve. Soit Ω' la composante connexe de Ω qui contient a ; on a $\mathcal{O}(\Omega)_{\underline{m}_a} = \mathcal{O}(\Omega')_{\underline{m}_a}$. On peut alors supposer que Ω est connexe. Nous avons alors vu que $\mathcal{O}(\Omega)$ est intégralement clos ; $\mathcal{O}(\Omega)_{\underline{m}_a}$ est donc aussi intégralement clos. On a les inclusions suivantes :

$$\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)_{\underline{M}_a} \to \mathcal{O}(\Omega)_{\underline{m}_a} \to {}^{\mathrm{h}}\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)_{\underline{M}_a}$$

où ${}^{\mathrm{h}}\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)_{\underline{M}_a}$ est le hensélisé de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)_{\underline{M}_a}$. Le résultat découle alors de [1, 8.7.11].

Remarquons alors que, Ω étant connexe, $\mathcal{O}(\Omega)_{\underline{m}_a} \to \mathcal{H}_a$ est fidèlement plate.

THÉORÈME 2. *Soit Ω un ouvert sous-analytique borné*; *alors $\mathcal{O}(\Omega)$ est un anneau noethérien.*

Preuve. Puisque Ω n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, on peut supposer que Ω est connexe. Soit $I \subset \mathcal{O}(\Omega)$ un idéal ; l'algèbre $\mathcal{O}(\Omega)$ étant Ω-noethérienne, il existe un idéal $I' \subset I$ de type fini tel que pour tout $x \in \Omega$, $I'\mathcal{H}_x = I\mathcal{H}_x$ (proposition 5). L'injection $\mathcal{O}(\Omega)_{\underline{m}_x} \to \mathcal{H}_x$ est fidèlement plate, donc $I'\mathcal{O}(\Omega)_{\underline{m}_x} = I\mathcal{O}(\Omega)_{\underline{m}_x}$ pour tout $x \in \Omega$. Comme $\mathrm{SM}\,\mathcal{O}(\Omega)$ est identifié à Ω, on en déduit, par globalisation, que $I = I'$.

COROLLAIRE 3. *Ω étant un ouvert sous-analytique borné*, *l'algèbre $\mathcal{O}(\Omega)$ est un anneau régulier de dimension n.*

4. Problème de séparation. Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de Nash ; $\mathcal{N}(M)$ désigne l'anneau des fonctions de Nash sur M. Le problème suivant a été considéré dans [2] :

Si $\wp$ est un idéal premier de $\mathcal{N}(M)$, *engendre-t-il un idéal premier dans $\mathcal{H}(M)$?*

Une réponse positive a été donnée dans le cas où M est compact [2]. Si M est non compact mais $V(\wp)$ est compact, la réponse est aussi positive [2]. Nous donnons ici une preuve directe de ce dernier cas en utilisant le théorème 1. Nous étendons le résultat au cas où $V(\wp)$ n'est pas compact mais $\mathrm{Sing}\,V(\wp)$ est compact et $\wp\mathcal{H}_x$ engendre les germes des fonctions analytiques qui s'annulent sur le germe de $V(\wp)$ en tout $x \in \mathrm{Reg}\,V(\wp)$. Soit $K \subset M$ un compact ; d'après le théorème 1, $S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$ est un anneau noethérien.

LEMME 2. *L'inclusion $\varphi : \mathcal{N}(M) \to S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$ est un homomorphisme régulier.*

Preuve. D'après la preuve de [4, 34.C] il suffit de montrer que pour tout $x \in K$, l'homomorphisme $\varphi_x : \mathcal{N}(M)_{\underline{m}_x} \to \mathcal{H}(M)_{\underline{M}_x}$ est régulier. Soit $(u_1, \ldots, u_m)$ un système de coordonnées régulier de Nash de M en x ; on a

$$\mathcal{N}(M)_{\underline{m}_x} \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{H}(M)_{\underline{M}_x} \xrightarrow{\psi_x} \mathbb{R}[[u_1, \ldots, u_m]].$$

$\mathcal{N}(M)_{\underline{m}_x}$ est un anneau excellent, donc $\psi_x \circ \varphi_x$ est régulier. $\mathcal{H}(M)_{\underline{M}_x}$ est un anneau local noethérien, donc ψ_x est fidèlement plate, d'où φ_x est régulier [4, 33.B].

