ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1960)

Propriétés des dérivées tangentielles d'une intégrale de l'équation elliptique

par W. Pogorzelski (Warszawa)

1. Introduction et formules principales. Dans ce travail nous étudierons quelques propriétés importantes de la fonction limite de la dérivée tangentielle d'une intégrale de surface

$$U(A) = \iint_S \Gamma(A, Q)\varphi(Q)\,dQ, \tag{1}$$

relativement à l'équation elliptique

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(A)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c(A)u = 0, \tag{2}$$

dite potentiel généralisé de simple couche(¹), Γ désignant la solution fondamentale de cette équation.

Nous admettons, de même que dans le travail [1], les hypothèses suivantes:

I. Les fonctions $a_{\alpha\beta}(A), b_\alpha(A), c(A)$ sont définies dans la région fermée

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega + S \tag{3}$$

et vérifient la condition de Hölder

$$|a_{\alpha\beta}(A) - a_{\alpha\beta}(A_1)| < \mathrm{const}\cdot r_{AA_1}^h, \quad |b_\alpha(A) - b_\alpha(A_1)| < \mathrm{const}\cdot r_{AA_1}^h, \tag{4}$$
$$|c(A) - c(A_1)| < \mathrm{const}\cdot r_{AA_1}^h,$$

où r_{AA_1} désigne la distance euclidienne des points A, A_1 et h est une constante positive non supérieure à l'unité; Ω désigne un domaine borné dans l'espace euclidien à n dimensions limité par la surface fermée S $(n > 2)$.

(¹) Nous conservons dans ce travail le symbole d'intégrale double pour l'intégrale de surface à $n-1$ dimensions et le symbole d'intégrale triple, pour l'intégrale de volume dans l'espace à n dimensions, dQ désigne l'élément d'aire au point $Q \in S$.

II. La surface fermée S vérifie les conditions connues de Liapounoff dont l'une, relative à l'angle $\Delta(P,Q)$ entre les normales aux points arbitraires P et Q, a la forme

(5) $$\Delta(P,Q) < \text{const}\cdot r_{PQ}^{\varkappa} \quad (0 < \varkappa \leqslant 1).$$

III. La forme quadratique

(6) $$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A) X_\alpha X_\beta$$

est définie-positive dans la région (3).

Nous rappelons (voir le travail [1]) que la solution fondamentale $\Gamma(A,B)$ de l'équation (2) est donnée par les formules suivantes:

(7) $$\Gamma(A,B) = w^B(A,B) + \overline{w}(A,B) + \sum_{\nu} \alpha_\nu(A)\beta_\nu(B),$$

(7′) $$w^M(A,B) = [\vartheta^M(A,B)]^{-n/2+1},$$

(7″) $$\vartheta^M(A,B) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}(M)(x_\alpha-\xi_\alpha)(x_\beta-\xi_\beta),$$

(7‴) $$\overline{w}(A,B) = \iiint\limits_{\Omega'(M)} w^M(A,M)\Phi(M,B)\,dM,$$

où $A(x_1,\ldots,x_n)$ et $B(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ sont deux points arbitraires distincts du domaine mesurable fermé $\Omega' \supset \Omega+S$; la fonction $\Phi(M,B)$ est la solution d'une équation intégrale de Fredholm (voir [1], p. 259); $a^{\alpha\beta}(M)$ désignent les éléments de la matrice inverse de la matrice $[a_{\alpha\beta}(M)]$ au point arbitraire $M \in \Omega'$. On a introduit les fonctions régulières $\alpha_\nu(A)$, $\beta_\nu(B)$ dans la formule (7) pour assurer l'existence de la solution d'une équation de Fredholm pour la fonction Φ dans le cas singulier de la valeur propre du noyau correspondant. Dans les considérations ultérieures nous supprimons le troisième terme de la somme (7), puisque son influence sur les propriétés de l'intégrale (1) est évidente a priori.

D'après l'hypothèse relative à la forme quadratique (6), il existe deux constantes positives g et G telles que l'on ait les inégalités

(8) $$g r_{AB}^2 \leqslant \vartheta^M(A,B) \leqslant G r_{AB}^2$$

quels que soient les points A, B, M dans le domaine borné et fermé Ω'.

D'après le travail [1] les fonctions $w^M(A,B)$, $\overline{w}(A,B)$, $\Phi(A,B)$ admettent les limitations suivantes:

(9) $$|w^M(A,B)| < \frac{\text{const}}{r_{AB}^{n-2}}, \quad |\overline{w}(A,B)| < \frac{\text{const}}{r_{AB}^{n-2-h}}, \quad |\Phi(A,B)| < \frac{\text{const}}{r_{AB}^{n-h}}$$

pour tout couple A, B de points distincts du domaine Ω'.

2. Existence de la limite de la dérivée tangentielle. D'après la formule (7), en supprimant le dernier membre, nous pouvons écrire l'intégrale étudiée (1) sous la forme d'une somme de deux intégrales

$$U(A) = V(A) + \overline{V}(A),$$

où l'on a posé

(10) $$V(A) = \iint\limits_{S(Q)} w^Q(A,Q)\varphi(Q)\,dQ,$$

(10′) $$\overline{V}(A) = \iint\limits_{S(Q)} \overline{w}(A,Q)\varphi(Q)\,dQ,$$

$\varphi(Q)$ étant une fonction définie, bornée et intégrable sur la surface S; elle est dite densité de la couche.

Les fonctions (10) et (10′) ont des dérivées spatiales déterminées par les intégrales régulières

(11) $$V_{x_\alpha}(A) = \iint\limits_{S(Q)} w^Q_{x_\alpha}(A,Q)\varphi(Q)\,dQ \quad (\alpha = 1,2,\ldots,n),$$

(11′) $$\overline{V}_{x_\alpha}(A) = \iint\limits_{S(Q)} \overline{w}_{x_\alpha}(A,Q)\varphi(Q)\,dQ \quad (\alpha = 1,2,\ldots,n)$$

en tout point intérieur $A \in \Omega$. Les dérivées des fonctions (7′) et (7‴) admettent les limitations suivantes:

(12) $$|w^M_{x_\alpha}(A,Q)| < \frac{\text{const}}{r_{AQ}^{n-1}},$$

(12′) $$|\overline{w}_{x_\alpha}(A,Q)| < \frac{\text{const}}{r_{AQ}^{n-1-h}}.$$

En tenant compte de la limitation (12′) qui possède une singularité faible relativement à la surface S, nous pouvons affirmer que la dérivée (11′) tend uniformément vers une limite déterminée par l'intégrale absolument convergente

(13) $$\lim_{A\to P} \overline{V}_{x_\alpha}(A) = \iint\limits_{S(Q)} \overline{w}_{x_\alpha}(P,Q)\varphi(Q)\,dQ,$$

si le point $A \in \Omega$ tend d'une façon arbitraire vers un point arbitraire $P \in S$.

