follows the equality of $\int \log|z-\zeta|^{-1}d\mu(\zeta)$ and $\int \log|z-\zeta|^{-1}d(\zeta)$ outside at most a set of isolated points which is of capacity 0. Hence

$$\int \log|z-\zeta|^{-1}d\mu(\zeta) \equiv \int \log|z-\zeta|^{-1}d\nu(\zeta)$$

and in consequence $\mu = \nu$ (cf. [2]). Since the above treatment may be applied to the arbitrary convergent subsequence of the original sequence $\{\nu_n\}$, then $\{\nu_n\}$ converges to ν.

The theorem gives a positive answer to the hypothesis which P. Erdös has put in a slightly less general form.

References

[1] F. Leja, *Une condition de la régularité et irrégularité des points frontières dans le problème de Dirichlet*, Ann. Soc. Polon. Math. 20 (1947), p. 223-228.

[2] H. Cartan, *Théorie du potentiel Newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels*, Bull. Soc. Math. France 69 (1954), p. 74-106.

Reçu par la Rédaction le 2. 12. 1958

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1960)

Sur les solutions périodiques et presque-périodiques de l'équation différentielle $x''+kf(x)x'+g(x) = kp(t)$

par Z. Opial (Kraków)

1. Considérons l'équation différentielle non linéaire du second ordre

$$x''+kf(x)x'+g(x) = kp(t), \tag{1}$$

où k est un paramètre. Admettons que les fonctions $f(x)$, $g(x)$ et $p(t)$ soient continues $(-\infty < x < +\infty,\ -\infty < t < +\infty)$ et posons

$$F(x) = \int_0^x f(u)\,du, \quad G(x) = \int_0^x g(u)\,du \quad \text{et} \quad P(t) = \int_0^t p(u)\,du.$$

L'équation (1) est équivalente au système d'équations du premier ordre

$$x' = y-kF(x), \quad y' = -g(x)+kp(t). \tag{2}$$

Pour toute solution $x(t)$ de l'équation (1) nous désignerons par $\big(x(t), y(t)\big)$ la solution correspondante du système (2), de sorte que l'on aura

$$y(t) = x'(t)+kF\big(x(t)\big).$$

Supposons que les fonctions $f(x)$, $g(x)$ et $p(t)$ satisfassent aux conditions

$$f(x) > 0 \quad \text{pour tout } x, \quad \lim_{|x|\to\infty} F(x)\operatorname{sgn} x = +\infty, \tag{3}$$

$$xg(x) > 0 \quad \text{pour } x \neq 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} G(x) = +\infty, \tag{4}$$

$$|p(t)| \leqslant P, \quad |P(t)| \leqslant P \quad (-\infty < t < +\infty), \tag{5}$$

P étant une constante positive.

G. E. H. Reuter [5] a démontré que, dans ces hypothèses, pour tout $k > 0$ il existe dans le plan (x, y) un ensemble K limité par une courbe régulière (de classe C^1 sauf en un nombre fini de points), simple et jouissant des propriétés suivantes:

1° pour toute solution $(x(t), y(t))$ du système (2) il existe un t_0 tel que $(x(t_0), y(t_0)) \in K$;

2° si pour un t_0 $(x(t_0), y(t_0)) \in K$, on a aussi $(x(t), y(t)) \in K$ pour tout $t \geqslant t_0$.

L'ensemble K peut être choisi de sorte que l'on ait

$$|x| \leqslant x_0 \quad \text{et} \quad |y - kF(x)| \leqslant y_0$$

pour tout point (x, y) appartenant à K. Les constantes x_0 et y_0 ne dépendent pas du paramètre k.

Pour toute solution $x(t)$ de l'équation (1) on a donc

$$(6) \qquad |x(t)| \leqslant x_0, \quad |x'(t)| \leqslant y_0$$

pour t suffisamment grands.

Notons enfin que l'ensemble K ne dépend que des fonctions $f(x)$, $g(x)$, de la constante P et du paramètre k. Il est donc le même pour toute une classe d'équations (1) dépendant d'une fonction arbitraire $p(t)$ qui satisfait aux inégalités (5).

