$\leqslant \sigma \overline{m}_k$ in $(-\infty, \infty)$ and $f(x)$ is a uniformly almost periodic function. Obviously, $f^{(k)}(0) = 0$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$ and $f(x) \not\equiv 0$, and $\{\beta_n\}$ is the sequence of all Fourier exponents of $f(x)$. Moreover, partial integration yields the inequality

$$|A_n| \leqslant \frac{1}{\beta_n^p} \max_x |f^{(p)}(x)| \leqslant \frac{\sigma \overline{m}_p}{\beta_n^p} \quad \text{for} \quad p = 0, 1, 2, \ldots$$

Hence

$$|A_n| \leqslant \frac{\sigma}{\max\limits_p (\beta_n^p / \overline{m}_p)} = \frac{\sigma}{\overline{T}(\beta_n)}.$$

However, 2.1 with $l = 0$ yields $\overline{T}(r) \geqslant \frac{1}{r} e^{\bar{a}(r)} = e^{a(r)}$. Then $|A_n| \leqslant \sigma e^{-a(\beta_n)} < e^{-a(\beta_n)}$.

References

[1] T. Carleman, *Les fonctions quasi analytiques*, Paris 1926.

[2] G. Freud, *Über das gliedweise Differenzieren einer orthogonalen Polynomreihe*, Acta Math. Ac. Sc. Hung. 6 (1955), p. 221-226.

[3] J. Kopeć et Z. Semadeni, *Sur les points singuliers des fonctions analytiques vectorielles*, Bull. Soc. des amis des sciences et des lettres de Poznań, Ser. B, 14 (1958), p. 31-36.

[4] S. Mandelbrojt, *Series de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions*, Paris 1935.

[5] M. Ostrowski, *Über quasi-analytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklungen*, Acta Math. 53 (1930), p. 181-266.

[6] Ch. de la Vallée Poussin, *Quatre leçons sur les fonctions quasi-analytiques de variable reélle*, Bull. Soc. Math. France 52 (1924), p. 175-203.

Reçu par la Rédaction le 16. 6. 1958

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1960)

Sur les solutions de classe (L^2) de l'équation différentielle $u''+q(t)u = 0$

par Z. Opial (Kraków)

1. Envisageons l'équation différentielle

$$u''+q(t)u = 0. \tag{1}$$

Nous dirons que la solution $u(t)$ de cette équation est *de classe* (L^2) si l'on a

$$\int_0^\infty u^2(t)\,dt < +\infty. \tag{2}$$

Désignons par $Q(t)$ la fonction

$$Q(t) = \max_{0\leqslant s\leqslant t}(|q(s)|, 1).$$

La fonction $Q(t)$ est donc non décroissante dans l'intervalle $\langle 0, +\infty)$ et, par suite, à variation bornée dans tout intervalle fini. De plus $Q(t) \geqslant 1$ et

$$|q(t)| \leqslant Q(t) \tag{3}$$

dans tout l'intervalle $\langle 0, +\infty)$.

Théorème I. *Pour toute solution $u(t)$ de l'équation* (1) *de classe* (L^2) *on a*

$$\int_0^\infty \frac{u'^2(t)}{Q(t)}\,dt < +\infty. \tag{4}$$

Démonstration. En multipliant l'équation (1) par $u(t)$ on obtient

$$-u''(t)u(t) = q(t)u^2(t)$$

d'où, en vertu de (3):

$$-u''(t)u(t)/Q(t) \leqslant u^2(t). \tag{5}$$

En intégrant par parties on en tire l'inégalité

$$\int_0^t \frac{u'^2}{Q}dt \leqslant O(1)+\frac{uu'}{Q}+\int_0^t u^2dt+\int_0^t \frac{uu'}{Q^2}dQ.$$

