From (5), (8), (7) we obtain

$$g(0) = 0. \tag{19}$$

By the theorem on the ordinary differential inequality it follows from (18), (19) that

$$g(x) \leqslant 0 \quad \text{for} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

By (8), (7), (4) it follows that $g(x) = 0$. Hence by (8)

$$u_i \equiv 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad \text{for} \quad 0 < x < 1, \quad |y_k| \leqslant 1$$
$$(k = 1, \dots, n) \quad \text{q. e. d.}$$

Remark. Applying Hadamard's lemma we may obtain an analogue of theorem 2 from [1] for the mixed problem for the following non-linear system of partial differential equations of the second order:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = F_i\left(Z, U, \frac{\partial U}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial y_n}, \frac{\partial^2 U}{\partial y_1 \partial y_1}, \dots, \frac{\partial^2 U}{\partial y_1 \partial y_n}, \frac{\partial^2 U}{\partial y_2 \partial y_1}, \dots, \frac{\partial^2 U}{\partial y_n \partial y_n}\right)$$
$$(i = 1, \dots, m; \; U = (u_1, \dots, u_m)).$$

References

[1] A. Pliś, *On the uniqueness of the non-negative solution of the homogeneous Cauchy problem for a system of partial differential equations*, Ann. Polon. Math. 2 (1955), p. 314-318.

[2] — *The problem of uniqueness for the solution of a system of partial differential equations*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 2 (1954), p. 55-57.

Reçu par la Rédaction le 15. 12. 1958

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1960)

Sur la stabilité asymptotique des solutions d'un système d'équations différentielles

par Z. Opial (Kraków)

1. Considérons le système de deux équations différentielles

$$X' = f(X, t), \tag{1}$$

où X désigne le vecteur (x_1, x_2) et $f(X, t)$ est une fonction vectorielle $\big(f_1(x_1, x_2, t), f_2(x_1, x_2, t)\big)$ dont les composantes sont continues par rapport à (x_1, x_2, t) et de classe C^1 par rapport à (x_1, x_2) dans tout l'espace à trois dimensions (x_1, x_2, t).

Désignons par $X(t; X_0, t_0)$ la solution (unique en vertu des hypothèses précédentes) du système (1) qui passe par le point (X_0, t_0).

Soit K un ensemble fermé, borné et simplement connexe du plan (x_1, x_2). On dit (cf. [8], p. 83) que le système (1) est *relativement borné* dans l'ensemble K si pour tout $X_0 \epsilon K$ et tout t_0 on a $X(t; X_0, t_0) \epsilon K$ pour $t \geqslant t_0$.

On dit qu'une solution $X(t)$ du système (1) est *asymptotiquement stable dans l'ensemble* K si le système considéré est relativement borné dans cet ensemble et si pour tout $X_0 \epsilon K$ et tout t_0 on a la relation

$$\lim_{t \to +\infty} |X(t; X_0, t_0) - X(t)| = 0, \tag{2}$$

où $|X|$ désigne la longueur euclidienne du vecteur X.

De la relation (2) il vient que l'on a quels que soient les points X_1, $X_2 \epsilon K$ et t_0,

$$\lim_{t \to +\infty} |X(t; X_1, t_0) - X(t; X_2, t_0)| = 0, \tag{3}$$

ce qui signifie que toute solution du système (1) passant par un point de l'ensemble K est forcément asymptotiquement stable dans cet ensemble. Donc, au lieu de dire qu'une solution choisie du système envisagé est asymptotiquement stable dans K on peut dire tout simplement que c'est le système (1) lui-même qui est asymptotiquement stable dans cet ensemble.

2. Récemment G. Seifert [8] a établi un critère général de stabilité asymptotique du système (1) et il l'a appliqué à la démonstration de la stabilité des solutions périodiques d'un système du type (1) à second membre périodique par rapport à la variable indépendante t. Dans la présente note je me propose de montrer comment on peut obtenir, par une simple modification de la méthode de G. Seifert, une méthode encore plus maniable et quelquefois plus efficace. Cela nous permettra de simplifier considérablement la démonstration d'un critère de stabilité de la solution périodique de l'équation différentielle du second ordre

$$x''+f(x)x'+g(x) = p(t), \tag{4}$$

établi par G. Seifert dans la note mentionnée (cf. [8], p. 86, Theorem 2).

