ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1960)

Démonstration d'un théorème de N. Levinson et C. Langenhop

par Z. OPIAL (Kraków)

1. Considérons l'équation différentielle nonlinéaire du second ordre

$$x''+f(x, x')x'+g(x) = e(t) \tag{1}$$

et supposons que les fonctions $f(x, v)$, $g(x)$ et $e(t)$, définies et continues pour tout x, v et t, soient suffisamment régulières pour assurer l'unicité des solutions de l'équation (1). Supposons, de plus, que ces fonctions vérifient les conditions suivantes:

$$f(x, v) \geqslant m > 0 \quad \text{pour} \quad |x| \geqslant a, \quad |v| \geqslant a \quad (a > 0), \tag{2}$$

$$f(x, v) \geqslant -M \quad \text{pour} \quad |x| < +\infty, \quad |v| < +\infty, \tag{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty, \tag{4}$$

$$e(t+\omega) = e(t) \quad (\omega > 0). \tag{5}$$

N. Levinson [3] (voir aussi [2], p. 274, [4] et [5], p. 522) a démontré que, si les conditions (2)-(5) sont vérifiées et si

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)/\int_0^x g(s)\,ds = 0, \tag{6}$$

l'équation (1) admet au moins une solution périodique de période ω. C. Langenhop [1] a démontré le même théorème dans l'hypothèse que l'on a, au lieu de (6):

$$\limsup_{x\to+\infty} g(x)/x = +\infty. \tag{7}$$

Il est facile de voir (cf. [1]) que les conditions (6) et (7), jointes à la première des relations (4), épuisent toutes les possibilités de l'allure de la fonction $g(x)$ pour x tendant vers l'infini. On peut donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME DE N. LEVINSON ET C. LANGENHOP. *Dans les hypothèses* (2)-(5), *l'équation* (1) *admet au moins une solution périodique de période* ω.

Dans la présente note je me propose de donner une démonstration uniforme de ce théorème. Je vais notamment démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si les hypothèses* (2), (3) *et* (5) *sont vérifiées et si*

$$\liminf_{x\to+\infty} g(x) > Ma+E, \quad \limsup_{x\to-\infty} g(x) < -(Ma+E), \tag{8}$$

où $E = \max\limits_{\langle 0,\omega\rangle} |e(t)|$, *l'équation* (1) *admet au moins une solution périodique de période* ω.

2. Pour démontrer le théorème formulé ci-dessus, il suffit de construire dans le plan (x, v) une courbe simple fermée C jouissant de la propriété suivante: la projection sur le plan (x, v) de toute courbe intégrale du système d'équations

$$x' = v, \quad v' = -f(x, v)v - g(x) + e(t), \tag{9}$$

équivalent à l'équation (1), dont le point initial, pour $t = 0$, appartient à l'intérieur de C, ne peut quitter cet intérieur pour aucun $t \geqslant 0$.

3. Désignons par b $(b > a)$ un nombre positif tel que

$$m - E/b = p > 0 \tag{10}$$

et par c $(c > a)$ un nombre positif choisi de sorte que l'on ait pour $|x| \geqslant c$:

$$\frac{|g(x)| - E}{a} - M \geqslant \eta > 0. \tag{11}$$

Cela posé, considérons les quatre équations différentielles:

$$\frac{dv}{dx} = -p - \frac{g(x)}{v}, \tag{12}$$

$$\frac{dv}{dx} = -m - \frac{g(x)}{v} + \frac{E}{v}, \tag{13}$$

$$\frac{dv}{dx} = M - \frac{g(x)}{v} + \frac{E}{v}, \tag{14}$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{g(x)}{v}. \tag{15}$$

Ayant choisi arbitrairement le point $P_4(x_0, 0)$ (x_0 suffisamment grand), construisons la courbe $P_1P_2P_3P_4Q_1Q_2$ (fig. 1) de sorte que l'arc P_1P_2 soit intégrale de l'équation (12), l'arc P_2P_3 — intégrale de l'équation (13), l'arc P_3P_4 — intégrale de l'équation (14) et l'arc Q_1Q_2 — intégrale de

l'équation (15). La possibilité d'une telle construction est assurée par les inégalités (11). Nous allons montrer que, pour x_0 suffisamment grand, le point P_1 est situé au-dessus du point Q_2 et que l'on a

$$\lim_{x_0\to+\infty} |P_1Q_2| = +\infty,$$

où $|P_1Q_2|$ désigne la distance des points P_1 et Q_2.