THÉORÈME 3. *Soit $\wp \subset \mathcal{N}(M)$ un idéal premier. Alors l'extension de $\wp$ à $S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$ est encore un idéal premier.*

Preuve. On peut supposer que M est connexe. On a l'égalité $\wp = (h_1, \ldots, h_q)\mathcal{N}(M)$; soient $f, g \in S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$ tels que

$$(*) \qquad fg = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j h_j, \quad \alpha_j \in S_K^{-1}\mathcal{H}(M), \quad j = 1, \ldots, q.$$

On pose

$$P(x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{q+2}) = Y_1 Y_2 - \sum_{j=1}^{q} Y_{j+2} h_j \in \mathcal{N}(M)[Y_1, Y_2, \ldots, Y_{q+2}].$$

$\varphi : \mathcal{N}(M) \to S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$ étant un morphisme régulier, d'après [5], $S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$ est une limite inductive filtrante de $\mathcal{N}(M)$-algèbres de type fini lisses. Cela veut dire que tout homomorphisme de $\mathcal{N}(M)$-algèbres, $B \to S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$, où B est de type fini sur $\mathcal{N}(M)$, se factorise à travers une $\mathcal{N}(M)$-algèbre, D, de type fini sur $\mathcal{N}(M)$ tel que l'homomorphisme $\mathcal{N}(M) \to D$ soit régulier.

Dans notre situation, on a un $\mathcal{N}(M)$-homomorphisme donné par l'équation $(*)$:

$$B = \frac{\mathcal{N}(M)[Y_1, Y_2, \ldots, Y_{q+2}]}{P\mathcal{N}(M)[Y_1, Y_2, \ldots, Y_{q+2}]} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$$

qui à Y_1 associe f, à Y_2 associe g et à Y_{j+2} associe α_j, $j = 1, \ldots, q$. D'après le théorème de Popescu–Spivakovsky [5], il existe alors une $\mathcal{N}(M)$-algèbre de type fini $D = \mathcal{N}(M)[z_1, \ldots, z_m]/I$ telle que l'homomorphisme $\mathcal{N}(M) \xrightarrow{\phi} D$ soit régulier et on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{N}(M) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & D \arrow[d, "\beta"] \\ B \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & S_K^{-1}\mathcal{H}(M) \end{tikzcd}$$

$\mathcal{N}(M) \xrightarrow{\phi} D$ étant un morphisme régulier, puisque $\mathcal{N}(M)$ est un anneau régulier alors D est un anneau régulier, d'où I est radical et donc $I = \wp_1 \cap \ldots \cap \wp_s$, $\wp_j$ un idéal premier de $\mathcal{N}(M)[z_1, \ldots, z_m]$, $j = 1, \ldots, s$. Tout idéal maximal, $\underline{m}$, de $\mathcal{N}(M)[z_1, \ldots, z_m]$ contenant I, contient un et un seul $\wp_j$ et

$$\mathcal{N}(M)[z_1, \ldots, z_m]_{\underline{m}}/I = \mathcal{N}(M)[z_1, \ldots, z_m]_{\underline{m}}/\wp_j.$$

D est alors isomorphe au produit des $\mathcal{N}(M)[z_1,\ldots,z_m]/\wp_j$, $j=1,\ldots,s$. Comme $S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$ est intègre, β se factorise via un $\mathcal{N}(M)[z_1,\ldots,z_m]/\wp_j$. On peut alors supposer que I est un idéal premier. Par le même argument que dans [2] on peut supposer que I est réel. On pose $Z=V(I)$; Z est une sous-variété de Nash de $M\times\mathbb{R}^m$ et D peut être identifié comme un sous-anneau de l'anneau des fonctions de Nash sur Z, $\mathcal{N}(Z)$.

Pour chaque $i=1,\ldots,q+2$, on pose $\alpha(Y_i)=H_i\in D$; on a

$$(**)\qquad H_1H_2=\sum_{j=1}^{q}H_{j+2}h_j\quad \text{sur } Z.$$

On pose $\beta(z_i)=\sigma_i\in S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$, $i=1,\ldots,m$, et

$$\sigma(x)=(x,\sigma_1(x),\ldots,\sigma_m(x)),\quad x \text{ dans un voisinage de } K.$$

Il existe alors un voisinage W de K, $W\subset M$, tel que $\sigma:W\to Z$ soit analytique et une section de la projection canonique $\pi:W\times\mathbb{R}^m\to W$. Il existe alors une application polynomiale $P:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ qui approche σ au voisinage de K. Posons $P(x)=(P_0(x),P_1(x),\ldots,P_m(x))$, $P_0(x)\in\mathbb{R}^n$.