Les dérivées w_{x_α} admettent une limitation (12) à forte singularité relativement à l'intégrale de surface. Nous ne pouvons donc pas affirmer a priori l'existence de la limite de la dérivée (11), si $A \to P$, même si la densité φ était continue. On démontre (voir la monographie [2], p. 108, ou le travail [3], p. 68) qu'une certaine combinaison des dérivées premières du quasi-potentiel (11), dite dérivée transversale, tend vers une limite déterminée, si $A \to P \in S$, sous la seule hypothèse que la fonction φ soit continue.

L'étude de l'existence de la limite de la dérivée de l'intégrale (1) dans la direction d'une tangente à la surface S exige des considérations plus délicates et d'une hypothèse plus restrictive sur la densité φ.

Le théorème 1 exprime l'existence de cette limite. Le théorème 2 exprime que la fonction limite vérifie une condition de Hölder.

Soit un système d'axes rectangulaires $Px_1x_2\ldots x_n$ dont l'origine P est un point arbitraire de la surface S et l'axe Px_n est la normale intérieure à la surface S; les axes $Px_1, \ldots, Px_{n-1}$ sont alors situés dans le plan tangent à la surface S.

Théorème 1. *Si la densité $\varphi(Q)$ vérifie la condition de Hölder*

$$(14)\qquad |\varphi(Q)-\varphi(Q_1)| < k_\varphi r_{QQ_1}^{h_\varphi} \quad (0 < h_\varphi \leqslant 1,\ k_\varphi > 0),$$

la dérivée du potentiel de simple couche (1) au point intérieur $A \in \Omega$ dans la direction d'une tangente arbitraire Px_1 au point $P \in S$ tend uniformément vers la limite

$$(15)\qquad \lim_{A\to P} U_{x_1}(A) = \iint_{S(Q)} \Gamma_{x_1}(P,Q)\varphi(Q)\,dQ$$

si le point A tend d'une façon arbitraire vers le point $P \in S$. L'intégrale (15) a le sens d'une intégrale singulière de Cauchy, c'est-à-dire elle est égale à la limite suivante:

$$(16)\qquad \iint_S \Gamma_{x_1}(P,Q)\varphi(Q)\,dQ = \lim_{r_\Pi\to 0} \iint_{S-S_\Pi} \Gamma_{x_1}(P,Q)\varphi(Q)\,dQ,$$

où S_Π est une portion de la surface S située au voisinage du point P à l'intérieur d'un cylindre Π d'axe Px_n et de rayon r_Π. Signalons que l'intégrale singulière (15) n'est pas absolument convergente.

Démonstration. La valeur limite (13) étant déterminée, il suffit d'étudier la dérivée du quasi-potentiel

$$(17)\qquad V_{x_1}(A) = \iint_S w_{x_1}^Q(A,Q)\varphi(Q)\,dQ$$

si $A \to P \in S$. Supposons d'abord que le point intérieur $A \in \Omega$ soit situé sur la normale Px_n à la surface S au point P arbitrairement choisi.

Soit un cylindre W, ayant pour axe la normale Px_n, de rayon δ' fixé indépendamment du point P, qui découpe sur la surface S au voisinage du point P une portion S_W dont la projection sur le plan tangent en P est une hypersphère S'_W à $n-2$ dimensions. D'après les conditions de Liapounoff, nous pouvons toujours fixer le rayon δ' suffisamment petit, pour que les points de la projection S'_W correspondent d'une façon biunivoque aux points de la portion S_W. Décomposons l'intégrale (17) en deux parties

$$(18)\qquad V_{x_1}(A) = V_{x_1}^{S_W}(A) + V_{x_1}^{S-S_W}(A)$$

étendues à la portion S_W et à la surface extérieure $S-S_W$. Le point P étant extérieur au domaine d'intégration $S-S_W$, le second terme de la somme (18) est continu au point P et nous aurons évidemment

$$(19)\qquad \lim_{A\to P} V_{x_1}^{S-S_W}(A) = V_{x_1}^{S-S_W}(P) = \iint_{S-S_W} w_{x_1}^Q(P,Q)\varphi(Q)\,dQ.$$

Pour étudier la première des intégrales (18), nous l'écrivons de la façon suivante

$$(20)\qquad V_{x_1}^{S_W}(A) = \iint_{S_W} w_{x_1}^Q(A,Q)[\varphi(Q)-\varphi(P)]\,dQ + \varphi(P)\iint_{S_W} w_{x_1}^Q(A,Q)\,dQ.$$

D'après l'inégalité de Hölder (14), admise pour la fonction $\varphi(P)$, la fonction sous le signe de la première intégrale vérifie l'inégalité

$$(21)\qquad |w_{x_1}^Q(A,Q)[\varphi(Q)-\varphi(P)]| < \frac{\mathrm{const}\cdot r_{PQ}^{h_\varphi}}{r_{AQ}^{n-1}}$$

donc, d'après un raisonnement classique, la première des intégrales (20), $J_1(A)$ tend uniformément vers la limite

$$(22)\qquad \lim_{A\to P} J_1(A) = J_1(P) = \iint_{S_W} w_{x_1}^Q(P,Q)[\varphi(Q)-\varphi(P)]\,dQ$$

qui est une intégrale à singularité faible, donc absolument convergente.

Pour étudier la seconde des intégrales (20), soit

$$(23)\qquad J_2(A) = \varphi(P)\iint_{S_W} w_{x_1}^Q(A,Q)\,dQ,$$

considérons l'intégrale auxiliaire

$$(24)\qquad X(A) = \varphi(P)\iint_{S'_W} w_{x_1}^P(A,Q')\,dQ'$$

étendue à la projection S'_W de la portion S_W sur le plan tangent en P; dQ' désigne l'élément d'aire de la surface S'_W au point Q' — projection du point Q. Les coefficients de la forme quadratique (7″) dans la formule (24) étant fixés au point P, nous aurons l'égalité des dérivées

$$(25)\qquad w_{x_1}^P(A,Q') = -w_{\xi_1}^P(A,Q'),$$

$(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0)$ étant les coordonnées du point Q'.

En appliquant le théorème de Green, nous pouvons donc écrire l'intégrale (24) sous la forme d'une intégrale

$$(26)\qquad X(A) = -\varphi(P)\int_{C'_W} w^P(A, Q')\cos\nu_1\, dl'_{Q'}$$

étendue à la frontière C'_W à $n-2$ dimensions du domaine S'_W; ν_1 — désigne l'angle que fait la normale extérieure à la surface C'_W au point Q' avec l'axe Px_1 et $dl'_{Q'}$ — l'élément d'aire de la surface C'_W au point Q'. Le point P étant extérieur au domaine d'intégration C'_W, il est évident que la fonction (26) tend vers une limite déterminée

$$(27)\qquad \lim_{A\to P} X(A) = -\varphi(P)\int_{C'_W} w^P(P, Q')\cos\nu_1\, dl'_{Q'}$$

si $A\to P$. Mais, d'après la symétrie centrale de la fonction

$$(28)\qquad w^P(P, Q') = \Big[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}(P)\,\xi_\alpha\xi_\beta\Big]^{-n/2+1},$$

l'intégrale (27) est nulle, donc

$$\lim_{A\to P} X(A) = 0.$$

La limite (27) est en même temps la valeur principale d'une intégrale au sens de Cauchy; nous avons en effet

$$\iint_{S'_W - S'_\Pi} w^P_{x_1}(P, Q')\varphi(P)\,dQ'$$
$$= (n-2)\varphi(P)\iint_{S'_W - S'_\Pi}\Big[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} a^{\alpha\beta}(P)\,\xi_\alpha\xi_\beta\Big]^{-n/2}\sum_{\beta=1}^{n-1} a^{1\beta}(P)\,\xi_\beta\, dQ' = 0$$

où S'_Π est la section par le plan tangent $x_n = 0$ du cylindre Π d'axe Px_n et de rayon r_π. Il en résulte

$$(29)\qquad \lim_{A\to P} X(A) = \lim_{r_\Pi\to 0}\iint_{S'_W - S'_\Pi} w^P_{x_1}(P, Q')\varphi(P)\,dQ'.$$