Nous nous bornons à envisager un système de deux équations, mais de pareilles considérations peuvent aussi s'appliquer — comme il est facile de le voir — aux systèmes plus généraux contenant un nombre arbitraire d'équations.

Notons enfin qu'une méthode analogue à celle exposée dans le présent travail peut être aussi appliquée à la comparaison non seulement de deux solutions d'un système donné, mais aussi à celle des solutions de systèmes différents (voir p. ex. Z. Opial [4] et [5]).

3. Soit K un ensemble plan fermé, borné et simplement connexe dont la frontière est une courbe composée d'un nombre fini d'arcs simples de classe C^1 (nous supposons de plus qu'en chaque point de cette frontière il existe des demi-tangentes — nous dirons dans toute la suite qu'une telle courbe est de classe $\tilde{C}^1$). Supposons que le système (1) soit relativement borné dans cet ensemble et soient X_1, X_2 deux points arbitraires appartenant à K. Joignons le point X_1 au point X_2 par un arc simple contenu entièrement dans l'ensemble K:

$$X = S(u):\quad x_1 = s_1(u),\quad x_2 = s_2(u)\quad (0 \leqslant u \leqslant 1). \tag{C}$$

Supposons que les fonctions $s_i(u)$ $(i = 1, 2)$ soient de classe C^1 dans tout l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$ et que l'on ait $S(0) = X_1$ et $S(1) = X_2$. Désignons par $C(t)$ la courbe plane donnée par les équations paramétriques

$$X = S(t, u) = X\big(t; S(u), t_0\big):\quad x_1 = s_1(t, u),\quad x_2 = s_2(t, u)\quad (t \geqslant t_0,\ 0 \leqslant u \leqslant 1). \tag{$C(t)$}$$

On a évidemment

$$|X(t; X_1, t_0)-X(t; X_2, t_0)| = |S(t, 0)-S(t, 1)| \leqslant L(t), \tag{5}$$

où $L(t)$ désigne la longueur de l'arc $C(t)$, c'est-à-dire

$$L(t) = \int_0^1 \left\{\left(\frac{\partial s_1(t, u)}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_2(t, u)}{\partial u}\right)^2\right\}^{1/2} du.$$

Il est facile de vérifier que les fonctions

$$v_1(t_0 u) = \partial s_1(t, u)/\partial u,\qquad v_2(t, u) = \partial s_2(t, u)/\partial u$$

satisfont pour $t \geqslant t_0$ et $0 \leqslant u \leqslant 1$ au système d'équations différentielles linéaires

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{i,j=1}^{2} f_{ij}\big(s_1(t, u), s_2(t, u), t\big)v_j\qquad (i = 1, 2),$$

où $f_{ij}(x_1, x_2, t) = \partial f_i(x_1, x_2, t)/\partial x_j$.

Si les fonctions $v_1(t, u), v_2(t, u)$ $(t \geqslant t_0, 0 \leqslant u \leqslant 1)$ sont bornées dans leur ensemble dans l'intervalle $\langle t_0, +\infty)$ et si, de plus, elles tendent vers zéro lorsque t tend vers l'infini, alors la fonction $L(t)$ tend vers zéro et, par conséquent, de l'inégalité (5) on tire la relation (3).

4. Définition. Nous dirons que le système (1) jouit de la propriété (M) dans l'ensemble K si pour tout $X_0 \epsilon K$, tout t_0 et tout nombre positif A il existe un nombre $B > 0$ tel que toute solution $\big(v_1(t), v_2(t)\big)$ du système d'équations différentielles linéaires