Dans le cas où la fonction $p(t)$ est périodique de période ω il en résulte que l'équation (1) admet au moins une solution périodique de même période.

2. Supposons de plus que pour $|x| \leqslant x_0$ on ait $g'(x) > 0$ et que la fonction $g''(x)$ existe et soit bornée dans le même intervalle. Il existe alors des constantes positives $a_1, \ldots, a_4$ et γ, indépendantes de k, telles que

$$(7) \qquad a_1 \leqslant f(x) \leqslant a_2, \quad a_3 \leqslant g'(x) \leqslant a_4 \quad \text{et} \quad |g''(x)| \leqslant \gamma \qquad (-x_0 \leqslant x \leqslant x_0).$$

M. L. Cartwright et J. E. Littlewood [1] (cf. aussi [2], p. 271, [6] et [8]) ont démontré que dans ces hypothèses on a pour tout k plus grand que

$$\bar{k}_0 = y_0 \gamma / a_1 a_3$$

et pour deux solutions arbitraires $x_1(t)$, $x_2(t)$ de l'équation (1),

$$\lim_{t\to+\infty} |x_1(t) - x_2(t)| = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} |x_1'(t) - x_2'(t)| = 0.$$

Dans l'hypothèse supplémentaire que la fonction $p(t)$ est périodique il en vient que pour $k > \bar{k}_0$ l'équation (1) admet une et une seule solution périodique vers laquelle tend toute autre solution de cette équation lorsque t croît indéfiniment. Cette solution périodique est donc stable.

Enfin, dans l'hypothèse que la fonction $p(t)$ est presque-périodique, G. E. H. Reuter [6] a démontré (pour $k > \bar{k}_0$) l'existence et la stabilité d'une solution presque-périodique de l'équation (1).

Dans la présente note je me propose de démontrer que dans les théorèmes cités il est possible de remplacer la constante $\bar{k}_0$ par une autre, plus petite. La méthode dont je me sers à cet effet est tout à fait pareille à celle que j'ai utilisée dans l'étude de l'équation différentielle

$$x'' + F(x') + g(x) = p(t)$$

dans la note [4]. Cette méthode constitue une modification (cf. [3]) d'une méthode générale de G. Seifert [7].

3. Envisageons deux équations différentielles

$$(1') \qquad x'' + kf(x)x' + g(x) = kp_1(t),$$

$$(1'') \qquad x'' + kf(x)x' + g(x) = kp_2(t)$$

dont chacune est équivalente respectivement au système

$$(2') \qquad x' = y - kF(x), \quad y' = -g(x) + kp_1(t),$$

$$(2'') \qquad x' = y - kF(x), \quad y' = -g(x) + kp_2(t).$$

Désignons par $\Delta p(t)$ la différence des fonctions $p_2(t)$ et $p_1(t)$. Pour les solutions des équations (1') et (1'') on peut établir un théorème de comparaison (cf. [6], Theorem II), à savoir:

Théorème 1. *Supposons que les fonctions $f(x)$, $g(x)$, $p_1(t)$ et $p_2(t)$ soient continues et satisfassent aux conditions* (3)-(5). *Admettons de plus que $g'(x) > 0$ dans l'intervalle $\langle -x_0, x_0\rangle$ (x_0 est le même que dans le théorème de G. E. H. Reuter cité au* n° 1) *et que la dérivée seconde $g''(x)$ existe et soit continue dans le même intervalle. Supposons enfin que les fonctions $p_1(t)$ et $p_2(t)$ vérifient l'inégalité*

$$(8) \qquad |\Delta p(t)| = |p_2(t) - p_1(t)| \leqslant \varepsilon \qquad (-\infty < t < +\infty),$$

où ε est un nombre arbitraire.