Soit T un voisinage tubulaire de Z dans $W\times\mathbb{R}^m$ et $\varrho:T\to Z$ une rétraction de Nash compatible avec la projection canonique, i.e. $\pi\circ\varrho=\pi$ tel que $P(W)\subset T$. On pose

$$\varrho\circ P(x)=Q(x)=(Q_0(x),Q_1(x),\ldots,Q_m(x))\in Z.$$

Comme Q_0 est proche de l'identité, quitte à rétrécir W, Q_0 est un difféomorphisme de W sur W. Soit Q_0^{-1} son inverse; on pose

$$\tau(x)=(x,Q_1\circ Q_0^{-1}(x),\ldots,Q_m\circ Q_0^{-1}(x)).$$

Alors τ est une section de Nash de $\pi:Z\to W$, proche de σ. On pose $G_i=H_i\circ\tau$, $i=1,\ldots,q+2$. Alors G_i est proche de $H_i\circ\sigma$ pour tout $i=1,\ldots,q+2$; de plus on a $f=H_1\circ\sigma$, $g=H_2\circ\sigma$ et $H_{j+2}\circ\sigma=\alpha_j$, $j=1,\ldots,q$.

On déduit de $(**)$ que f ou g est limite de fonctions appartenant à $\wp\mathcal{H}(W)$; comme ce dernier est fermé dans $\mathcal{H}(W)$, on a, par exemple, $f\in\wp\mathcal{H}(W)$.

Soit $\mathcal{J}$ le faisceau cohérent d'idéaux défini par $\mathcal{J}_x=(h_1,\ldots,h_q)\mathcal{H}_x:f_x$ pour tout $x\in M$. Pour chaque $x\in K$, $\mathcal{J}_x=\mathcal{H}_x$; d'après le théorème A de Cartan, pour chaque $x_i\in K$ il existe un voisinage U_i de x_i et $\varphi_i\in\Gamma(M,\mathcal{J})$ tels que $\varphi_i(y)\neq 0$ pour tout $y\in U_i$. On recouvre K par un nombre fini d'ouverts U_i, $i=1,\ldots,l$, et on pose $\varphi=\sum_{\mu=1}^{l}\varphi_\mu^2$. Alors $\varphi\in\Gamma(M,\mathcal{J})$ et $\varphi(x)\neq 0$ pour tout $x\in K$; d'après la preuve du théorème 1, $\varphi f\in(h_1,\ldots,h_q)\mathcal{H}(M)$, donc $f\in\wp S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$.

COROLLAIRE 4. *Soit $\wp \subset \mathcal{N}(M)$ un idéal premier tel que $K = V(\wp)$ soit compact. Alors l'extension de $\wp$ à $\mathcal{H}(M)$ est encore un idéal premier.*

Preuve. On a $\wp = (h_1, \ldots, h_q)\mathcal{N}(M)$; soient $f, g \in \mathcal{H}(M)$ tels que $fg \in \wp\mathcal{H}(M)$; d'après le théorème 3 on a, par exemple, $f \in \wp S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$. Soit $\mathcal{I}$ le faisceau cohérent d'idéaux défini par

$$\mathcal{I}_x = (h_1, \ldots, h_q, f)\mathcal{H}_x, \quad \forall x \in M.$$

Pour chaque $x \in M$, $h_1, \ldots, h_q$ engendrent $\mathcal{I}_x$ sur $\mathcal{H}_x$; en effet, si $x \in K$, ceci est d'après le fait que $f \in \wp S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$; si $x \notin K = V(\wp)$, on a $(h_1, \ldots, h_q)\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_x$. D'après le théorème B de Cartan on a $\Gamma(M, \mathcal{I}) = \sum_{i=1}^{q} h_i\mathcal{H}(M)$; comme $f \in \Gamma(M, \mathcal{I})$, on en déduit que $f \in \wp\mathcal{H}(M)$.