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{i,j=1}^{2} f_{ij}\big(X(t; X_0, t_0), t\big)v_j\qquad (i = 1, 2) \tag{6}$$

aux valeurs initiales bornées par A pour $t = t_0$:

$$v_1^2(t_0)+v_2^2(t_0) \leqslant A, \tag{7}$$

satisfait dans tout l'intervalle $\langle t_0, +\infty)$ à l'inégalité

$$v_1^2(t)+v_2^2(t) \leqslant B \tag{8}$$

et tend vers zéro lorsque t croît indéfiniment:

$$\lim_{t\to+\infty} v_1(t) = \lim_{t\to+\infty} v_2(t) = 0. \tag{9}$$

Pour toute solution arbitraire fixe $X(t; X_0, t_0)$ du système (1) le système (6) est linéaire et homogène. Donc, il suffit d'envisager deux solutions linéairement indépendantes de ce système. Si elles vérifient les relations (9), il en est de même de toute autre solution du système (6) et pour tout $A > 0$ (et t_0 fixe) il existe un B tel que l'inégalité (7) entraîne l'inégalité (8). Et inversement, pour tout $B > 0$ il existe un $A > 0$ pour lequel (7) entraîne (8). On dit dans ce cas que la solution identiquement nulle du système (6) est asymptotiquement stable au sens de Liapounoff (cf. I. G. Malkine [3], p. 12). Or, la constante B dépend non seulement de la valeur de A, mais — en général — aussi de la solution choisie $X(t; X_0, t_0)$ du système (1) (c'est-à-dire du point (X_0, t_0)).

On peut donc dire que le système (1) jouit de la propriété (M) dans l'ensemble K si la solution identiquement nulle des systèmes (6) est asymptotiquement stable uniformément par rapport à $X_0 \epsilon K$ et t_0 arbitraire.

5. En nous appuyant sur ce que nous avons dit au n° 3 nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit K un ensemble plan fermé, borné et simplement connexe, limité par une courbe de classe $\tilde{C}^1$. Si le système* (1) *est relativement borné dans K et y jouit de la propriété* (M), *le système* (1) *est asymptotiquement stable dans cet ensemble.*

En effet, deux points arbitraires X_1 et X_2 de l'ensemble K peuvent être joints par une courbe C de classe C^1 contenue entièrement dans K. Si le système (1) jouit de la propriété (M), la longueur $L(t)$ de la courbe $C(t)$ (cf. n° 3) tend vers zéro lorsque t croît indéfiniment. On a donc la relation (3) et le théorème 1 se trouve ainsi démontré.

On peut de même démontrer que pour tout t_0 fixe la convergence exprimée par la formule (3) est uniforme par rapport aux points X_1 et X_2 variant dans l'ensemble K. Il suffit à cet effet de prendre pour C la courbe qui constitue la frontière de l'ensemble K. La longueur de la courbe correspondante $C(t)$ $(t \geqslant t_0)$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini, ce qui signifie que la convergence envisagée est bien uniforme.

Dans le cas où, lorsque A tend vers zéro, B tend aussi vers zéro, toute solution $X(t; X_0, t_0)$ du système (1) (X_0 appartient à l'intérieur de l'ensemble K et t_0 est arbitraire) est asymptotiquement stable au sens de Liapounoff. En effet, dans cette hypothèse à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un $\delta > 0$ tel que

1° le voisinage V: $|X - X_0| \leqslant \delta$ appartienne à K;

2° en prenant pour courbe C joignant les points X_0 et $X_1 \epsilon V$ le segment $\overline{X_0 X_1}$, la longueur de la courbe correspondante $C(t)$ $(t \geqslant t_0)$ soit au plus égale à ε.

6. Soit $\Omega(X; v_1, v_2) = \Omega(x_1, x_2; v_1, v_2)$ une forme quadratique des variables v_1, v_2 dont les coefficients sont des fonctions de classe C^1 des variables x_1, x_2:

$$\Omega(x_1, x_2; v_1, v_2) = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(x_1, x_2) v_i v_j .$$

Soit $v_1 = v_1(t)$, $v_2 = v_2(t)$ une solution arbitraire du système (6). On a alors

$$\frac{d}{dt}\Omega\big(x_1(t; X_0, t_0), x_2(t; X_0, t_0); v_1(t), v_2(t)\big) = -\Omega_1\big(x_1(t; X_0, t_0), x_2(t; X_0, t_0), t; v_1(t), v_2(t)\big), \tag{10}$$

où $\Omega_1(x_1, x_2, t; v_1, v_2)$ est une forme quadratique des variables v_1, v_2 à coefficients dépendant des variables x_1, x_2 et t.