Les propriétés de l'intégrale (24) étant étudiées, considérons la différence entre les intégrales (23) et (24):

$$(30)\qquad R(A) = J_2(A) - X(A) = \varphi(P)\iint_{S_W}[w^Q_{x_1}(A, Q) - w^P_{x_1}(A, Q')\gamma(Q)]\,dQ$$

où $\gamma(Q)$ désigne la valeur absolue du cosinus de l'angle que fait la normale à la surface S au point Q avec l'axe Px_n. Nous montrerons que la soustraction (30) affaiblit la singularité de la fonction sous le signe d'intégrale.

Remarquons en effet que, d'après l'inégalité de Liapounoff (5), on a

$$(31)\qquad 1-\gamma(Q) \leqslant \mathrm{const}\cdot r_{PQ}^{2\varkappa}.$$

Ensuite, en s'appuyant sur les formules

$$(32)\qquad \begin{aligned} w^Q_{x_1}(A, Q) &= (2-n)[\vartheta^Q(A, Q)]^{-n/2}\Big[a^{1n}(Q)(x_n-\xi_n) - \sum_{\beta=1}^{n-1} a^{1\beta}(Q)\,\xi_\beta\Big],\\ w^P_{x_1}(A, Q') &= (2-n)[\vartheta^P(A, Q')]^{-n/2}\Big[a^{1n}(P)x_n - \sum_{\beta=1}^{n-1} a^{1\beta}(P)\,\xi_\beta\Big] \end{aligned}$$

nous aurons

$$(33)\qquad \begin{aligned} &|w^Q_{x_1}(A, Q) - w^P_{x_1}(A, Q')|\\ &< (2-n)|[\vartheta^Q(A, Q)]^{-n/2} - [\vartheta^Q(A, Q')]^{-n/2}|M_a[r_{AQ'} + (n-1)r_{PQ'}] +\\ &\quad + (2-n)g^{-n/2}r_{AQ'}^{-n}[k_a r_{PQ}^h r_{AQ'} + M_a|\xi_n| + (n-1)k_a r_{PQ}^{h+1}], \end{aligned}$$

où M_a désigne la borne supérieure de l'ensemble de fonctions $a^{\alpha\beta}(A)$ et k_a — leur coefficient de Hölder. Remarquons encore (voir [2], p. 73) qu'il existe une constante positive χ, inférieure à l'unité, telle que

$$(34)\qquad \chi \leqslant r_{AQ}/r_{AQ'} \leqslant 1/\chi$$

pour tout point Q de la portion S_W. Nous aurons ensuite l'inégalité

$$(35)\qquad \begin{aligned} &|[\vartheta^Q(A, Q)]^{-n/2} - [\vartheta^P(A, Q')]^{-n/2}|\\ &\qquad < \tfrac{1}{2}ng^{-n/2-1}(\chi r_{AQ})^{-n-2}[k_a r_{PQ}^h n^2 r_{AQ}^2 + 2nM_a r_{QQ'}(r_{AQ} + r_{AQ'})]. \end{aligned}$$

En tenant compte des inégalités (31), (33) et (35), nous arrivons à l'inégalité

$$(36)\qquad |w^Q_{x_1}(A, Q) - w^P_{x_1}(A, Q')\gamma(Q)| < \frac{\mathrm{const}\cdot r_{PQ}^{\varkappa_1}}{r_{AQ'}^{n-1}}$$

vraie si $Q\in S_W$ et si le point A est situé sur la normale Px_n; on a posé $\varkappa_1 = \min(h, 2\varkappa)$.

La différence (36) admet une limitation à faible singularité, si $A = P$, donc l'intégrale (30) tend vers une limite déterminée des deux façons suivantes:

$$(37)\qquad \begin{aligned} &\lim_{A\to P} R(A) = \lim_{A\to P} J_2(A)\\ &= \varphi(P)\iint_{S_W}[w^Q_{x_1}(P, Q) - w^P_{x_1}(P, Q')\gamma(Q)]\,dQ = \varphi(P)\iint_{S_W} w^Q_{x_1}(P, Q)\,dQ. \end{aligned}$$

Signalons que la première intégrale d'une fonction à faible singularité est absolument convergente, mais la seconde, relative à une fonction à forte singularité, a le sens de Cauchy et n'est pas absolument convergente.

L'existence des limites (19), (22) et (37) confirme la conclusion (15) du théorème 1, si le point A tend vers le point P suivant la normale.

Remarquons que les passages à la limite précédent sont uniformes, c'est-à-dire que leur estimation est indépendante du point P sur la surface S. Il en résulte que la propriété limite (15) est aussi vraie, si le point intérieur A tend vers le point P d'une façon quelconque.

3. Propriété de la fonction limite. Soit maintenant un champ de directions des tangentes $\{s_P\}$ sur la surface S, qui fait correspondre à tout point $P \in S$ une direction déterminée s_P de la tangente en ce point. Soient ensuite deux points arbitraires P et P_1 de la surface S et deux systèmes d'axes rectangulaires $Px_1 \ldots x_n$ et $P_1x_1' \ldots x_n'$ dont les axes Px_n, P_1x_n' sont les normales intérieures à la surface S. Nous admettons que les axes Px_1 et P_1x_1' coïncident avec les tangentes s_P et s_{P_1} du champ donné $\{s_P\}$. Nous démontrerons le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Si la densité $\varphi(Q)$ vérifie la condition de Hölder*

$$|\varphi(Q)-\varphi(Q_1)| < k_\varphi r_{QQ_1}^{h_\varphi} \quad (0 < h_\varphi < 1) \tag{38}$$

et les angles (s_P, s_{P_1}) entre les tangentes du champ donné aux points P et P_1 de la surface S vérifient l'inégalité

$$(s_P, s_{P_1}) < c_1 r_{PP_1}^{h_s} \quad (c_1 > 0,\ 0 < h_s \leqslant 1), \tag{39}$$

les valeurs limites des dérivées tangentielles du potentiel de simple couche (1)

$$J(P) = \iint_S \Gamma_{x_1}(P, Q)\varphi(Q)\,dQ, \qquad J(P_1) = \iint_S \Gamma_{x'_1}(P_1, Q)\varphi(Q)\,dQ \tag{40}$$

dans les directions des tangentes s_P et s_{P_1} du champ donné aux points arbitraires P et P_1 de la surface S vérifient l'inégalité de Hölder de la forme

$$|J(P)-J(P_1)| < (C_1M_\varphi + C_2k_\varphi) r_{PP_1}^{h'_\varphi}, \tag{41}$$

où $M_\varphi = \sup|\varphi(P)|$, C_1 et C_2 sont des constantes positives indépendantes de la fonction φ et h'_φ désigne le plus petit des nombres suivants:

$$h'_\varphi = \min(h_\varphi, \Theta h_s, h, \varkappa), \tag{42}$$

Θ étant un nombre positif arbitraire, inférieur à l'unité.