5. Cas particulier. Soit $I \subset \mathcal{N}(M)$ un idéal. Rappelons que $\operatorname{Reg} V(I)$ désigne les points de $V(I)$ au voisinage desquels $V(I)$ est une sous-variété ; $\operatorname{Reg} V(I)$ est dense dans $V(I)$ (pour la topologie euclidienne). On pose $\operatorname{Sing} V(I) = V(I) - \operatorname{Reg} V(I)$.

Soit $\wp \subset \mathcal{N}(M)$ un idéal premier et considérons l'hypothèse suivante :

($\mathcal{H}$) *Pour tout $x \in \operatorname{Reg} V(\wp)$, $\wp\mathcal{H}_x$ engendre l'idéal des germes des fonctions analytiques qui s'annulent sur le germe de $V(\wp)$ en x.*

THÉORÈME 4. *Soit $\wp \subset \mathcal{N}(M)$ un idéal premier. Si ($\mathcal{H}$) est vérifiée et $\operatorname{Sing} V(\wp)$ est compact, alors $\wp\mathcal{H}(M)$ est un idéal premier.*

Preuve. Posons $K = \operatorname{Sing} V(\wp)$ et soient $f, g \in \mathcal{H}(M)$ telles que $fg \in \wp\mathcal{H}(M)$. D'après le théorème 3, on a, par exemple, $f \in \wp S_K^{-1}\mathcal{H}(M)$, i.e. il existe $\varphi \in \mathcal{H}(M)$ avec $\varphi(x) \neq 0$ pour tout $x \in K$ et $\varphi f \in \wp\mathcal{H}(M)$. Soient $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ les composantes connexes de $\operatorname{Reg} V(\wp)$. Puisque $V(\wp)$ est connexe et $\operatorname{Reg} V(\wp)$ est dense dans $V(\wp)$, on a $\overline{\Gamma}_j \cap K \neq \emptyset$ pour tout $j = 1, \ldots, s$.

S'il existe $a \in \Gamma_j$ tel que $f(a) \neq 0$, on aura $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in \Gamma_j$ et comme $\overline{\Gamma}_j \cap K \neq \emptyset$, il existe $b \in K$ tel que $\varphi(b) = 0$, ce qui est absurde ; donc $\Gamma_j \subset V(f)$ pour tout j.

L'hypothèse ($\mathcal{H}$) entraîne alors que $f_x \in \wp\mathcal{H}_x$ pour tout $x \in \operatorname{Reg} V(\wp)$, comme $\varphi f \in \wp\mathcal{H}(M)$ et $\varphi(x) \neq 0$ pour tout $x \in K$, on en déduit que $f_x \in \wp\mathcal{H}_x$ pour tout $x \in M$. Puisque $\wp$ est de type fini, d'après le théorème B de Cartan, on a $f \in \wp\mathcal{H}(M)$.

Si $M = \mathbb{R}^2$ et $\wp \subset \mathcal{N}(M)$ est un idéal premier, $\operatorname{Sing} V(\wp)$ est un ensemble fini et $V(\wp)$ est connexe. Pour chaque $x \in \operatorname{Reg} V(\wp)$, $\operatorname{ht}(\wp\mathcal{H}_x) = 1$ et comme la dimension du germe de $V(\wp)$ en x est 1, on a alors que $\wp\mathcal{H}_x$ est réel, d'où le corollaire :

COROLLAIRE 5. *Si $\wp \subset \mathcal{N}(\mathbb{R}^2)$ est un idéal premier, alors $\wp\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ est encore premier.*

Références

[1] J. Bochnak, M. Coste et M.-F. Roy, *Géométrie algébrique réelle*, Ergeb. Math. Grenzgeb. 12, Springer, New York, 1987.

[2] M. Coste, J. M. Ruiz and M. Shiota, *Approximation in compact Nash manifolds*, Amer. J. Math. 117 (1995), 905–927.

[3] A. Elkhadiri et J.-Cl. Tougeron, *Familles noethériennes de modules sur* $\underline{k}[[x]]$ *et applications*, Bull. Sci. Math. 120 (1996), 253–292.

[4] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, Benjamin, New York, 1970.

[5] D. Popescu, *General Neron desingularization*, Nagoya Math. J. 100 (1985), 97–126.

Département des Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Ibn Tofail
B.P. 133
14000 Kinitra, Morocco
E-mail: kabdelhafed@hotmail.com

Reçu par la Rédaction le 10.3.2000
Révisé le 20.8.2000