En vertu de l'inégalité bien connue

$$(6)\qquad \frac{uu'}{\sqrt{Q}} \leqslant \frac{1}{2}\left(u^2+\frac{u'^2}{Q}\right),$$

il en résulte que

$$(7)\qquad \int_0^t \frac{u'^2}{Q}dt \leqslant O(1)+\frac{1}{2\sqrt{Q}}\left(u^2+\frac{u'^2}{Q}\right)+\int_0^t\left(u^2+\frac{u'^2}{Q}\right)\frac{dQ}{2Q\sqrt{Q}}.$$

En intégrant par parties la dernière intégrale on obtient

$$(8)\qquad \int_0^t \frac{u'^2}{Q}dt \leqslant O(1)-\frac{1}{2\sqrt{Q}}\left(u^2+\frac{u'^2}{Q}\right)+\int_0^t\left(u^2+\frac{u'^2}{Q}\right)'\frac{dt}{\sqrt{Q}}.$$

Mais en raison de l'équation (1):

$$\int_0^t\left(u^2+\frac{u'^2}{Q}\right)'\frac{dt}{\sqrt{Q}} = \int_0^t\left(2uu'+\frac{2u'u''}{Q}\right)\frac{dt}{\sqrt{Q}}-\int_0^t\frac{u'^2}{Q^2}\cdot\frac{dQ}{\sqrt{Q}}$$

$$= 2\int_0^t\frac{uu'}{\sqrt{Q}}\left(1-\frac{q(t)}{Q(t)}\right)dt-\int_0^t\frac{u'^2}{Q^2}\cdot\frac{dQ}{\sqrt{Q}}.$$

Le dernier terme est non négatif et, en vertu de l'inégalité (3):

$$0 \leqslant 1-q(t)/Q(t) \leqslant 2.$$

On a donc

$$(9)\qquad \int_0^t\left(u^2+\frac{u'^2}{Q}\right)'\frac{dt}{\sqrt{Q}} \leqslant 4\int_0^t\frac{|uu'|}{\sqrt{Q}}dt.$$

D'autre part, d'après une inégalité élémentaire

$$4|uu'|/\sqrt{Q} \leqslant 8u^2+u'^2/2Q.$$

Donc, en raison de (9):

$$(10)\qquad \int_0^t\left(u^2+\frac{u'^2}{Q}\right)'\frac{dt}{\sqrt{Q}} \leqslant 8\int_0^t u^2dt+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{u'^2}{Q}dt.$$

Des inégalités (8) et (10) il vient

$$(11)\qquad \frac{1}{2}\int_0^t\frac{u'^2}{Q}dt \leqslant O(1)-\frac{1}{2\sqrt{Q}}\left(u^2+\frac{u'^2}{Q}\right)$$

d'où résulte le théorème I.

2. Dans certaines hypothèses supplémentaires sur la fonction $Q(t)$ on peut remplacer l'inégalité (3) par celle-ci, moins restrictive

$$(3')\qquad q(t) \leqslant Q(t).$$

C'est possible dans le cas où la fonction $Q(t)$ satisfait à la condition de Lipschitz (A. Wintner [1]):

$$|Q(t_1)-Q(t_2)| \leqslant K|t_1-t_2|$$

ou bien encore dans le cas plus général où l'on a (N. Levinson [2]):

$$(12)\qquad dQ(t) \leqslant K\cdot Q(t)\sqrt{Q(t)}\,dt.$$

En effet, pour le démontrer il suffit de remplacer l'inégalité (6) par l'inégalité suivante:

$$\frac{uu'}{\sqrt{Q}} \leqslant \frac{K}{2}u^2+\frac{u'^2}{2KQ}$$

d'où l'on obtient, grâce à l'inégalité (12), au lieu de (7):

$$\frac{1}{2}\int_0^t\frac{u'^2}{Q}dt \leqslant O(1)+\frac{uu'}{Q}+\left(\frac{K^2}{2}+1\right)\int_0^t u^2dt.$$

Donc, si l'inégalité (4) n'était pas vraie, on devrait avoir

$$\lim_{t\to\infty}\frac{uu'}{Q} = +\infty$$

et, par suite, $u'(t)u(t)>0$ pour t suffisamment grands, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse (2).