Supposons que la forme Ω soit définie positive pour tout point (x_1, x_2) de l'ensemble K. L'ensemble K étant compact, il existe deux nombres positifs α et β tels que l'on a pour tout point (x_1, x_2) de cet ensemble et tout couple de nombres v_1 et v_2:

$$\alpha(v_1^2 + v_2^2) \leqslant \Omega(x_1, x_2; v_1, v_2) \leqslant \beta(v_1^2 + v_2^2). \tag{11}$$

Admettons de plus que la forme quadratique Ω_1 soit définie positive dans l'ensemble K, uniformément par rapport à t, c'est-à-dire qu'il existe un nombre positif γ tel que l'on ait

$$\gamma(v_1^2 + v_2^2) \leqslant \Omega_1(x_1, x_2, t; v_1, v_2) \tag{12}$$

pour tout point (x_1, x_2) de l'ensemble K et v_1, v_2, t arbitraires.

Ceci étant admis, des relations (10)-(12) on obtient l'inégalité différentielle

$$\frac{d}{dt}\Omega\big(X(t; X_0, t_0); v_1(t), v_2(t)\big) \leqslant -\frac{\gamma}{\beta}\Omega\big(X(t; X_0, t_0); v_1(t), v_2(t)\big).$$

Il en résulte que pour tout $t \geqslant t_0$ on a l'inégalité

$$\Omega\big(X(t: X_0, t_0); v_1(t), v_2(t)\big) \leqslant \Omega\big(X(t_0; X_0, t_0); v_1(t_0), v_2(t_0)\big)$$

et de plus

$$\lim_{t\to+\infty} \Omega\big(X(t; X_0, t_0); v_1(t), v_2(t)\big) = 0.$$

En vertu de la première des inégalités (11) il en vient

$$\lim_{t\to+\infty} \big(v_1^2(t) + v_2^2(t)\big) = 0.$$

Cela signifie que, dans nos hypothèses sur les formes quadratiques Ω et Ω_1, le système (1) jouit de la propriété (M) dans l'ensemble K. Nout avons ainsi démontré un théorème analogue au théorème de G. Seifert (cf. [8], p. 85, Theorem 1), à savoir:

THÉORÈME 2. *Soit K un ensemble plan fermé, borné et simplemens connexe dont la frontière est une courbe fermée de classe $\tilde{C}^1$. Si le système* (1) *est relativement borné dans l'ensemble K, s'il existe une forme quadratique $\Omega(x_1, x_2; v_1, v_2)$ des variables v_1, v_2, à coefficients de classe C^1 par rapport à x_1, x_2, satisfaisant aux inégalités* (11), *et si la forme quadratique $\Omega_1(x_1, x_2, t; v_1, v_2)$ déterminée par la formule* (10) *vérifie l'inégalité* (12), *le système* (1) *est asymptotiquement stable dans l'ensemble K.*

Dans le cas envisagé on peut appliquer la remarque finale du n° 5. Du théorème précédent on obtient donc immédiatement le corollaire suivant:

COROLLAIRE 1. *Dans les hypothèses du théorème 2 toute solution $X(t; X_0, t_0)$ du système (1), où X_0 appartient à l'intérieur de l'ensemble K et t_0 est arbitraire, est asymptotiquement stable au sens de Liapounoff.*

7. Considérons maintenant le système

$$x' = y - F(x), \qquad y' = -g(x) + p(t) \tag{13}$$

qui s'obtient de l'équation (4) si l'on pose

$$F(x) = \int_0^x f(s)\,ds \qquad \text{et} \qquad y = x' + F(x).$$

Pour ce système il est facile de démontrer le théorème suivant (cf. [8], p. 86, Theorem 2 et aussi [5], théorème 4):

THÉORÈME 3. *Soit K un ensemble plan dont la frontière est une courbe de classe $\tilde{C}^1$ et dans lequel le système (13) est relativement borné. Si les fonctions $f(x)$, $g''(x)$ et $p(t)$ sont continues et si l'on a, pour tout point (x, y) appartenant à K, les inégalités*

$$|g''(x)||y - F(x)| < 2f(x)g'(x), \qquad f(x) > 0, \tag{14}$$

le système (13) est asymptotiquement stable dans l'ensemble K.