Dans ces hypothèses il existe une constante $M > 0$ indépendante de ε telle que, pour tout k plus grand que

$$k_0 = \tfrac{1}{2} y_0 \max_{|x| \leqslant x_0} \big(|g''(x)| / f(x) g'(x)\big)$$

et pour deux solutions arbitraires $x_1(t)$, $x_2(t)$ des équations (1') *et* (1'') *respectivement, on a les inégalités*

$$(9) \qquad \limsup_{t\to+\infty} |x_1(t) - x_2(t)| \leqslant M\varepsilon, \quad \limsup_{t\to+\infty} |x_1'(t) - x_2'(t)| \leqslant M\varepsilon.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que les inégalités (9) sont équivalentes aux inégalités suivantes, relatives aux solutions correspondantes $(x_1(t), y_1(t))$ et $(x_2(t), y_2(t))$ des systèmes (2') et (2'') respectivement:

$$(9')\qquad \limsup_{t\to+\infty}|x_1(t)-x_2(t)| \leqslant N\varepsilon, \qquad \limsup_{t\to+\infty}|y_1(t)-y_2(t)| \leqslant N\varepsilon,$$

où la constante N ne dépend pas de ε.

Supposons, en effet, que ce soient les inégalités (9') qui se trouvent vérifiées. On a alors, en vertu du théorème des accroissements finis,

$$\begin{aligned}|x_2'(t)-x_1'(t)| &= \big|y_2(t)-y_1(t)+k[F(x_1(t))-F(x_2(t))]\big|\\ &\leqslant |y_2(t)-y_1(t)|+kf\big[x_1(t)+\vartheta(t)\big(x_2(t)-x_1(t)\big)\big]\,|x_2(t)-x_1(t)|,\end{aligned}$$

où $0 \leqslant \vartheta(t) \leqslant 1$. Mais, d'après le théorème de G. E. H. Reuter (cf. nº 1), pour tout t suffisamment grand $|x_1(t)| \leqslant x_0$ et $|x_2(t)| \leqslant x_0$. On a donc

$$|x_2'(t)-x_1'(t)| \leqslant |y_2(t)-y_1(t)|+km\,|x_2(t)-x_1(t)|,$$

où nous avons posé $m = \max\limits_{|x|\leqslant x_0} f(x)$. Par conséquent

$$\limsup_{t\to+\infty}|x_2'(t)-x_1'(t)| \leqslant N(km+1)\,\varepsilon,$$

c'est-à-dire les inégalités (9) se trouvent vérifiées pour $M = N(km+1)$.

On démontre de même que les inégalités (9) entraînent les inégalités (9').

Fixons maintenant un $k > k_0$. Soient $(x_1(t), y_1(t))$ et $(x_2(t), y_2(t))$ deux solutions arbitraires des systèmes (2') et (2'') respectivement. Dans ces systèmes les fonctions $f(x)$, $g(x)$ sont les mêmes et les fonctions $p_1(t)$, $p_2(t)$ satisfont aux inégalités (5) avec la même constante P. D'après ce que nous avons dit au nº 1, l'ensemble K est le même pour l'un et l'autre de ces systèmes.

En vertu du théorème de G. E. H. Reuter cité au nº 1, il existe un nombre t_0 tel que les points $P_1(x_1(t_0); y_1(t_0))$ et $P_2(x_2(t_0), y_2(t_0))$ appartiennent à l'ensemble K. Joignons les points P_1 et P_2 par une courbe simple et régulière C appartenant entièrement à K. Soient

$$(C)\qquad x = \varphi(u), \quad y = \psi(u) \quad (0 \leqslant u \leqslant 1)$$

les équations paramétriques de cette courbe. On peut admettre que les fonctions $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ sont de classe C^1. On a de plus les relations

$$\varphi(0) = x_1(t_0), \quad \psi(0) = y_1(t_0), \quad \varphi(1) = x_2(t_0), \quad \psi(1) = y_2(t_0).$$

Envisageons le système auxiliaire d'équations différentielles

$$(10)\qquad x' = y-kF(x), \quad y' = -g(x)+kp_1(t)+k\cdot u\Delta p(t),$$

où la variable u joue le rôle d'un paramètre variant dans l'intervalle $\langle 0,1\rangle$. Désignons par $(x(t, u), y(t, u))$ la solution du système (10) qui passe pour $t = t_0$ par le point $(\varphi(u), \psi(u))$ de la courbe C. On a donc en particulier

$$x_1(t) = x(t, 0), \quad y_1(t) = y(t, 0),$$
$$x_2(t) = x(t, 1), \quad y_2(t) = y(t, 1)$$

pour tout $t \geqslant t_0$.