Démonstration. Il suffit d'étudier le cas

$$r_{PP_1} < \tfrac{1}{4}\delta', \tag{43}$$

où $\delta' < \delta$ désigne le rayon constant du cylindre W d'axe Px_n, considéré dans le théorème précédent.

Décomposons les intégrales (40) en sommes d'intégrales

$$J(P) = J^{S_L}(P) + J^{S-S_L}(P), \qquad J(P_1) = J^{S_L}(P_1) + J^{S-S_L}(P_1) \tag{44}$$

étendues aux surfaces S_L et $S-S_L$, où S_L désigne la portion de la surface S découpée par la sphère de centre P et de rayon δ et vérifiant la condition de Liapounoff. La sphère de centre P et de rayon $\delta'/2$ étant extérieure au domaine $S-S_L$, la fonction $J^{S-S_L}(P)$ admet des dérivées par rapport aux coordonnées du point P_1, bornées dans cette sphère. Nous avons donc l'inégalité

$$|J^{S-S_L}(P) - J^{S-S_L}(P_1)| < \mathrm{const}\cdot M_\varphi \cdot r_{PP_1}^{h_s}. \tag{45}$$

Nous passons à l'étude de la différence des intégrales (44) étendues à la portion S_L. D'après la formule (7), nous posons

$$J^{S_L}(P) = J^*(P) + \bar{J}(P) \tag{46}$$

où

$$J^*(P) = \iint_{S_L} w_{x_1}^Q(P, Q)\varphi(Q)\,dQ, \qquad \bar{J}(P) = \iint_{S_L} \overline{w}_{x_1}(P, Q)\varphi(Q)\,dQ. \tag{46'}$$

les formules sont analogues pour le point P_1. Nous écrivons maintenant

$$J^*(P) = \iint_{S_L} w_{x_1}^Q(P, Q)[\varphi(Q)-\varphi(P)]\,dQ + \varphi(P)\iint_{S_L} w_{x_1}^Q(P, Q)\,dQ, \tag{47}$$

$$J^*(P_1) = \iint_{S_L} w_{x'_1}^Q(P_1, Q)[\varphi(Q)-\varphi(P_1)]\,dQ + \varphi(P_1)\iint_{S_L} w_{x'_1}^Q(P_1, Q)\,dQ. \tag{48}$$

Étudions d'abord la différence des premières intégrales, absolument convergentes, dans les formules (47) et (48)

$$\begin{aligned} J_1^*(P) &= \iint_{S_L} w_{x_1}^Q(P, Q)[\varphi(Q)-\varphi(P)]\,dQ, \\ J_1^*(P_1) &= \iint_{S_L} w_{x'_1}^Q(P_1, Q)[\varphi(Q)-\varphi(P_1)]\,dQ. \end{aligned} \tag{49}$$

Considérons une sphère Π de centre P et de rayon $r_\Pi = 2r_{PP_1}$, qui découpe une portion S_Π de la surface S_L. Décomposons les intégrales (49) en sommes

$$J_1^*(P) = J_1^{*S_\Pi}(P) + J_1^{*S_L-S_\Pi}(P), \qquad J_1^*(P_1) = J_1^{*S_\Pi}(P_1) + J_1^{*S_L-S_\Pi}(P_1) \tag{50}$$

d'intégrales étendues aux surfaces S_Π et S_L-S_Π.

D'après l'inégalité de Hölder (38), on a

$$(51)\qquad |J_1^{*S_\Pi}(P)| \leqslant (2-n)\,k_\varphi \iint\limits_{S_\Pi} r_{PQ}^{h_\varphi}[\vartheta^Q(P,Q)]^{-n/2}\Big|\sum_{\beta=1}^{n} a^{1\beta}(Q)(x_\beta-\xi_\beta)\Big|\,dQ$$

$$< (2-n)\,k_\varphi g^{-n/2} M_a \iint\limits_{S_\Pi} \frac{dQ}{r_{PQ}^{n-1-h_\varphi}} < \mathrm{const}\cdot k_\varphi\cdot r_{PP_1}^{h_\varphi}$$

et une inégalité analogue pour l'intégrale $J_1^{*S_\Pi}(P_1)$.

Étudions maintenant la diféfrence des secondes intégrales dans les formules (50), que nous écrivons de la façon suivante:

$$(52)\qquad J_1^{*S_L-S_\Pi}(P)-J_1^{*S_L-S_\Pi}(P_1) = [\varphi(P_1)-\varphi(P)]\iint\limits_{S_L-S_\Pi} w_{x_1}^Q(P,Q)\,dQ+$$

$$+\iint\limits_{S_L-S_\Pi}[w_{x_1}^Q(P,Q)-w_{x_1'}^Q(P_1,Q)][\varphi(Q)-\varphi(P_1)]\,dQ$$

d'où

$$(53)\qquad |J_1^{*S_L-S_\Pi}(P)-J_1^{*S_L-S_\Pi}(P_1)|$$

$$< k_\varphi r_{PP_1}^{h_\varphi}\Big|\iint\limits_{S_L-S_\Pi} w_{x_1}^Q(P,Q)\,dQ\Big| + k_\varphi \iint\limits_{S_L-S_\Pi}|w_{x_1}^Q(P,Q)-w_{x_1'}^Q(P_1,Q)|\,r_{P_1Q}^{h_\varphi}\,dQ.$$

La première intégrale, d'après ce qui précède (voir (37)), est bornée si $r_{PP_1}\to 0$. Pour étudier la seconde, remarquons qu'on a

$$(54)\qquad w_{x_1'}^Q(P_1,Q) = \sum_{\alpha=1}^{n} w_{\bar{x}_\alpha}^Q(P_1,Q)\cos(x_\alpha,x_1')$$

et les formules

$$(55)\qquad \begin{aligned} w_{x_1}^Q(P,Q) &= (2-n)[\vartheta^Q(P,Q)]^{-n/2}\sum_{\beta=1}^{n} a^{1\beta}(Q)(x_\beta-\xi_\beta),\\ w_{\bar{x}_\alpha}^Q(P_1,Q) &= (2-n)[\vartheta^Q(P_1,Q)]^{-n/2}\sum_{\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}(Q)(\bar{x}_\beta-\xi_\beta),\end{aligned}$$

