ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1960)

Sur la convergence des approximations successives pour l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$

par J. Kisyński (Lublin)

Van Kampen [2], Dieudonné [1] et Wintner [4] ont montré que pour l'équation différentielle ordinaire $y' = g(x, y)$ la suite des approximations successives de Picard est convergente non seulement dans le cas où la fonction $g(x, y)$ vérifie la condition de Lipschitz par rapport à y — ce qui était bien connu auparavant — mais aussi dans le cas où sont vérifiées certaines conditions plus générales suffisantes pour l'unicité. M. Zlámal m'a proposé d'étudier la question si des théorèmes analogues subsistent pour l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right). \tag{1}$$

Pour abréger l'exposé, je me bornerai à l'étude des problèmes les plus simples pour l'équation (1), c'est-à-dire des problèmes de Cauchy et de Darboux, que je vais énoncer sous une forme un peu plus générale.

Théorème. *La fonction $g(x)$ étant continue dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$, où $a > 0$, et la fonction $h(y)$ continue dans l'intervalle $\langle 0, b\rangle$, où $b > 0$, admettons qu'il existe un $a' \in \langle 0, a\rangle$ et un $b' \in \langle 0, b\rangle$ tels que la fonction $g(x)$ décroisse de b' à zéro dans l'intervalle $\langle 0, a'\rangle$, qu'elle soit constamment nulle dans l'intervalle $\langle a', a\rangle$, que $h(y)$ soit constamment nulle dans l'intervalle $\langle b', b\rangle$ et que dans l'intervalle $\langle 0, b'\rangle$ elle soit la fonction inverse de la fonction $g(x)$ dans l'intervalle $\langle 0, a'\rangle$. Supposons encore que la fonction $\sigma(x)$ soit de classe $C^{(1)}$ dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$ et la fonction $\tau(y)$ de classe $C^{(1)}$ dans l'intervalle $\langle 0, b\rangle$. Enfin, posons*

$$\Delta = \{(x, y); h(y) \leqslant x \leqslant a, g(x) \leqslant y \leqslant b\}$$

et supposons que la fonction $f(x, y, z, p, q)$ soit continue pour $(x, y) \in \Delta$, z, p, q quelconques, et qu'elle y vérifie, pour $(x, y) \in \Delta$ et $z, p, q, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}$ quelconques, l'inégalité

$$|f(x, y, z, p, q) - f(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| \leqslant \omega(|z-\bar{z}| + |p-\bar{p}| + |q-\bar{q}|), \tag{2}$$

où $\omega(\delta)$ est une fonction continue et non décroissante pour $\delta \in \langle 0, +\infty)$, telle que $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta) > 0$ pour $\delta > 0$ et

$$\int_0^\delta \frac{du}{\omega(u)} = +\infty \quad pour \quad \delta > 0. \tag{3}$$

Dans ces hypothèses il existe exactement une fonction $z(x, y)$, continue dans l'ensemble Δ avec ses dérivées $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ et $\partial^2 z/\partial x \partial y$, qui satisfait à l'équation (1) *dans l'ensemble Δ et vérifie les conditions*

$$z(x, y) = \sigma(x) + \tau(y), \quad si \quad y = g(x) \quad ou \quad x = h(y),$$

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = \sigma'(x), \quad si \quad y = g(x), \quad x \in \langle 0, a\rangle, \tag{4}$$
$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = \tau'(y), \quad si \quad x = h(y), \quad y \in \langle 0, b\rangle.$$

De plus, pour une fonction arbitraire $z_0(x, y)$, de classe $C^{(1)}$ dans l'ensemble Δ, on a l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} \left(\max_{(x,y)\in\Delta} |s_n(x, y) - s(x, y)|\right) = 0, \tag{5}$$

où $s(x, y) = \partial^2 z(x, y)/\partial x \partial y$ et $s_n(x, y) = \partial^2 z_n(x, y)/\partial x \partial y$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, et

$$z_n(x, y) = \sigma(x) + \tau(y) + \iint_{\Delta xy} f\left(u, v, z_{n-1}(u, v), \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}(u, v), \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}(u, v)\right) du dv \quad pour \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{6}$$

où

$$\Delta xy = \{(u, v); (u, v) \in \Delta, u \leqslant x, v \leqslant y\} \quad pour \quad (x, y) \in \Delta.$$