Dans le système (10) la fonction $p_1(t)+u\Delta p(t)$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$ satisfait évidemment aux inégalités (5). Pour ce système l'ensemble K est donc le même que pour les systèmes (1') et (1''). Il en résulte que pour tout $t \geqslant t_0$ et $0 \leqslant u \leqslant 1$ le point $(x(t, u), y(t, u))$ appartient à l'ensemble K. On a de plus, en vertu des inégalités (6):

$$(11)\qquad |x(t, u)| \leqslant x_0 \quad \text{et} \quad |x'(t, u)| = \big|y(t, u)-kF\big(x(t, u)\big)\big| \leqslant y_0 \qquad (t \geqslant t_0,\ 0 \leqslant u \leqslant 1).$$

Désignons par $C(t)$ $(t \geqslant t_0)$ la courbe donnée par les équations paramétriques

$$x = x(t, u), \quad y = y(t, u) \quad (0 \leqslant u \leqslant 1).$$

La distance des points $(x_1(t), y_1(t))$ et $(x_2(t), y_2(t))$ étant inférieure ou égale à la longueur de la courbe $C(t)$, on a l'inégalité

$$|x_1(t)-x_2(t)|+|y_1(t)-y_2(t)| \leqslant 2\int_0^1 \left\{\left(\frac{\partial x(t, u)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y(t, u)}{\partial u}\right)^2\right\}^{1/2} du.$$

Pour démontrer les inégalités (9') il suffit donc de démontrer que les fonctions

$$v_1(t, u) = \frac{\partial x(t, u)}{\partial u}, \quad v_2(t, u) = \frac{\partial y(t, u)}{\partial u}$$

sont bornées dans l'ensemble $t \geqslant t_0$, $0 \leqslant u \leqslant 1$ et qu'il existe une constante M' telle que l'on ait les inégalités

$$(12)\qquad \limsup_{t\to+\infty}|v_1(t, u)| \leqslant M'\varepsilon, \quad \limsup_{t\to+\infty}|v_2(t, u)| \leqslant M'\varepsilon.$$

On vérifie sans peine que les fonctions $v_1(t, u)$, $v_2(t, u)$ satisfont au système d'équations différentielles linéaires

$$(13)\qquad v_1' = v_2-kf\big(x(t, u)\big)v_1, \quad v_2' = -g'\big(x(t, u)\big)v_1+k\Delta p(t).$$

Introduisons la fonction auxiliaire

$$G(t, u) = g'\big(x(t, u)\big)v_1^2(t, u)+v_2^2(t, u)-2\eta v_1(t, u)v_2(t, u) \qquad (t \geqslant t_0,\ 0 \leqslant u \leqslant 1)$$

Pour ne pas compliquer les notations nous écrirons dans la suite tout simplement x, y, v_1 et v_2 au lieu de $x(t,u)$, $y(t,u)$, $v_1(t,u)$ et $v_2(t,u)$. On a ainsi

$$G(t,u) = g'(x)v_1^2 + v_2^2 - 2\eta v_1 v_2.$$

C'est donc une forme quadratique en v_1 et v_2 à coefficients dépendant de t et u. Choisissons la constante positive η de sorte que cette forme soit définie positive uniformément pour $|x| \leqslant x_0$. Il suffit pour cela que le nombre η satisfasse à l'inégalité

$$\eta^2 < \min_{|x|\leqslant x_0} g'(x). \tag{14}$$

Comme les fonctions $v_1(t,u)$ et $v_2(t,u)$ sont des solutions du système d'équations différentielles linéaires (13), on a

$$\frac{\partial G(t,u)}{\partial t} = \big(g''(x)x' - 2kg'(x)f(x) + 2\eta g'(x)\big)v_1^2 - 2\eta v_2^2 + 2k\eta f(x)v_1v_2 + \\ + 2k(v_2 - \eta v_1)\Delta p(t).$$