$\bar{x}_\alpha$ désignant les coordonnées du point P_1 par rapport au système d'axes $Px_1\ldots x_n$. Remarquons ensuite qu'on a les inégalités

$$(56)\qquad 1-\cos(x_1,x_1') \leqslant \tfrac{1}{2}c_1^2 r_{PP_1}^{2h_s},\qquad |\cos(x_\alpha,x_1')| \leqslant c_1 r_{PP_1}^{h_s}\qquad (\alpha = 2,3,\ldots,n)$$

résultant de l'inégalité admise (39) et de l'égalité

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\cos^2(x_\alpha,x_1') = 1.$$

Nous en tirons, pour $Q\in S_L-S_\Pi$, l'inégalité suivante:

$$(57)\qquad |w_{x_1}^Q(P,Q)-w_{x_1'}^Q(P_1,Q)| < (2-n)[\vartheta^Q(P,Q)]_{-n/2}\,nM_a r_{PP_1}+$$

$$+\tfrac{1}{2}n^3(2-n)[\vartheta^Q(P^*,Q)]_{-n/2-1}M_a^2 r_{P^*Q}r_{P_1Q}r_{PP_1}+$$

$$+(2-n)[\vartheta^Q(P_1,Q)]_{-n/2}\,nM_a r_{P_1Q}(\tfrac{1}{2}c_1 r_{PP_1}^{h_s}+1)c_1 r_{PP_1}^{h_s}$$

où P^* désigne un point à l'intérieur du segment PP_1, donc vérifiant les inégalités

$$(58)\qquad \tfrac{1}{2}\leqslant r_{P^*Q}/r_{PQ}\leqslant \tfrac{3}{2},$$

si $Q\in S_L-S_\Pi$. En s'appuyant sur les inégalités (57) et (58), nous obtenons pour la dernière intégrale (53) la limitation suivante:

$$(59)\qquad k_\varphi\iint\limits_{S_L-S_\Pi}|w_{x_1}^Q(P,Q)-w_{x_1'}^Q(P_1,Q)|\,r_{P_1Q}^{h_\varphi}\,dQ$$

$$< k_\varphi r_{PP_1}\iint\limits_{S_L-S_\Pi} r_{PQ}^{-n+h_\varphi}\,dQ+\mathrm{const}\cdot k_\varphi r_{PP_1}^{h_s}\iint\limits_{S_L-S_\Pi} r_{PQ}^{-n+1}\,dQ < \mathrm{const}\cdot k_\varphi\cdot r_{PP_1}^{h_\varphi^*}$$

où $h_\varphi^* = \min(h_\varphi,\Theta h_s)$, Θ étant un nombre positif arbitraire inférieur à l'unité, le coefficient const étant indépendant de la fonction φ. En réunissant les inégalités (51), (53) et (59), nous aurons

$$(60)\qquad |J_1^*(P)-J_1^*(P_1)| < \mathrm{const}\cdot k_\varphi r_{PP_1}^{h_\varphi^*}.$$

Nous passons maintenant à l'étude de la différence des seconds termes des sommes (47) et (48) que nous écrivons, d'après la formule (37), de la façon suivante:

$$(61)\qquad \begin{aligned} J_2^*(P) &= \varphi(P)\iint\limits_{S_L} w_{x_1}^Q(P,Q)\,dQ\\ &= \varphi(P)\iint\limits_{S_L-S_W} w_{x_1}^Q(P,Q)\,dQ+\varphi(P)\iint\limits_{S_W} w_{x_1}^*(P,Q)\,dQ,\\ J_2^*(P_1) &= \varphi(P_1)\iint\limits_{S_L} w_{x_1'}^Q(P_1,Q)\,dQ\\ &= \varphi(P_1)\iint\limits_{S_L-S_{W_1}} w_{x_1'}^Q(P_1,Q)\,dQ+\varphi(P_1)\iint\limits_{S_{W1}} w_{x_1'}^*(P_1,Q)\,dQ\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$(62)\qquad \begin{aligned} w_{x_1}^*(P,Q) &= w_{x_1}^Q(P,Q)-w_{x_1}^P(P,Q')\gamma(Q),\\ w_{x_1'}^*(P_1,Q) &= w_{x_1'}^Q(P_1,Q)-w_{x_1'}^{P_1}(P_1,Q_1')\gamma'(Q).\end{aligned}$$

W_1 désigne un cylindre de rayon δ', d'axe P_1x_n' qui découpe une portion S_{W_1} de la surface S au voisinage du point P_1'; Q_1' désigne la projection du point Q sur le plan tangent en P_1; $\gamma'(Q)$ désigne le cosinus de l'angle entre les normales aux points P_1 et Q. D'après l'inégalité (36), les fonctions (62) admettent des singularités faibles et les intégrales étendues aux surfaces S_W et S_{W_1} sont absolument convergentes.

Les points P et P_1 étant extérieurs aux domaines d'intégration $S_L - S_W$ et $S_L - S_{W_1}$, la différence des premières intégrales dans les seconds membres des formules (61) vérifie, d'après (57), l'inégalité de Hölder de la forme

$$(63)\quad \Big|\varphi(P)\iint\limits_{S_L-S_W} w_{x_1}^{Q}(P,Q)\,dQ - \varphi(P_1)\iint\limits_{S_L-S_{W_1}} w_{x_1'}^{Q}(P_1,Q)\,dQ\Big| < (AM_\varphi + Bk_\varphi) r_{PP_1}^{h_\varphi^0} \quad (h_\varphi^0 = \min(h_\varphi, h_s)).$$

A et B sont des constantes positives indépendantes de la fonction φ.

Pour étudier la différence des seconds termes dans les formules (61), que nous désignerons resp. par I_P et I_{P_1}, nous les décomposons en sommes d'intégrales

$$(64)\qquad I_P = I_P^{S_\Pi} + I_P^{S_W - S_\Pi}, \qquad I_{P_1} = I_{P_1}^{S_\Pi} + I_{P_1}^{S_{W_1} - S_\Pi}$$

étendues à la surface S_Π située à l'intérieur de la sphère Π (de centre P et de rayon $2r_{PP_1}$) et aux surfaces extérieures $S_W - S_\Pi$ et $S_{W_1} - S_\Pi$.

Nous remarquons que, d'après la supposition (43), la surface S_Π fait partie simultanément des surfaces S_W et S_{W_1}.