3. Dans le cas où $q(t)=Q(t)$ c'est-à-dire où le coefficient $q(t)$ de l'équation (1) est une fonction positive non décroissante, le théorème I a été établi par Ph. Hartman et A. Wintner [3].

D. B. Sears [4] a démontré que si la fonction non décroissante et positive $Q(t)$ satisfait à l'inégalité (3′), on a, pour toute solution $u(t)$ de l'équation (1) de classe (L^2),

$$(13)\qquad \int_0^\infty\frac{u'^2(t)}{Q(2t)}dt < +\infty.$$

Ph. Hartman [5] a démontré que pour les solutions $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u''+\big(\lambda+q(t)\big)u=0 \tag{1'}$$

(λ est une constante arbitraire) l'inégalité (2) entraîne l'inégalité (4), si la fonction $Q(t)$ satisfait aux conditions suivantes

$$\Big|\int_0^t q(t)\,dt\Big|\leqslant\sqrt{Q(t)},\qquad Q(t)\geqslant c>0 \tag{14}$$

et si la fonction $1/\sqrt{Q(t)}$ satisfait à la condition de Lipschitz uniformément dans tout l'intervalle $\langle 0,+\infty)$. Le même auteur remarque que l'on pourrait facilement démontrer que les inégalités (14) et l'hypothèse $dQ(t)\geqslant 0$ sont bien suffisantes pour assurer l'inégalité (13) pour toute solution $u(t)$ de l'équation (1') de classe (L^2). Nous allons montrer que les mêmes hypothèses suffisent pour que l'on ait non seulement l'inégalité (13), mais aussi (4).

4. Théorème II. *Supposons que la fonction continue et non décroissante $Q(t)$ satisfasse à l'hypothèse* (14). *Alors pour toute solution $u(t)$ de l'équation* (1') *de classe (L^2) on a l'inégalité* (4), *c'est-à-dire la fonction $u'(t)/\sqrt{Q(t)}$ est aussi de classe (L^2).*

Démonstration. Multiplions l'équation (1') par $u(t)$. L'équation ainsi obtenue peut être écrite sous la forme

$$u'^2=(uu')'+\lambda u^2+q(t)u^2.$$

En divisant par $Q(t)$ et en intégrant on en tire

$$\int_0^t\frac{u'^2}{Q}dt=\lambda\int_0^t\frac{u^2}{Q}dt+\int_0^t\frac{q(t)u^2}{Q}dt+\int_0^t\frac{(uu')'}{Q}dt. \tag{15}$$

De même que dans la démonstration du théorème I on a

$$\int_0^t\frac{(uu')'}{Q}dt=O(1)+\frac{uu'}{Q}+\int_0^t\frac{uu'}{Q^2}dQ \tag{16}$$

$$\leqslant O(1)-\frac{1}{2\sqrt{Q}}\Big(u^2+\frac{u'^2}{Q}\Big)+\int_0^t\frac{2uu'}{\sqrt{Q}}dt-2\int_0^t\frac{q(t)uu'}{Q\sqrt{Q}}dt.$$

Sans restreindre la généralité on peut évidemment remplacer la première des inégalités (14) par l'inégalité suivante

$$\Big|\int_0^t q(t)\,dt\Big|\leqslant\varepsilon\sqrt{Q(t)} \tag{14'}$$

où ε est un nombre positif qui sera convenablement choisi dans la suite.