Comme $k > k_0$, il est possible de choisir un η de sorte qu'il satisfasse à la condition (14) et que la forme quadratique en v_1 et v_2:

$$\big(g''(x)x' - 2kg'(x)f(x) + 2\eta g'(x)\big)v_1^2 - 2\eta v_2^2 + 2k\eta f(x)v_1v_2$$

soit définie négative uniformément pour x variant dans l'intervalle $\langle -x_0, x_0\rangle$ et x' satisfaisant à l'inégalité $|x'| \leqslant y_0$. Cela résulte immédiatement du fait qu'en vertu de la définition de la constante k_0 pour tout $k > k_0$ la fonction

$$2kg'(x)f(x) - g''(x)\big(y - kF(x)\big),$$

où $|x| \leqslant x_0$ et $|y - kF(x)| \leqslant y_0$, est bornée inférieurement par une constante positive.

D'autre part

$$|2k(v_2 - \eta v_1)| \leqslant 2k(|v_2| + \eta|v_1|) \leqslant 4k\sqrt{v_2^2 + \eta^2 v_1^2}$$

et la fonction $\Delta p(t)$ satisfait par hypothèse à l'inégalité (8). Il existe donc deux constantes positives α et β telles que

$$\frac{\partial G(t,u)}{\partial t} \leqslant -\alpha G(t,u) + \beta\varepsilon\sqrt{G(t,u)}. \tag{15}$$

Il en résulte que la fonction $G(t,u)$ est décroissante dans tout intervalle où elle prend des valeurs supérieures à $\beta^2\varepsilon^2/\alpha^2$. La fonction $G(t_0,u)$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$, étant continue, est bornée dans tout l'intervalle $\langle 0,1\rangle$. La fonction $G(t,u)$ est donc bornée dans tout l'ensemble $t \geqslant t_0$, $0 \leqslant u \leqslant 1$ et on a de plus

$$\limsup_{t\to+\infty} G(t,u) \leqslant \beta^2\varepsilon^2/\alpha^2. \tag{16}$$

Mais la fonction $G(t,u)$ est une forme quadratique en v_1 et v_2 définie positive, de l'inégalité (16) il vient donc que les fonctions $v_1(t,u)$, $v_2(t,u)$ sont bornées dans l'ensemble $t \geqslant t_0$, $0 \leqslant u \leqslant 1$ et vérifient les inégalités (12) pour une constante M' convenablement choisie.

Le théorème 1 se trouve ainsi démontré.

4. La frontière de l'ensemble K est une courbe régulière, de classe C^1 sauf en un nombre fini de points. On peut donc joindre tout point P_1 de cet ensemble à n'importe quel autre point P_2 appartenant à K par une courbe régulière $C \subset K$ dont la longueur ne surpasse pas une constante convenablement choisie, indépendante du choix des points P_1 et P_2. Bien plus, les équations paramétriques (C) d'une telle courbe peuvent être choisies de sorte que les fonctions $\varphi'(u)$ et $\psi'(u)$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$ soient bornées par une constante indépendante du choix des points P_1, P_2. Par conséquent, pour tout couple P_1, P_2 de points de l'ensemble K on aura l'inégalité

$$0 \leqslant G(t_0,u) = g'\big(x(t_0,u)\big)\varphi'^2(u) + \psi'^2(u) - 2\eta\varphi'(u)\psi'(u) \leqslant L \tag{17}$$
$$(0 \leqslant u \leqslant 1),$$

où L est une constante.

La fonction $G(t,u)$ satisfait pour $t \geqslant t_0$ et $0 \leqslant u \leqslant 1$ à l'inégalité différentielle (15). De là et de l'inégalité initiale (17) il résulte qu'il existe un nombre $T(\varepsilon) > 0$, indépendant de t_0, tel que l'on a

$$G(t,u) \leqslant 4\beta^2\varepsilon^2/\alpha^2$$

pour tout $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$ et $0 \leqslant u \leqslant 1$.