En tenant compte de la limitation (36), nous pouvons affirmer que les intégrales étendues à la surface S_Π vérifient les inégalités

$$(65)\qquad \begin{aligned} |I_P^{S_\Pi}| &< \mathrm{const}\cdot M_\varphi \iint\limits_{S_\Pi} \frac{dQ}{r_{PQ}^{n-1-\varkappa_1}} < \mathrm{const}\cdot M_\varphi \cdot r_{PP_1}^{\varkappa_1}, \\ |I_{P_1}^{S_\Pi}| &< \mathrm{const}\cdot M_\varphi \cdot r_{PP_1}^{\varkappa_1} \qquad (\varkappa_1 = \min(h, 2\varkappa)). \end{aligned}$$

Pour l'étude de la différence des seconds termes (64), écrivons

$$(66)\quad I_P^{S_W - S_\Pi} - I_{P_1}^{S_{W_1} - S_\Pi} = [\varphi(P) - \varphi(P_1)] \iint\limits_{S_W - S_\Pi} w_{x_1}^{*}(P,Q)\,dQ + $$
$$+\varphi(P_1)\iint\limits_{S_{WW_1}} (1\pm) w_{x_1'}^{*}(P_1,Q)\,dQ + \varphi(P_1)\iint\limits_{S_W - S_\Pi} [w_{x_1}^{*}(P,Q) - w_{x_1'}^{*}(P_1,Q)]\,dQ$$

où S_{WW_1} désigne l'ensemble de tous les points des surfaces S_W ou S_{W_1}, qui n'appartiennent pas simultanément à ces deux surfaces. La première des intégrales (66) vérifie l'inégalité

$$(67)\quad \Big|[\varphi(P) - \varphi(P_1)]\iint\limits_{S_W - S_\Pi} w_{x_1}^{*}(P,Q)\,dQ\Big| < \mathrm{const}\cdot k_\varphi \cdot r_{PP_1}^{h_\varphi} \iint\limits_{S_W - S_\Pi} \frac{dQ}{r_{PQ}^{n-1-\varkappa_1}} < \mathrm{const}\cdot k_\varphi \cdot r_{PP_1}^{h_\varphi}.$$

La seconde est de l'ordre de l'aire de la surface S_{WW_1}, donc elle vérifie l'inégalité

$$(68)\qquad \Big|\varphi(P_1)\iint\limits_{S_{WW_1}} (\pm 1) w_{x_1'}^{*}(P_1,Q)\,dQ\Big| < \mathrm{const}\cdot M_\varphi \cdot r_{PP_1}.$$

Il reste à étudier la troisième, la plus difficile des intégrales (66), que nous désignerons par

$$(69)\qquad Y(P,P_1) = \varphi(P_1)\iint\limits_{S_W - S_\Pi} [w_{x_1}^{*}(P,Q) - w_{x_1'}^{*}(P_1,Q)]\,dQ.$$

Nous décomposons cette intégrale en somme des trois intégrales suivantes:

$$(70)\quad Y(P,P_1) = \varphi(P_1)\iint\limits_{S_W - S_\Pi} \{[w_{x_1}^{Q}(P,Q) - w_{x_1}^{P}(P,Q')\gamma(Q)] -$$
$$-[w_{\bar{x}_1}^{Q}(P_1,Q) - w_{\bar{x}_1}^{P}(P_1,Q')\gamma(Q)]\}\,dQ -$$
$$-\varphi(P_1)\iint\limits_{S_W - S_\Pi} \sum_{\alpha=1}^{n} [w_{\bar{x}_\alpha}^{Q}(P_1,Q) - w_{\bar{x}_\alpha}^{P}(P_1,Q')\gamma(Q)][\cos(x_\alpha, x_1') - \delta_\alpha^1]\,dQ +$$
$$+\varphi(P_1)\iint\limits_{S_W - S_\Pi} \sum_{\alpha=1}^{n} [w_{\bar{x}_\alpha}^{P_1}(P_1,Q_1')\gamma'(Q) - w_{\bar{x}_\alpha}^{P}(P_1,Q')\gamma(Q)]\cos(x_\alpha, x_1')\,dQ$$

où δ_α^1 désigne le symbole de Kronecker.

Désignons les intégrales (70) successivement par

$$Y_1(P,P_1), \quad -Y_2(P,P_1), \quad Y_3(P,P_1).$$

Pour limiter la première intégrale, remarquons que la fonction

$$w_{\bar{x}_1}^{Q}(P_1,Q) - w_{\bar{x}_1}^{P}(P_1,Q')\gamma(Q)$$

admet des dérivées par rapport aux coordonnées du point $P_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ au voisinage du point fixé P. Donc, d'après le théorème des accroissements, l'intégrale $Y_1(P,P_1)$ peut être exprimée de la façon suivante:

$$(71)\quad Y_1(P,P_1) = \varphi(P_1)(2-n)n\sum_{\alpha=1}^{n}(\bar{x}_\alpha - x_\alpha)\iint\limits_{S_W - S_\Pi}\Big\{[\vartheta^Q(P^*,Q)]^{-n/2-1}\times$$
$$\times\Big[\sum_{\beta=1}^{n} a^{1\beta}(Q)(x_\beta^* - \xi_\beta)\sum_{\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}(Q)(x_\beta^* - \xi_\beta) + \vartheta^Q(P^*,Q)\,a^{1\alpha}(Q)\Big] -$$
$$-\gamma(Q)[\vartheta^P(P^*,Q)]^{-n/2-1}\Big[\sum_{\beta=1}^{n} a^{1\beta}(P)(x_\beta^* - \xi_\beta^0)\sum_{\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}(P)(x_\beta^* - \xi_\beta^0) +$$
$$+\vartheta^P(P^*,Q')\,a^{1\alpha}(P)\Big]\Big\}\,dQ,$$

où l'on a posé

$$\xi_1^0 = \xi_1, \quad \ldots, \quad \xi_{n-1}^0 = \xi_{n-1}, \quad \xi_n^0 = 0.$$

Pour limiter l'expression (71), on décompose d'une façon connue les différences des produits qui y figurent en sommes de différences correspondant aux facteurs particuliers. Nous n'étudierons qu'une d'elles, la plus difficile,

$$(72)\quad Y_1'(P, P_1)$$
$$= \varphi(P_1)(2-n)n\sum_{a=1}^{n}(\bar{x}_a - x_a)\iint_{S_W-S_\Pi}\{[\vartheta^Q(P^*, Q)]^{-n/2-1} - [\vartheta^P(P^*, Q')]^{-n/2-1}\}\times$$
$$\times\Big[\sum_{\beta=1}^{n}a^{1\beta}(Q)(x_\beta^* - \xi_\beta)\sum_{\beta=1}^{n}a^{a\beta}(Q)(x_\beta^* - \xi_\beta) + \vartheta^Q(P^*, Q)\,a^{1a}(Q)\Big]dQ.$$

Remarquons donc qu'on a

$$(73)\quad |[\vartheta^Q(P^*, Q)]^{-n/2-1} - [\vartheta^P(P^*, Q')]^{-n/2-1}|$$
$$< \sup\{(\tfrac{1}{2}n+1)[\vartheta^Q(P^*, Q)]^{-n/2-2}\}\,[|\vartheta^Q(P^*, Q) - \vartheta^P(P^*, Q)| +$$
$$+ |\vartheta^P(P^*, Q) - \vartheta^P(P^*, Q')|]$$

d'où, en faisant usage de la formule (7'') et des inégalités (4), (8), (58), nous obtiendrons (si $Q \in S_W - S_\Pi$)

$$(74)\quad |[\vartheta^Q(P^*, Q)]^{-n/2-1} - [\vartheta^P(P^*, Q')]^{-n/2-1}| < \mathrm{const}\cdot r_{PQ}^{-n-2+\varkappa'}$$

où $\varkappa' = \min(h, \varkappa)$. Il en résulte pour la fonction (72) la limitation suivante:

$$(75)\quad |Y_1'(P, P_1)| < \mathrm{const}\cdot M_\varphi r_{PP_1}\iint_{S_W-S_\Pi} r_{PQ}^{-n+\varkappa'}\,dQ < \mathrm{const}\cdot M_\varphi r_{PP_1}^{\varkappa'}.$$