Posons

$$J(t)=\int_0^t q(t)\,dt.$$

En intégrant par parties la dernière intégrale du second membre de la relation (16) on obtient

$$\Big|2\int_0^t\frac{q(t)uu'}{Q\sqrt{Q}}dt\Big|=\Big|\frac{2J(t)}{\sqrt{Q}}\cdot\frac{uu'}{Q}-2\int_0^t J(t)\Big(\frac{uu'}{Q\sqrt{Q}}\Big)'dt\Big| \tag{17}$$

$$\leqslant\frac{2\varepsilon}{\sqrt{Q}}\Big(u^2+\frac{u'^2}{Q}\Big)+2\varepsilon\int_0^t\frac{u'^2}{Q}dt+3\varepsilon\int_0^t\frac{|uu'|}{\sqrt{Q}}\cdot\frac{dQ}{Q\sqrt{Q}}+\Big|2\int_0^t\frac{J(t)q(t)u^2}{Q\sqrt{Q}}dt\Big|.$$

Mais $J'(t)=q(t)$. On a donc

$$\Big|2\int_0^t\frac{J(t)q(t)u^2}{Q\sqrt{Q}}dt\Big|=\Big|\frac{J^2(t)u^2}{Q\sqrt{Q}}-\int_0^t J^2(t)\Big(\frac{u^2}{Q\sqrt{Q}}\Big)'dt\Big| \tag{18}$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{Q}}\Big(u^2+\frac{u'^2}{Q}\Big)+2\varepsilon^2\int_0^t\frac{|uu'|}{\sqrt{Q}}dt+\frac{3}{2}\varepsilon^2\int_0^t\frac{u^2}{Q\sqrt{Q}}dQ.$$

On peut pareillement évaluer la seconde des intégrales du second membre de la formule (15). On a notamment

$$\Big|\int_0^t\frac{q(t)u^2}{Q}dt\Big|=\Big|\frac{J(t)}{\sqrt{Q}}\cdot\frac{u^2}{\sqrt{Q}}-\int_0^t J(t)\Big(\frac{u^2}{Q}\Big)'dt\Big| \tag{19}$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{\sqrt{Q}}\Big(u^2+\frac{u'^2}{Q}\Big)+2\varepsilon\int_0^t\frac{|uu'|}{\sqrt{Q}}dt+\varepsilon\int_0^t\frac{u^2}{Q\sqrt{Q}}dQ.$$

Enfin, des inégalités (15)-(19) il vient

$$\int_0^t\frac{u'^2}{Q}dt\leqslant O(1)+\frac{(-1+6\varepsilon+2\varepsilon^2)}{2\sqrt{Q}}\Big(u^2+\frac{u'^2}{Q}\Big)+2\varepsilon\int_0^t\frac{u'^2}{Q}dt+ \tag{20}$$

$$+(1+\varepsilon+\varepsilon^2)\int_0^t\frac{2|uu'|}{\sqrt{Q}}dt+\Big(\varepsilon+\frac{3}{2}\varepsilon^2\Big)\int_0^t\frac{u^2}{Q\sqrt{Q}}dQ+3\varepsilon\int_0^t\frac{|uu'|}{\sqrt{Q}}\cdot\frac{dQ}{Q\sqrt{Q}}.$$

Choisissons $\varepsilon>0$ de sorte que l'on ait

$$\varepsilon(1+\varepsilon)<2\varepsilon(3+\varepsilon)<1. \tag{21}$$

De l'inégalité évidente $2|uu'|/\sqrt{Q} \leqslant u^2/\varepsilon + \varepsilon u'^2/Q$ et de (2), (6), (20) et (21) il vient

$$\int_0^t \frac{u'^2}{Q}dt \leqslant O(1) + 4\varepsilon\int_0^t \frac{u'^2}{Q}dt + 4\varepsilon\int_0^t \left(u^2+\frac{u'^2}{Q}\right)\frac{dQ}{Q\sqrt{Q}}. \tag{22}$$