On peut donc énoncer le théorème 1 sous une forme encore plus précise:

THÉORÈME 2. *Supposons que les fonctions $f(x)$, $g(x)$, $p_1(t)$ et $p_2(t)$ satisfassent aux hypothèses du théorème* 1. *Il existe un M indépendant de ε et un $T(\varepsilon)$ tels que pour tout couple $x_1(t)$, $x_2(t)$ de solutions des équations* (1′) *et* (1″) *respectivement, pour lesquelles*

$$\big(x_1(t_0), y_1(t_0)\big) \in K, \quad \big(x_2(t_0), y_2(t_0)\big) \in K,$$

on a les inégalités

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant M\varepsilon, \quad |x_1'(t) - x_2'(t)| \leqslant M\varepsilon \tag{18}$$

pour tout $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$.

5. Soient $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux solutions des équations (1') et (1'') respectivement pour lesquelles les points $(x_1(t), y_1(t))$, $(x_2(t), y_2(t))$ appartiennent pour tout t à l'ensemble K. Dans ce cas particulier le théorème précédent s'applique à toutes les valeurs de t_0 et, par suite, les inégalités (18) se trouvent vérifiées dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. On peut donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Supposons que les fonctions $f(x)$, $g(x)$, $p_1(t)$ et $p_2(t)$ satisfassent aux hypothèses du théorème 1. Si $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont deux solutions des équations (1') et (1'') respectivement telles que*

$$(x_1(t), y_1(t)) \epsilon K, \quad (x_2(t), y_2(t)) \epsilon K \quad (-\infty < t < +\infty),$$

dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ on a les inégalités (18).

6. Les théorèmes 1, 2 et 3 s'appliquent évidemment aussi dans le cas où la fonction $p_1(t)$ est identique à $p_2(t)$. Cela signifie que dans les inégalités (8), (9) et (18) le nombre ε peut être aussi petit que l'on veut. Ainsi, par exemple, du théorème 1 on déduit le théorème suivant:

THÉORÈME 4. *Supposons que les fonctions continues $f(x)$, $g(x)$ et $p(t)$ satisfassent aux conditions (3)-(5). Admettons de plus que $g'(x) > 0$ pour $|x| \leqslant x_0$ et que la dérivée seconde $g''(x)$ existe et soit continue dans le même intervalle.*

Dans ces hypothèses pour tout k plus grand que

$$k_0 = \tfrac{1}{2} y_0 \max_{|x| \leqslant x_0} \big(|g''(x)|/f(x) g'(x)\big)$$

et pour deux solutions arbitraires $x_1(t)$, $x_2(t)$ de l'équation (1) on a les relations

$$\lim_{t \to +\infty} |x_1(t) - x_2(t)| = 0, \quad \lim_{t \to +\infty} |x_1'(t) - x_2'(t)| = 0. \tag{19}$$

7. Dans l'hypothèse supplémentaire que la fonction $p(t)$ est périodique on tire du théorème précédent le théorème suivant sur l'existence et l'unicité d'une solution périodique de l'équation envisagée:

THÉORÈME 5. *Si les fonctions $f(x)$, $g(x)$ et $p(t)$ satisfont aux hypothèses du théorème 4 et si la fonction $p(t)$ est périodique de période ω, pour tout $k > k_0$ l'équation (1) admet une et une seule solution périodique $x_1(t)$ de même période ω. Toute autre solution $x_2(t)$ de cette équation satisfait aux relations (19), ce qui signifie que la solution périodique $x_1(t)$ est stable.*