D'une façon analogue on étudiera les autres termes de la différence sous les signe d'intégrale (71) et l'on obtiendra la limitation

$$(76)\quad |Y_1(P, P_1)| < \mathrm{const}\cdot M_\varphi\cdot r_{PP_1}^{\varkappa'}.$$

Pour étudier le second terme, $-Y_2$, de la somme (70), nous appliquerons des inégalités analogues à (33), (35), (36) et (56) et nous aurons

$$(77)\quad |Y_2(P, P_1)| < \mathrm{const}\cdot M_\varphi\cdot r_{PP_1}^{h_s}\iint_{S_W-S_\Pi}\frac{dQ}{r_{PQ}^{n-1-\varkappa_1}} < \mathrm{const}\cdot M_\varphi r_{PP_1}^{h_s'}$$

où $h_s' = \min(h_s, \varkappa)$. L'étude du troisième terme Y_3 est analogue à la précédente et fournit la limitation

$$(77')\quad |Y_3(P, P_1)| < \mathrm{const}\cdot M_\varphi\cdot r_{PP_1}^{\varkappa''}, \quad \varkappa'' = \min(h, \Theta\varkappa).$$

En réunissant les résultats (63), (65), (67), (68), (76), (77), (77'), nous arrivons à la limitation suivante pour les intégrales (61)

$$(78)\quad |J_2^*(P) - J_2^*(P_1)| < (A'M_\varphi + B'k_\varphi)\,r_{PP_1}^{\bar{h}_\varphi},$$

où $\bar{h}_\varphi = \min(h_\varphi, \Theta h_s, h, \Theta\varkappa)$, A' et B' sont des constantes positives, indépendantes de la fonction φ.

En tenant compte des propriétés démontrées (60) et (78), nous concluons que la différence des fonctions (47) et (48) vérifie une inégalité de la forme

$$(79)\quad |J^*(P) - J^*(P_1)| < (A''M_\varphi + B''k_\varphi)\,r_{PP_1}^{\bar{h}_\varphi},$$

A'', B'' étant des constantes positives.

Pour établir la conclusion (41) il ne reste qu'à étudier la différence des secondes intégrales (46)

$$(80)\quad \bar{J}(P) = \iint_{S_L}\overline{w}_{x_1}(P, Q)\varphi(Q)\,dQ, \qquad \bar{J}(P_1) = \iint_{S_L}\overline{w}_{x_1'}(P_1, Q)\varphi(Q)\,dQ$$

correspondant aux points P et P_1; les fonctions qui y figurent admettent des singularités faibles, d'après (12'), donc les intégrales (80) sont absolument convergentes.

En écrivant

$$(81)\quad \bar{J}(P_1) = \sum_{a=1}^{n}\cos(x_a, x_1')\iint_{S_L}\overline{w}_{x_a}(P_1, Q)\varphi(Q)\,dQ$$

nous voyons qu'il suffit d'étudier la différence

$$(82)\quad \Delta(P, P_1) = \iint_{S_L}[\overline{w}_{x_1}(P, Q) - \overline{w}_{x_1}(P_1, Q)]\varphi(Q)\,dQ$$

que nous décomposons de nouveau en sommes d'intégrales

$$(83)\quad \Delta(P, P_1) = \Delta^{S_\Pi}(P, P_1) + \Delta^{S_L - S_\Pi}(P, P_1)$$

étendues à la portion S_Π (découpée par la sphère Π de centre P et de rayon $2r_{PP_1}$) et à la partie extérieure $S_L - S_\Pi$.

Pour la première partie nous avons évidemment, d'après la limitation (12'),

$$(84)\quad |\Delta^{S_\Pi}(P, P_1)| < \mathrm{const}\cdot\iint_{S_\Pi}\frac{|\varphi|\,dQ}{r_{PQ}^{n-1-h}} < \mathrm{const}\cdot M_\varphi\cdot r_{PP_1}^{h}.$$

Pour étudier la seconde partie de la somme (83), remarquons qu'on a, d'après (7') et (7''),

$$(85)\quad |w_{x_1}^M(P, M) - w_{x_1}^M(P_1, M)| < \mathrm{const}\cdot\frac{r_{PP_1}}{r_{PM}^{n+1}}$$

si $M \in \Omega' - \Pi$.

Nous aurons donc, en tenant compte de la formule (7''') et des limitations (9) et (12), si $Q \epsilon S_L^1 - S_\Pi$,

$$(86)\qquad |\overline{w}_{x_1}(P, Q) - \overline{w}_{\overline{x}_1}(P_1, Q)|$$
$$< \mathrm{const}\cdot\left[\iiint\limits_{\Pi}\frac{dM}{r_{PM}^{n-1}r_{MQ}^{n-h}} + \iiint\limits_{\Pi}\frac{dM}{r_{P_1M}^{n-1}r_{MQ}^{n-h}} + \iiint\limits_{\Omega'-\Pi}\frac{r_{PP_1}dM}{r_{PM}^{n+1}r_{MQ}^{n-h}}\right].$$

En faisant l'étude de ces intégrales par la méthode connue de la transformation homothétique, on arrive à l'inégalité

$$(87)\qquad |\overline{w}_{x_1}(P, Q) - \overline{w}_{\overline{x}_1}(P_1, Q)| < \mathrm{const}\cdot\frac{r_{PP_1}}{r_{PQ}^{n-h}}$$

si $Q \epsilon S_L - S_\Pi$. Il en résulte

$$(88)\qquad |\Delta^{S_L - S_\Pi}(P, P_1)| < \mathrm{const}\cdot M_\varphi r_{PP_1}\iint\limits_{S_L - S_\Pi}\frac{dQ}{r_{PQ}^{n-h}} < \mathrm{const}\cdot M_\varphi r_{PP_1}^h.$$

En somme, d'après (84) et (88), nous aurons

$$(89)\qquad |\Delta(P, P_1)| < \mathrm{const}\cdot M_\varphi\cdot r_{PP_1}^h.$$

Donc, en tenant compte des inégalités (56), nous pouvons affirmer que la différence des intégrales (80) et (81) vérifie l'inégalité

$$(90)\qquad |\bar{J}(P) - \bar{J}(P_1)| < \mathrm{const}\cdot M_\varphi r_{PP_1}^{h_s'}$$

où $h_s' = \min(h, h_s)$. Les résultats obtenus (45), (79), (90) confirment la conclusion (41) du théorème 2.

Corollaire. *Si les exposants constants, figurant dans les théorèmes 1 et 2, vérifient les inégalités*

$$(91)\qquad h_\varphi \leqslant h, \quad h_\varphi < \min(h_s, \varkappa),$$

les dérivées tangentielles (40) *du potentiel de simple couche vérifient la condition de Hölder*

$$(92)\qquad |J(P) - J(P_1)| < (C_1 M_\varphi + C_2 k_\varphi) r_{PP_1}^{h_\varphi},$$

avec le même exposant h_φ que la densité $\varphi(P)$ de la couche.