Mais d'autre part

$$\int_0^t \left(u^2+\frac{u'^2}{Q}\right)\frac{dQ}{Q\sqrt{Q}} = O(1) - \frac{2}{\sqrt{Q}}\left(u^2+\frac{u'^2}{Q}\right) + 2\int_0^t \left(u^2+\frac{u'^2}{Q}\right)'\frac{dt}{\sqrt{Q}}$$

$$\leqslant O(1) - \frac{2}{\sqrt{Q}}\left(u^2+\frac{u'^2}{Q}\right) + 2\int_0^t \frac{2|uu'|}{\sqrt{Q}}dt + \left|4\int_0^t \frac{q(t)uu'}{Q\sqrt{Q}}dt\right|.$$

Par conséquent, en vertu de (17) et (18):

$$\int_0^t \left(u^2+\frac{u'^2}{Q}\right)\frac{dQ}{Q\sqrt{Q}} \leqslant O(1) + 8\varepsilon\int_0^t \frac{u'^2}{Q}dt + 6\varepsilon\int_0^t \left(u^2+\frac{u'^2}{Q}\right)\frac{dQ}{Q\sqrt{Q}}. \tag{23}$$

Des inégalités (22) et (23), envisagées pour un ε suffisamment petit, il résulte que les deux intégrales

$$\int_0^\infty \frac{u'^2}{Q}dt, \qquad \int_0^\infty \left(u^2+\frac{u'^2}{Q}\right)\frac{dQ}{Q\sqrt{Q}}$$

sont finies, ce qu'il fallait démontrer.

5. Il est facile de construire un exemple convenable de l'équation (1) montrant qu'en général l'hypothèse (3') est trop faible pour que l'inégalité (2) puisse entraîner (4). Pour simplifier nous nous bornerons à donner un tel exemple dans lequel la fonction $q(t)$ est discontinue en une infinité dénombrable de points.

Prenons à cet effet deux suites de nombres positifs $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ telles que l'on ait

$$2\pi < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 \ldots, \qquad a_i^2 < b_i, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2/b_i < +\infty \tag{24}$$

et posons

$$u(t) = A_1 \sin a_1 t$$

où A_1 est un nombre positif moindre que l'unité. Soit α_1 un nombre de l'intervalle $\langle 1, 2\rangle$ tel que l'on ait $u(\alpha_1) = 0$ et $u'(\alpha_1) > 0$. La fonction $u(t)$ est dans l'intervalle $\langle 0, \alpha_1\rangle$ l'intégrale de l'équation

$$u'' + a_1^2 u = 0. \tag{1'}$$

Prolongeons-la en dehors de cet intervalle de manière qu'elle soit l'intégrale de l'équation

$$u'' - b_1^2 u = 0 \tag{1''}$$

et que l'on ait

$$u(\alpha_1 - 0) = u(\alpha_1 + 0) \quad \text{et} \quad u'(\alpha_1 - 0) = u'(\alpha_1 + 0).$$

Mais $u(\alpha_1 - 0) = 0$ et $u'(\alpha_1 - 0) = A_1 a_1$. On a donc pour $t \geqslant 0$:

$$u(t+\alpha_1) = \frac{A_1 a_1}{2b_1}(e^{b_1 t} - e^{-b_1 t}), \qquad u'(t+\alpha_1) = \frac{A_1 a_1}{2}(e^{b_1 t} + e^{-b_1 t}). \tag{25}$$

Choisissons maintenant un ε_1 positif de sorte que l'on ait

$$e^{2b_1\varepsilon_1} = 1 + 8b_1/A_1^2. \tag{26}$$

Dans l'intervalle $\langle \alpha_1, \alpha_1 + \varepsilon_1\rangle$ on a, en vertu de (25) et (26):

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_1+\varepsilon_1} \frac{u'^2(t)}{a_1^2}dt = \frac{A_1^2}{4}\int_0^{\varepsilon_1} (e^{b_1 t} + e^{-b_1 t})^2 dt \geqslant \frac{A_1^2}{4}\int_0^{\varepsilon_1} e^{2b_1 t}dt = 1$$

et, d'autre part

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_1+\varepsilon_1} u^2(t)\,dt = \left(\frac{A_1 a_1}{2b_1}\right)^2 \int_0^{\varepsilon_1} (e^{b_1 t} - e^{-b_1 t})^2 dt \leqslant \left(\frac{A_1 a_1}{2b_1}\right)^2 \int_0^{\varepsilon_1} e^{2b_1 t}dt = \frac{a_1^2}{b_1^2}.$$