Soient $v = v(x, x_0)$, $u = u(x, x_0)$ les équations des courbes Q_1Q_2 et $P_1 \ldots P_4$ respectivement. Nous allons montrer que

$$\lim_{x_0\to+\infty} v(c, x_0) = +\infty, \tag{16}$$

$$\lim_{x_0\to+\infty} \big(u(c, x_0) - v(c, x_0)\big) = +\infty. \tag{17}$$

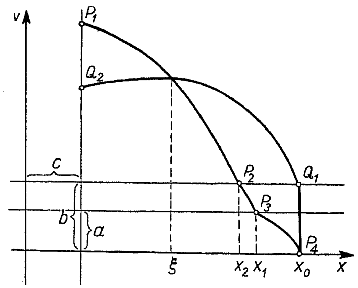

Fig. 1

Pour ne pas compliquer les notations, nous écrirons dorénavant $u(x)$ et $v(x)$ au lieu de $u(x, x_0)$ et $v(x, x_0)$.

Dans l'intervalle (x_1, x_0) on a $u(x) \leqslant a < b \leqslant v(x)$ et

$$v'(x) = -g(x)/v(x), \quad u'(x) = M - \big(g(x) - E\big)/u(x). \tag{18}$$

Il en résulte que

$$\big(v^2(x) - u^2(x)\big)' = -2Mu(x) - 2E \geqslant -2(Ma+E). \tag{19}$$

D'après l'inégalité (11) et la seconde des relations (18) on a, dans l'intervalle (x_1, x_0), $u'(x) \leqslant -\eta$ et, par suite,

$$0 < x_0 - x_1 \leqslant a/\eta. \tag{20}$$

Or, $u(x_1) = a$, $u(x_0) = 0$ et $v(x_0) = b$. Donc, des inégalités (19) et (20) on tire

$$v^2(x_1) \leqslant a^2 + b^2 + 2a(Ma+E)/\eta \overset{\mathrm{df}}{=} K. \tag{21}$$

Dans l'intervalle (x_2, x_1) on a $a \leqslant u(x) \leqslant b \leqslant v(x)$ et

$$v'(x) = -g(x)/v(x), \quad u'(x) = -m - \big(g(x) - E\big)/u(x). \tag{22}$$

On a donc, dans cet intervalle, $u'(x) \leqslant -m$ et, par conséquent

$$0 < x_1 - x_2 \leqslant (b-a)/m. \tag{23}$$

Des relations (22) on obtient l'inégalité

$$\big(v^2(x) - u^2(x)\big)' = 2mu(x) - 2E \geqslant -2E,$$

d'où l'on tire, en vertu des inégalités (21) et (23):

$$v^2(x_2) \leqslant b^2-a^2+K+2E(b-a)/m \stackrel{\text{df}}{=} L^2. \tag{24}$$

Dans l'intervalle (c, x_2) on a

$$v'(x) = -g(x)/v(x), \qquad u'(x) = -p-g(x)/u(x). \tag{25}$$

Il en résulte que, tant que $u(x) \leqslant v(x)$, on doit avoir

$$v'(x)-u'(x) \geqslant p. \tag{26}$$

Des inégalités (24) et (26) il suit que dans l'intervalle $\big(x_2-(L-b)/p, x_2\big)$ il existe un point ξ pour lequel $u(\xi) = v(\xi)$. Des inégalités (20) et (23) il résulte que la longueur de l'intervalle (ξ, x_0) est supérieurement bornée par une constante qui ne dépend pas du choix de x_0. En particulier, pour x_0 tendant vers l'infini, on a aussi $\xi \to +\infty$.

Dans l'intervalle (c, ξ) les fonctions $v(x)$ et $u(x)$ satisfont aux équations (25) et $u(x) \geqslant v(x)$. On a donc dans cet intervalle

$$\big(u^2(x)-v^2(x)\big)' = -pu(x) \leqslant -pv(x).$$

Il en résulte que

$$u^2(c)-v^2(c) \geqslant p\int_c^{\xi} v(x)\,dx. \tag{27}$$

D'autre part on a, en vertu de la première des équations (25),

$$v(x) = \sqrt{b^2+G(x_0)-G(x)}, \qquad v(c) = \sqrt{b^2+G(x_0)}, \tag{28}$$

où nous avons posé

$$G(x) = 2\int_c^x g(s)\,ds \qquad (c \leqslant x < +\infty).$$

Il en résulte immédiatement que, pour $x_0 \to +\infty$, $v(c) \to +\infty$, c'est-à-dire que l'on a la relation (16). Pour démontrer la relation (17), remarquons qu'en vertu de (27) et (28) on a

$$\frac{u^2(c)-v^2(c)}{v(c)} \geqslant p\int_c^{\xi}\sqrt{1-\frac{G(x)}{b^2+G(x_0)}}\,dx. \tag{29}$$