Démonstration. Dans le cas envisagé le système (6) admet la forme suivante:

$$v_1' = v_2 - f\big(x(t)\big)v_1, \qquad v_2' = -g'\big(x(t)\big)v_1, \tag{15}$$

où $\big(x(t), y(t)\big)$ est une solution du système (13) contenue dans l'ensemble K pour $t \geqslant t_0$. Soit $\big(v_1(t), v_2(t)\big)$ une solution arbitraire du système (15). Posons

$$H(t) = g'\big(x(t)\big)v_1^2(t) + v_2^2(t).$$

En vertu de (13) on a

$$H'(t) = -\Big\{2g'\big(x(t)\big)f\big(x(t)\big) - g''\big(x(t)\big)\big[y(t) - F\big(x(t)\big)\big]\Big\}v_1^2(t).$$

En tenant compte de la première des inégalités (14) on en obtient l'inégalité

$$H'(t) \leqslant -\varepsilon v_1^2(t) \qquad (t \geqslant t_0), \tag{16}$$

ε étant une constante positive.

En vertu des inégalités (14) $g'(x) > 0$ et, par conséquent, la fonction $H(t)$ est non négative. En raison de l'inégalité (16) on a pour tout $t \geqslant t_0$:

$$H(t) = g'\big(x(t)\big)v_1^2(t) + v_2^2(t) \leqslant H(t_0),$$

d'où il vient qu'à tout $A > 0$ on peut faire correspondre un $B > 0$ tel que l'inégalité (7) entraîne (8).

D'autre part, de l'inégalité (16) et du fait que la fonction $H(t)$ est non négative il vient que

$$\int_{t_0}^{\infty} v_1^2(s)\,ds < +\infty,$$

ce qui n'est possible que si

$$\lim_{t\to+\infty} v_1(t) = 0 \tag{17}$$

puisque la dérivée $v_1'(t)$ est bornée en raison de la première des équations (15).

Mais, lorsque t tend vers l'infini, la fonction $H(t)$ tend vers une limite non négative $H(\infty)$. On a donc, tenant compte des équations (15) et de la définition de la fonction $H(t)$:

$$\lim_{t\to+\infty} v_1'(t) = \lim_{t\to+\infty} v_2(t) = \sqrt{H(\infty)} \tag{18}$$

d'où, en raison de (17), il vient que l'on doit avoir $H(\infty) = 0$. Enfin, de (17) et (18) il résulte que les fonctions $v_1(t)$ et $v_2(t)$ satisfont aux relations (9).

Nous avons ainsi démontré que le système (13) jouit de la propriété (M) dans l'ensemble K et, par suite, le théorème 3 résulte immédiatement du théorème 1.

Remarque. La démonstration du théorème 3 que nous venons d'exposer ici est non seulement plus simple que celle de G. Seifert, mais aussi elle nous permet de rejeter l'hypothèse, faite par lui, que la fonction $f(x)$ est de classe C^1. Par conséquent, la même hypothèse peut être omise partout où l'on emploie ce théorème (cf. p. ex. G. Seifert [9]).

8. Supposons maintenant que la fonction $p(t)$ soit périodique de période ω. Si les hypothèses du théorème 3 sont vérifiées, il existe dans l'ensemble K une solution périodique du système (13) ayant la même période. De la conclusion de ce théorème il résulte de plus que cette solution périodique est unique et asymptotiquement stable dans l'ensemble K.

9. De même qu'au n° 6 on peut appliquer aux considérations du n° 7 la remarque finale du n° 5. On obtient ainsi le corollaire suivant:

COROLLAIRE 2. *Si les hypothèses du théorème 3 sont satisfaites, toute solution* $(x(t), y(t))$ *du système* (13) *passant par un point intérieur de l'ensemble* K *est asymptotiquement stable au sens de Liapounoff.*

10. Posons

$$F(x) = \int_0^x f(u)\,du, \quad G(x) = \int_0^x g(u)\,du, \quad P(t) = \int_0^t p(u)\,du$$

et supposons que ces fonctions satisfassent aux conditions suivantes:

(19) $\qquad f(x) > 0$ pour tout x, $\quad \lim\limits_{|x|\to\infty} F(x)\operatorname{sgn} x = +\infty,$

(20) $\qquad x g(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$, $\quad \lim\limits_{|x|\to\infty} G(x) = +\infty,$

(21) $\qquad$ les fonctions $p(t)$ et $P(t)$ sont bornées pour tout t.