En dehors de l'intervalle $\langle 0, \alpha_1 + \varepsilon_1\rangle$ prolongeons la fonction $u(t)$ de sorte qu'elle soit l'intégrale de l'équation

$$u'' + a_2^2 u = 0 \tag{1'''}$$

et que l'on ait

$$u(\alpha_1 + \varepsilon_1 - 0) = u(\alpha_1 + \varepsilon_1 + 0), \qquad u'(\alpha_1 + \varepsilon_1 - 0) = u'(\alpha_1 + \varepsilon_1 + 0).$$

A cet effet il faut poser

$$u(t) = A_2 \sin a_2(t - \beta)$$

et choisir les nombres A_2 et β de sorte que l'on ait

$$A_2 \sin a_2(\alpha_1 + \varepsilon_1 - \beta) = \frac{A_1 a_1}{2b_1}(e^{b_1\varepsilon_1} - e^{-b_1\varepsilon_1}),$$

$$A_2 a_2 \cos a_2(\alpha_1 + \varepsilon_1 - \beta) = \frac{A_1 a_1}{2}(e^{b_1\varepsilon_1} + e^{-b_1\varepsilon_1}).$$

Ces deux relations déterminent la valeur de A_2 au signe près, car il en résulte que

$$A_2^2 = \frac{A_1^2 a_1^2}{4}\left[\frac{(e^{b_1\varepsilon_1}-e^{-b_1\varepsilon_1})^2}{b_1^2}+\frac{(e^{b_1\varepsilon_1}+e^{-b_1\varepsilon_1})^2}{a_2^2}\right] \leqslant \frac{A_1^2 a_1^2}{2b_1^2}(e^{2b_1\varepsilon_1}+e^{-2b_1\varepsilon_1})$$
$$\leqslant \frac{A_1^2 a_1^2}{2b_1^2}(e^{2b_1\varepsilon_1}+1) = \frac{A_1^2 a_1^2}{b_1^2}\left(1+\frac{4b_1}{A_1^2}\right) \leqslant \frac{5a_1^2}{b_1}.$$

Cela fait, on prend de nouveau un a_2 de sorte que l'on ait

$$u(a_2)=0,\quad u'(a_2)>0 \quad \text{et} \quad a_1+\varepsilon_1+1 \leqslant a_2 \leqslant a_1+\varepsilon_1+2$$

et on répète à droite de a_2 la même construction que dans l'intervalle $\langle 0, a_2\rangle$ et ainsi de suite. On construit de cette manière une suite infinie d'intervalles

$$\langle 0, a_1\rangle,\ \langle a_1, a_1+\varepsilon_1\rangle,\ \langle a_1+\varepsilon_1, a_2\rangle,\ \langle a_2, a_2+\varepsilon_2\rangle,\ \ldots$$

tels que

$$(27)\quad a_i+\varepsilon_i+1 \leqslant a_{i+1} \leqslant a_i+\varepsilon_i+2,\qquad e^{2b_i\varepsilon_i}=1+\frac{8b_i}{A_i^2},\qquad A_{i+1}^2 \leqslant \frac{5a_i^2}{b_i}.$$