En effet, l'existence d'une au moins solution périodique de l'équation (1) résulte de la propriété 2° de l'ensemble K (cf. n° 1), tandis que des relations (19) il vient que l'équation envisagée ne peut admettre plus d'une solution périodique. Enfin, la stabilité de cette solution périodique $x_1(t)$ résulte du fait que pour $\varepsilon = 0$ la fonction $G(t, u)$, introduite dans la démonstration du théorème 1, satisfait à l'inégalité différentielle

$$\frac{\partial G(t, u)}{\partial t} \leqslant -aG(t, u) \quad (t \geqslant t_0)$$

et, par conséquent, est décroissante dans l'intervalle $(t_0, +\infty)$. Il en résulte en particulier que chaque fois que les différences $|x_1(t_0) - x_2(t_0)|$, $|x_1'(t_0) - x_2'(t_0)|$ sont suffisamment petites, les différences $|x_1(t) - x_2(t)|$, $|x_1'(t) - x_2'(t)|$ sont aussi petites que l'on veut dans tout l'intervalle $(t_0, +\infty)$.

8. La propriété 2° de l'ensemble K (cf. n° 1) signifie qu'aucune solution $(x(t), y(t))$ du système d'équations (2) ne peut quitter, pour t croissant, l'ensemble K. Il existe donc une suite $(x_n(t), y_n(t))$ de solutions du système envisagé, telles que

$$(x_n(t), y_n(t)) \epsilon K \quad \text{pour} \quad t \geqslant -n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{20}$$

Les fonctions $x_n(t)$, $y_n(t)$ $(n = m, m+1, \ldots)$ sont équicontinues et bornées dans leur ensemble dans l'intervalle $(-m, +\infty)$. On peut donc extraire de la suite $(x_n(t), y_n(t))$ une suite partielle qui converge dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ vers une solution $(x(t), y(t))$ du système (2). En vertu des relations (20) on doit évidemment avoir $(x(t), y(t)) \epsilon K$ pour tout t.

Mais il résulte du théorème 3, appliqué à l'équation (1) $(p_1(t) \equiv p_2(t) \equiv p(t))$, que cette équation ne peut admettre plus d'une solution $x(t)$ pour laquelle $(x(t), y(t)) \epsilon K$ dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. On a donc le théorème suivant:

THÉORÈME 6. *Si les fonctions $f(x)$, $g(x)$ et $p(t)$ satisfont aux hypothèses du théorème 4, pour tout $k > k_0$ l'équation (1) admet une et une seule solution $x(t)$ pour laquelle $(x(t), y(t)) = \big(x(t), x'(t) + kF(x(t))\big) \epsilon K$ dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.*

9. Admettons maintenant que la fonction $p(t)$ soit presque-périodique. Cela veut dire qu'à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un nombre $L(\varepsilon) > 0$ tel que tout intervalle de longueur $L(\varepsilon)$ contienne au moins une presque-période de la fonction $p(t)$, relative à ε, c'est-à-dire un τ tel que

$$|p(t+\tau) - p(t)| \leqslant \varepsilon$$

dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

En s'appuyant sur le théorème 3 il est facile de démontrer que dans nos hypothèses l'équation (1) admet une et une seule solution presque-périodique et stable. On a notamment le théorème suivant:

Théorème 7. *Si les fonctions $f(x)$, $g(x)$ et $p(t)$ satisfont aux hypothèses du théorème 4 et si la fonction $p(t)$ est presque-périodique, pour tout $k > k_0$ l'équation* (1) *admet une et une seule solution presque-périodique $\alpha(t)$. Les dérivées $\alpha'(t)$ et $\alpha''(t)$ de cette solution sont aussi des fonctions presque-périodiques.*

Démonstration. Désignons par $\alpha(t)$ la solution de l'équation (1) pour laquelle le point $(\alpha(t), \beta(t)) = (\alpha(t), \alpha'(t)+kF(\alpha(t)))$ appartient à l'ensemble K pour tout t (cf. le théorème 6 qui assure l'existence et l'unicité d'une telle solution). Nous allons montrer que $\alpha(t)$ et $\alpha'(t)$ sont des fonctions presque-périodiques.