Mais $G(x)$ est une fonction croissante qui tend vers l'infini lorsque x_0 croît indéfiniment. On a de plus $\xi \to +\infty$ pour $x_0 \to +\infty$. De l'inégalité (29) on tire donc la relation

$$\lim_{x_0\to+\infty}\frac{u^2(c, x_0)-v^2(c, x_0)}{v(c, x_0)} = +\infty. \tag{30}$$

Mais

$$\frac{u^2(c)-v^2(c)}{v(c)} = \big(u(c)-v(c)\big)\left(2+\frac{u(c)-v(c)}{v(c)}\right),$$

d'où il résulte immédiatement que la relation (30) est équivalente à (17).

4. Maintenant il est facile de construire la courbe C dont il était question au n° 2. Remarquons d'abord que, dans la construction du n° précédent, les relations

$$u(c, x_0) \to +\infty, \qquad u(c, x_0)-v(c, x_0) \to +\infty \qquad \text{et} \qquad x_0 \to +\infty$$

sont toutes équivalentes. Par conséquent, il en est de même des relations

$$P_1 \to +\infty, \qquad |P_1Q_2| \to +\infty \qquad \text{et} \qquad P_4 \to +\infty.$$

En vertu de la seconde des inégalités (8), tous nos raisonnements précédents s'appliquent aussi si l'on remplace la fonction $g(x)$ par $g_1(x) = -g(-x)$. La construction du n° précédent nous fournit dans ce cas une courbe $P_1'P_2'P_3'P_4'Q_1'Q_2'$, analogue à $P_1P_2P_3P_4Q_1Q_2$.

Sur la droite $x = c$ choisissons le point $P_1(c, v_0)$ de sorte que l'on ait

$$|P_1Q_2| > 4Mc \qquad \text{et} \qquad v_0 \geqslant (G+E)/M+4Mc,$$

où $G = \max\limits_{\langle -c,c\rangle}|g(x)|$, et en même temps, pour $P_1' = P_1$:

$$|P_1'Q_2'| > 4Mc.$$

Cela posé, construisons la courbe fermée C de la manière suivante (fig. 2): l'arc $P_1P_2P_3P_4$ comme dans la construction du n° 3, l'arc $P_4P_5P_6$ s'obtient de l'arc $P_4Q_1Q_2$ par une symétrie par rapport à l'axe des x; l'arc $P_8P_9P_{10}P_{11}$ s'obtient de l'arc $P_1'P_2'P_3'P_4'$ par une symétrie par rapport au point $(0, 0)$ et l'arc $P_{11}P_{12}P_{13}$ de l'arc $P_4'Q_1'Q_2'$ par une symétrie par rapport à l'axe des v; les segments P_6P_7 et P_1P_{14} ont des coefficients angulaires égaux à $2M$.

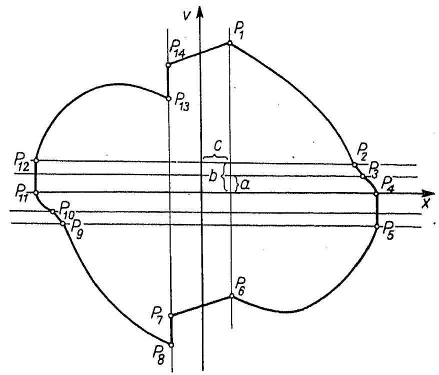

Fig. 2

On démontre sans peine que la courbe C ainsi construite jouit de la propriété formulée au n° 2. Le théorème se trouve ainsi démontré.