Dans ces intervalles la fonction $u(t)$ est consécutivement l'intégrale des équations (1'), (1''), (1''') et

$$u''-b_2^2u=0,\quad u''+a_3^2u=0,\quad u''-b_3^2u=0,\ \ldots$$

Dans chacun des intervalles $\langle a_i+\varepsilon_i, a_{i+1}\rangle$ dont les longueurs ne dépassent pas le nombre 2, on a, d'après (27)

$$\int_{a_i+\varepsilon_i}^{a_{i+1}} u^2(t)\,dt \leqslant \int_0^2 A_{i+1}^2\,dt \leqslant \frac{10a_i^2}{b_i}$$

et dans chacun des intervalles $\langle a_i, a_i+\varepsilon_i\rangle$:

$$\int_{a_i}^{a_i+\varepsilon_i} u^2(t)\,dt \leqslant \left(\frac{A_i a_i}{2b_i}\right)^2 \int_0^{\varepsilon_i} e^{2b_it}\,dt = \frac{a_i^2}{b_i^2} < \frac{a_i^2}{b_i}.$$

On a donc, en raison de (24)

$$\int_0^\infty u^2(t)\,dt \leqslant 2A_1^2+11\sum_{i=1}^\infty a_i^2/b_i < +\infty.$$

La fonction $u(t)$ peut être envisagée comme intégrale de classe (L^2) de l'équation (1) avec un coefficient $q(t)$ discontinu égal à a_1^2 dans l'intervalle $\langle 0, a_1\rangle$, à a_{i+1}^2 dans chacun des intervalles $\langle a_i+\varepsilon_i, a_{i+1}\rangle$ et à $-b_i^2$ dans chacun des intervalles $\langle a_i, a_i+\varepsilon_i\rangle$. La majorante supérieure $Q(t)$ de la fonction $q(t)$ est par conséquent égale à a_i^2 dans chacun des intervalles $\langle a_i+\varepsilon_i, a_{i+1}+\varepsilon_{i+1}\rangle$ et à a_1^2 dans l'intervalle $\langle 0, a_1+\varepsilon_1\rangle$.

Mais dans les intervalles $\langle a_i, a_i+\varepsilon_i\rangle$ on a en vertu de (27)

$$\int_{a_i}^{a_i+\varepsilon_i}\frac{u'^2(t)}{Q(t)}\,dt = \int_{a_i}^{a_i+\varepsilon_i}\frac{u'^2(t)}{a_i^2}\,dt \geqslant \frac{A_i^2}{4}\int_0^{\varepsilon_i} e^{2b_it}\,dt = 1.$$

On a donc

$$\int_0^\infty \frac{u'^2(t)}{Q(t)}\,dt = +\infty.$$

6. Lemme. *Pour toute solution $u(t)$ de l'équation* (1) *de classe* (L^2) *on a*

$$\int_0^\infty \frac{|uu'|}{\sqrt{Q}}\cdot\frac{dQ}{Q\sqrt{Q}} \leqslant \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(u^2+\frac{u'^2}{Q}\right)\frac{dQ}{Q\sqrt{Q}} < +\infty.$$

Démonstration. De même que dans la démonstration du théorème I on obtient l'inégalité

$$\frac{1}{2}\int_0^t\left(u^2+\frac{u'^2}{Q}\right)\frac{dQ}{Q\sqrt{Q}} = O(1)-\frac{1}{\sqrt{Q}}\left(u^2+\frac{u'^2}{Q}\right)+\int_0^t\left(u^2+\frac{u'^2}{Q}\right)'\frac{dt}{\sqrt{Q}}$$
$$\leqslant O(1)-\frac{1}{\sqrt{Q}}\left(u^2+\frac{u'^2}{Q}\right)+2\int_0^t u^2\,dt+2\int_0^t\frac{u'^2}{Q}\,dt.$$

Comme le deuxième terme du second membre est négatif et les trois autres sont bornés, le lemme se trouve ainsi démontré.

7. En s'appuyant sur le lemme que nous venons de démontrer on peut facilement prouver le théorème suivant:

Théorème III. *Pour toute solution $u(t)$ de l'équation* (1) *de classe* (L^2) *les fonctions*

$$\frac{u(t)u'(t)}{Q(t)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{Q(t)}}\left(u^2(t)+\frac{u'^2(t)}{Q(t)}\right)$$

sont à variation bornée dans tout l'intervalle $\langle 0, +\infty)$ et tendent vers zéro lorsque t croît indéfiniment.