Cette propriété est d'une importance essentielle dans les problèmes aux limites.

Remarque. De la démonstration du théorème 1 (voir la formule (20)) résulte que la valeur limite de la dérivée tangentielle

$$U_{s_P}(P) = \iint\limits_S \Gamma_{s_P}(P, Q)\varphi(Q)\,dQ$$

dans la direction du champ de tangentes $\{s_P\}$ vérifie en tout point P de la surface S une inégalité de la forme

$$(93)\qquad |U_{s_P}(P)| < C_1' M_\varphi + C_2' k_\varphi$$

où C_1' et C_2' sont des constantes indépendantes de la fonction $\varphi(P)$.

4. Cas particulier du domaine plan. Les considérations précédentes ne concernent pas le cas du domaine plan ($n = 2$). Dans ce cas, en conservant les hypothèses (4) et (6), on cherche la solution fondamentale aussi sous la forme (7), mais en admettant pour quasi-solution la fonction

$$(94)\qquad w^M(A, B) = \log[\vartheta^M(A, B)]$$

où la forme quadratique $\vartheta^M(A, B)$ est donnée de même par la formule (7''). Toutes les considérations concernant la solution fondamentale sont analogues et prouvent l'existence de cette solution sous la forme (7), où $\overline{w}$ est donnée par la formule (7'''), Φ étant une solution de l'équation de Fredholm.

Dans le cas $n = 2$ les inégalités (9) sont remplacées par les inégalités

$$(95)\qquad \begin{gathered} |w^M(A, B)| < c_1|\log r_{AB}| + c_2, \quad |\overline{w}(A, B)| < c_3, \\ |\Phi(A, B)| < \frac{\mathrm{const}}{r_{AB}^{2-h}}, \end{gathered}$$

c_1, c_2, c_3 étant des constantes positives; il est remarquable que la fonction $\overline{w}$ reste bornée si $A \to B$ et que la limitation pour la fonction Φ soit un cas particulier de la limitation (9).

La dérivée de la fonction (94) s'exprime par la formule

$$(96)\qquad w_{x_\alpha}^M(A, B) = [\vartheta^M(A, B)]^{-1} 2\sum_{\beta=1}^{2} a^{\alpha\beta}(M)(x_\beta - \xi_\beta)$$

qui est un cas particulier pour $n = 2$ du cas général, si nous remplaçons le facteur $2-n$ par 2. Il en résulte que toutes les considérations précédentes, où figurent les dérivées de la solution fondamentale, s'appliquent aussi avec une légère modification dans le cas $n = 2$.

Nous aurons, en particulier, pour les dérivées, les limitations (12) et (12') c'est-à-dire, dans ce cas,

$$(97)\qquad |w_{x_\alpha}^M(A, B)| < \frac{\mathrm{const}}{r_{AB}}, \quad |\overline{w}_{x_\alpha}(A, B)| < \frac{\mathrm{const}}{r_{AB}^{1-h}}.$$

On définit de même le potentiel de simple couche par l'intégrale de ligne

$$(98)\qquad U(A) = \int\limits_C \Gamma(A, Q)\varphi(Q)\,dQ$$

où C est une courbe fermée limitant le domaine Ω. On admet que l'angle entre les tangentes s_P et s_Q aux points arbitraires P et Q de la courbe C vérifie l'inégalité

$$(s_P, s_Q) < \text{const} \cdot r_{PQ}^{\varkappa} \quad (0 < \varkappa \leqslant 1) \tag{99}$$

qui correspond à l'inégalité de Liapounoff (5). En admettant que la densité $\varphi(Q)$ est bornée et intégrable, on décompose de même la fonction (98) en somme de fonctions (10), (10') et on prouve l'existence des dérivées (11) et (11') en tout point A à l'intérieur du domaine Ω.

Tous les raisonnements sur les propriétés des dérivées tangentielles, que nous avons développé antérieurement, s'appliquent aussi dans le cas $n = 2$ avec de petites modifications et il est inutile de les répéter. Nous pouvons notamment affirmer, dans l'hypothèse (14), l'existence de la limite de la dérivée tangentielle

$$\lim_{A \to P} U_{s_P}(A) = \int_C \Gamma_{s_P}(P, Q)\varphi(Q)\,dQ = U_{s_P}(P) \tag{100}$$

en tout point $P \in C$; l'intégrale a le sens de la valeur principale de Cauchy, c'est-à-dire

$$U_{s_P} = \int_C \Gamma_{s_P}(P, Q)\varphi(Q)\,dQ = \lim_{\varrho \to 0} \int_{C - l_\varrho} \Gamma_{s_P}(P, Q)\varphi(Q)\,dQ, \tag{101}$$

où l_ϱ est l'arc découpé sur C, par le cercle de centre P et de rayon ϱ. Remarquons que la dérivée tangentielle $\Gamma_{s_P}(P, Q)$ admet une singularité comparable à la singularité forte de $1/s - \sigma$, où s et σ sont les coordonnées curvilignes des points P et Q sur la courbe C. L'intégrale (101) a donc la forme étudiée pour la première fois, dans l'hypothèse de l'analyticité, par H. Poincaré [5].

Quant au théorème 2, remarquons que dans ce cas le champ de tangentes $\{s_P\}$ coïncide avec le système unique des tangentes à la courbe C, donc on a l'égalité des exposants $\varkappa = h_s$. Tous les raisonnements pour démontrer le théorème 2 sont encore valables avec de petites modifications et ils confirment la conclusion que les valeurs limites (101) des dérivées tangentielles vérifient la condition de Hölder sous la forme

$$|U_{s_P}(P) - U_{s_{P_1}}(P_1)| < (C_1 M_\varphi + C_2 k_\varphi) r_{PP_1}^{h'_\varphi} \tag{102}$$

où

$$h'_\varphi = \min(h_\varphi, h, \Theta h_s). \tag{102'}$$

Dans le cas $h_\varphi \leqslant h$ et $h_\varphi < h_s$ on peut prendre $h'_\varphi = h_\varphi$ et on constate la conservation de l'exposant de Hölder. La propriété (102) est une généralisation, pour l'équation (2) à coefficients ne vérifiant que la condition de Hölder, de la propriété des dérivées tangentielles du potentiel logarithmique (pour l'équation de Laplace) démontrée par l'auteur dans le travail [4]. Ce théorème est pour le potentiel logarithmique en liaison étroite avec le théorème connu de Plemelj-Privaloff sur les valeurs limites d'une intégrale du type de Cauchy.

Travaux cités

[1] W. Pogorzelski, *Étude de la solution fondamentale de l'équation elliptique et des problèmes aux limites*, Ann. Polon. Math. 3 (1957), p. 247-284.

[2] — *Równania całkowe i ich zastosowania II*, Warszawa 1958.

[3] — *Propriétés des intégrales de l'équation parabolique normale*, Ann. Polon. Math. 4 (1957), p. 61-92.

[4] — *Problème aux limites de Poincaré généralisé*, Ann. Polon. Math. 2 (1955), p. 257-270.

[5] H. Poincaré, *Mécanique céleste III*, Paris 1910.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 29. 11. 1958