5. Remarque I. La construction de la courbe C suffit pour démontrer l'existence d'une au moins solution périodique de l'équation (1) seulement dans le cas de l'unicité des solutions de cette équation. Dans le cas contraire, on devrait construire deux suites de fonctions $\{f_n(x, v)\}$, $\{g_n(x)\}$ de classe C^1 satisfaisant aux hypothèses (2), (3) et (8) et uniformément convergentes vers les fonctions $f(x, v)$ et $g(x)$. Alors chacune des équations

$$x''+f_n(x, x')x'+g_n(x) = e(t) \tag{1_n}$$

admettrait au moins une solution $x_n(t)$ périodique de période ω. De la démonstration exposée aux n^os précédents il résulte que ces solutions pourraient être choisies de sorte que l'on ait

$$|x_n(t)| \leqslant L, \quad |x_n'(t)| \leqslant L \quad (t \geqslant 0,\ n = 1, 2, \ldots)$$

où L est une constante indépendante de n. Des équations (1_n) il suit que l'on aurait aussi

$$|x_n''(t)| \leqslant L' \quad (t \geqslant 0,\ n = 1, 2, \ldots).$$

De la suite $\{x_n(t)\}$ on pourrait donc extraire une suite partielle convergente vers une solution périodique de l'équation (1).

Remarque. II. De la démonstration du théorème il résulte immédiatement que, dans les hypothèses de ce théorème, toutes les intégrales de l'équation (1) sont bornées avec leurs dérivées premières dans tout l'intervalle $(0, +\infty)$. Cela cesse d'être vrai si, dans l'inégalité (8), on remplace la constante $Ma+E$ par une autre plus petite. En effet, l'équation (1) où

$$g(x) = Ma+E-M\varepsilon, \quad e(t) = E \quad \text{et} \quad f(x, a-\varepsilon) = -M \quad (x \geqslant 0, \varepsilon > 0)$$

admet la solution $x(t) = (a-\varepsilon)t$ qui n'est pas bornée.

Travaux cités

[1] C. Langenhop, *Note on Levinson's existence theorem for forced periodic solutions of a second order differential equation*, Journ. Math. Phys. 30 (1951), p. 36-39.

[2] S. Lefschetz, *Differential equations*, New York 1957.

[3] N. Levinson, *On the existence of periodic solutions for second order differential equations with a forcing term*, Journ. Math. Phys. 22 (1943), p. 41-48.

[4] R. Reissig, *Über die Existenz periodischer Lösungen für Differentialgleichungen 2. Ordnung mit einem Störungsglied*, Math. Nachrichten 14 (1956), p. 341-348.

[5] G. Sansone, R. Conti, *Equazioni differenziali non lineari*, Roma 1956.

Reçu par la Rédaction le 18. 11. 1958

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1960)

Sur une inégalité différentielle

par C. Olech et Z. Opial (Kraków)

1. Supposons que la fonction $f(x, y)$ définie dans l'ensemble B: $0 \leqslant x \leqslant h$, $-\infty < y < +\infty$ vérifie les conditions (C) de Carathéodory (cf. [4], p. 665), c'est-à-dire:

(i) pour tout y $f(x, y)$ est mesurable par rapport à x;

(ii) pour tout $x \in \langle 0, h\rangle$ $f(x, y)$ est continue par rapport à y;

(iii) il existe une fonction mesurable $M(x)$ telle l'on a pour tout point $(x, y) \in B$:

$$|f(x, y)| \leqslant M(x) \quad \text{et} \quad \int_0^h M(x)\,dx < +\infty. \tag{1}$$

Envisageons l'équation différentielle

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Toute fonction absolument continue $y(x)$ pour laquelle la relation

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$$

est vérifiée presque partout dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ est appelée solution de l'équation (2). On sait (cf. [4], p. 665-674 et [8], p. 140-146) que si la fonction $f(x, y)$ satisfait aux conditions (C), pour tout point $(x_0, y_0) \in B$ il existe au moins une solution de l'équation (2), définie dans tout l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ et égale à y_0 au point x_0. En particulier, il existe une solution de l'équation (2), définie dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ et égale à 0 au point 0. Bien plus, de même que pour les équations (2) à seconds membres continus, il existe une solution supérieure à droite de l'équation (2), définie dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ et égale à 0 au point 0 (cf. [3], § 1). Dans toute la suite nous la désignerons par $\psi(x)$.

2. Soit $\varphi(x)$ une fonction définie et continue dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$. Supposons qu'elle satisfasse presque partout dans l'intervalle envisagé à l'inégalité différentielle

$$\underline{D}_+\varphi(x) \leqslant f\big(x, \varphi(x)\big) \tag{3}$$