Dans ces hypothèses (cf. [6] ou [7], p. 508-518) il existe un ensemble K dans lequel le système (13) est relativement borné et, bien plus, pour toute solution $(x(t), y(t))$ de ce système il existe un t_0 tel que $(x(t_0), y(t_0)) \in K$. Pour tout point $(x, y) \in K$ on a les inégalités:

$$|x| \leqslant x_0, \quad |y - F(x)| \leqslant y_0,$$

x_0 et y_0 étant deux constantes positives. Du théorème 3 on peut donc déduire le théorème suivant:

THÉORÈME 4. *Si les fonctions* $g(x)$, $f(x)$ *et* $p(t)$ *satisfont aux conditions* (19)-(21) *et aux inégalités*

$$f(x) > 0, \quad y_0|g''(x)| < 2f(x)g'(x) \quad (-x_0 \leqslant x \leqslant x_0),$$

pour deux solutions arbitraires $x_1(t)$, $x_2(t)$ *de l'équation* (4) *on a*

$$\lim_{t\to+\infty} |x_1(t) - x_2(t)| = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} |x_1'(t) - x_2'(t)| = 0.$$

On obtient ainsi une généralisation d'un théorème de M. L. Cartwright et J. E. Littlewood (cf. [1], Théorème 2 et aussi [2], p. 271).

11. Considérons le système d'équations différentielles

(22) $\qquad x' = y, \quad y' = -F(y) - g(x) + p(t),$

équivalent à une seule équation différentielle du second ordre

$$x'' + F(x') + g(x) = p(t).$$

Pour le système (22) on peut démontrer un théorème analogue au théorème 3 (cf. aussi [4], théorème 4), ainsi qu'un corollaire analogue au corollaire 2.

THÉORÈME 5. *Soit* K *un ensemble plan dont la frontière est une courbe de classe* $\tilde{C}^1$ *et dans lequel le système* (22) *est relativement borné. Si les fonctions* $g''(x)$, $f(y) = F'(y)$ *et* $p(t)$ *sont continues et satisfont dans l'ensemble* K *aux inégalités*

$$g'(x) > 0, \quad f(y)g'(x) + g''(x)y > 0,$$

le système (22) *est asymptotiquement stable dans l'ensemble* K.

COROLLAIRE 3. *Si les hypothèses du théorème 5 sont vérifiées, toute solution* $(x(t), y(t))$ *du système* (22) *passant par un point intérieur de l'ensemble* K *est asymptotiquement stable au sens de Liapounoff.*

Pour la démonstration il suffit de remarquer que dans le cas envisagé le système (6) prend la forme suivante

$$v_1' = v_2, \quad v_2' = -f(y(t))v_2 - g'(x(t))v_1$$

et de répéter pour la fonction auxiliaire

$$H(t) = v_1^2(t) + v_2^2(t)/g'(x(t))$$

tous les raisonnements de la démonstration du théorème 3.

Travaux cités

[1] M. L. Cartwright and J. E. Littlewood, *On non-linear differential equations of the second order II*, Annals of Math. 48, N° 2 (1947), p. 472-494.

[2] S. Lefschetz, *Differential equations: geometric theory*, New York 1957.

[3] И. Г. Малкин *Теория устойчивости движения*, Москва-Ленинград 1952.

[4] Z. Opial, *Sur la stabilité des solutions périodiques et presque-périodiques de l'équetion différentielle* $x'' + F(x') + g(x) = p(t)$, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. des sci. math., phys et astr. 7 (1959), p. 493-498.

[5] — *Sur les solutions périodiques et presque-périodiques de l'équation différentielle* $x'' + kf(x)x' + g(x) = kp(t)$, ce volume, p. 309-319.

[6] G. E. H. Reuter, *A boundedness theorem for non-linear differential equations of the second order*, Proc. Cambr. Phil. Soc. 47 (1951), p. 49-54.

[7] G. Sansone, R. Conti, *Equazioni differenziali non lineari*, Roma 1956.

[8] G. Seifert, *On stability in the large for periodic solution of differential systems*, Annals of Math. 67, no 1 (1958), p. 83-89.

[9] — *The asymptotic behavior of pendulum-type equations*, Annals of Math. 69, N° 1 (1959), p. 75-87.

Reçu par la Rédaction le 5. 5. 1959