Soit τ une presque-période arbitraire de la fonction $p(t)$, relative à ε/M, où M désigne la constante intervenant dans l'énoncé du théorème 3. On a donc

$$|p(t+\tau)-p(t)| \leqslant \varepsilon/M \quad (-\infty < t < +\infty). \tag{21}$$

La fonction $\alpha(t+\tau)$ est évidemment une solution de l'équation

$$x''+kf(x)x'+g(x) = kp(t+\tau).$$

On a de plus $(\alpha(t+\tau), \beta(t+\tau)) \in K$ pour tout t. On peut donc appliquer aux fonctions $\alpha(t)$ et $\alpha(t+\tau)$ le théorème 3 en y admettant $p_1(t) \equiv p(t)$ et $p_2(t) \equiv p(t+\tau)$. De ce théorème et de l'inégalité (21) il vient que les fonctions $\alpha(t)$ et $\alpha'(t)$ satisfont dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ aux inégalités

$$|\alpha(t)-\alpha(t+\tau)| \leqslant \varepsilon, \quad |\alpha'(t)-\alpha'(t+\tau)| \leqslant \varepsilon.$$

Cela signifie que toute presque-période τ de la fonction $p(t)$, relative à ε/M, est une presque-période des fonctions $\alpha(t)$ et $\alpha'(t)$, relative à ε. Donc, les fonctions $\alpha(t)$ et $\alpha'(t)$ sont presque-périodiques.

Il reste à montrer que la fonction $\alpha''(t)$ est elle aussi une fonction presque-périodique. Or, on a

$$\alpha''(t) = -kf(\alpha(t))\alpha'(t)-g(\alpha(t))+kp(t). \tag{22}$$

Les fonctions $f(\alpha(t))$, $\alpha'(t)$, $g(\alpha(t))$ et $p(t)$ étant presque-périodiques, il en vient que la fonction $\alpha''(t)$ l'est aussi.

De la formule (22) il résulte qu'à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un $\delta > 0$ tel que toute presque-période τ de la fonction $p(t)$, relative à δ, soit une presque-période de la fonction $\alpha''(t)$, relative à ε. Mais, d'après la même formule

$$kp(t) = \alpha''(t)+kf(\alpha(t))\alpha'(t)+g(\alpha(t)).$$

Donc, à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un $\delta > 0$ tel que toute presque-période des fonctions $\alpha(t)$, $\alpha'(t)$ et $\alpha''(t)$, relative à δ, soit une presque-période de la fonction $p(t)$, relative à ε.

D'après le théorème 4, pour toute solution $x(t)$ de l'équation (1) on a

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t)-\alpha(t)| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} |x'(t)-\alpha'(t)| = 0,$$

d'où il vient que $\alpha(t)$ est l'unique solution presque-périodique de cette équation. La fonction $x(t)$ est la somme d'une fonction presque-périodique et d'une fonction tendant vers zéro lorsque t croît indéfiniment. Il en de même de sa dérivée $x'(t)$. Cela signifie que les fonctions $x(t)$ et $x'(t)$ sont asymptotiquement presque-périodiques au sens de M. Fréchet.

Travaux cités

[1] M. L. Cartwright and J. E. Littlewood, *On non-linear differential equations of the second order II*, Annals of Math. 48, No 2 (1947), p. 472-494.

[2] S. Lefschetz, *Differential equations: geometric theory*, New York 1957.

[3] Z. Opial, *Sur la stabilité asymptotique des solutions d'un système d'équations différentielles*, ce volume, p. 259-267.

[4] — *Sur la stabilité des solutions périodiques et presque-périodiques de l'équation différentielle* $x''+F(x')+g(x) = p(t)$, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. des sci. math., phys. et astr. 7 (1959), p. 493-498.

[5] G. E. H. Reuter, *A boundedness theorem for non-linear differential equations of the second order*, Proc. Cambr. Phil. Soc. 47 (1951), p. 49-54.

[6] — *On certain non-linear differential equations with almost periodic solutions*, Journal London Math. Soc. 26 (1951), p. 215-221.

[7] G. Seifert, *On stability in the large for periodic solution of differential systems*, Annals of Math. 67, No 1 (1958), p. 83-89.

[8] T. Yoshizawa, *On the convergence of solutions of the non-linear differential equation*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A, Vol. 28, No 2 (1954), p. 143-151.

Reçu par la Rédaction le 12. 5. 1959