Démonstration. On a les évaluations suivantes

$$\int_0^t \left| d\frac{uu'}{Q} \right| \leqslant \int_0^t \frac{u'^2}{Q} dt + \int_0^t \frac{|uu''|}{Q} dt + \int_0^t \frac{|uu'|}{\sqrt{Q}} \cdot \frac{dQ}{Q\sqrt{Q}}$$

$$\leqslant \int_0^t \frac{u'^2}{Q} dt + \int_0^t u^2 dt + \int_0^t \frac{|uu'|}{\sqrt{Q}} \cdot \frac{dQ}{Q\sqrt{Q}}$$

d'où il résulte, d'après le lemme, que la fonction $u(t)u'(t)/Q(t)$ est à variation bornée dans tout l'intervalle $\langle 0, +\infty)$. Pour t tendant vers l'infini il existe donc une limite de cette fonction. Elle ne peut pas être différente de zéro puisque l'on a

$$u^2(t) = u^2(0) + 2\int_0^t uu'\,dt = u^2(0) + 2\int_0^t \frac{uu'}{Q} Q dt.$$

On a de même

$$\int_0^t \left| d\frac{1}{\sqrt{Q}} \left(u^2 + \frac{u'^2}{Q}\right) \right| \leqslant \frac{1}{2} \int_0^t \left(u^2 + \frac{u'^2}{Q}\right) \frac{dQ}{Q\sqrt{Q}} +$$

$$+ 2\int_0^t |uu'| \left(1 - \frac{q(t)}{Q(t)}\right) \frac{dt}{\sqrt{Q}} + \int_0^t \frac{u'^2}{Q} \cdot \frac{dQ}{Q\sqrt{Q}}$$

$$\leqslant \frac{3}{2} \int_0^t \left(u^2 + \frac{u'^2}{Q}\right) \frac{dQ}{Q\sqrt{Q}} + 2\int_0^t u^2 dt + 2\int_0^t \frac{u'^2}{Q} dt$$

d'où il vient que la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{Q}} \left(u^2 + \frac{u'^2}{Q}\right)$$

est à variation bornée dans tout l'intervalle $\langle 0, +\infty)$. La limite de cette fonction pour t tendant vers l'infini doit être égale à zéro puisque l'on a

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{Q}} \left(u^2 + \frac{u'^2}{Q}\right) \sqrt{Q}\, dt = \int_0^\infty \left(u^2 + \frac{u'^2}{Q}\right) dt < +\infty.$$

Le théorème III se trouve ainsi démontré.

8. Du théorème III on déduit immédiatement:

COROLLAIRE. *Pour toute solution* $u(t)$ *de l'équation* (1) *de classe* (L^2) *on a les évaluations suivantes*:

$$|u(t)| = o\left(\sqrt[4]{Q(t)}\right), \qquad |u'(t)| = o\left(\sqrt[4]{Q(t)^3}\right).$$

Travaux cités

[1] A. Wintner, *(L^2)-connection between the potential and kinetic energies of linear systems*, Am. Journal of Math. 69 (1947), p. 5-13.

[2] N. Levinson, *Criteria for the limit-point case for second order linear differential operators*, Cas. pro pěst. Matem. a Fys. 74 (1949), p. 17-20.

[3] Ph. Hartman and A. Wintner, *Criteria of non-degeneracy for the wave equation*, Am. Journal of Math. 70 (1948), p. 295-308.

[4] D. B. Sears, *Note on the uniqueness of the Green's function associated with certain differential equations*, Canadian Journal of Math. 2 (1950), p. 314-325.

[5] Ph. Hartman, *The number of L^2-solutions of $x'' + q(t)x = 0$*, Am. Journal of Math. 73 (1951), p. 635-645.

Reçu par la Rédaction le 21. 10. 1958