De l'égalité (5) *il résulte, en tenant compte des formules évidentes*

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = \sigma'(x) + \int_{g(x)}^{y} s(x, v) dv, \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = \tau'(y) + \int_{h(y)}^{x} s(u, y) du,$$
$$z(x, y) = \sigma(x) + \tau(y) + \iint_{\Delta xy} s(u, v) du dv \tag{7}$$

et

$$\frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x} = \sigma'(x) + \int_{g(x)}^{y} s_n(x, v) dv, \quad \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial y} = \tau'(y) + \int_{h(y)}^{x} s_n(u, y) du,$$
$$z_n(x, y) = \sigma(x) + \tau(y) + \iint_{\Delta xy} s_n(u, v) du dv, \tag{8}$$

que la suite $z_n(x, y)$ converge uniformément dans l'ensemble Δ vers la fonction $z(x, y)$ et que les suites des dérivées $\partial z_n(x, y)/\partial x$ et $\partial z_n(x, y)/\partial y$ convergent uniformément dans l'ensemble Δ vers les dérivées $\partial z(x, y)/\partial x$ et $\partial z(x, y)/\partial y$.

En vue de rendre plus claire l'idée de la démonstration, nous établirons séparément trois lemmes, dans lesquels nous supposerons vérifiées les hypothèses de notre théorème et nous utiliserons les notations introduites plus haut.

Lemme 1. *Si la fonction $r(x, y)$, continue et non négative, vérifie dans l'ensemble Δ l'inégalité*

$$r(x, y) \leqslant \omega\left(\iint_{\Delta xy} r(u, v) du dv + \int_{g(x)}^{y} r(x, v) dv + \int_{h(y)}^{x} r(u, y) du\right), \tag{9}$$

on a $r(x, y) \equiv 0$ pour $(x, y) \in \Delta$.

En effet, $r(x, y) = 0$ si $y = g(x)$ ou $x = h(y)$, donc la fonction $r(x, y)$ peut être prolongée d'une manière continue sur le rectangle

$$K = \{(x, y); 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b\},$$

en admettant $r(x, y) = 0$ pour $(x, y) \in K - \Delta$. La fonction prolongée est non négative et elle satisfait dans le rectangle K à l'inégalité

$$r(x, y) \leqslant \omega\left(\int_0^x\int_0^y r(u, v) du dv + \int_0^y r(x, v) dv + \int_0^x r(u, y) du\right).$$

Posons

$$R(t) = \max_{(x,y)\in K, x+v\leqslant t} r(x, y) \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0.$$

La fonction $R(t)$ est continue et non négative pour $t \in \langle 0, +\infty)$, de plus, on a $r(x, y) \leqslant R(x+y)$ pour $(x, y) \in K$ et

$$\int_0^x\int_0^y R(u+v) du dv \leqslant \tfrac{1}{2}x \int_0^y R(x+v) dv + \tfrac{1}{2}y \int_0^x R(u+y) du.$$

Par conséquent, pour $(x, y) \in K$ tels que $x + y \leqslant t$, on a

$$r(x, y) \leqslant \omega\left(\int_0^x\int_0^y R(u+v) du dv + \int_0^y R(x+v) dv + \int_0^x R(u+y) du\right)$$
$$\leqslant \omega\left(\tfrac{1}{2}(a+2) \int_x^{x+y} R(v) dv + \tfrac{1}{2}(b+2) \int_y^{x+y} R(u) du\right)$$
$$\leqslant \omega\left(\tfrac{1}{2}(a+b+4) \int_0^t R(\tau) d\tau\right),$$

d'où

$$R(t) \leqslant \omega\Big(\tfrac{1}{2}(a+b+4)\int_0^t R(\tau)\,d\tau\Big) \quad \text{pour} \quad t\in\langle 0, +\infty).$$

Supposons qu'il existe un $t_1 > 0$ tel que $R(t_1) > 0$ et désignons par t_0 le plus grand des nombres t tels que $R(\tau)\equiv 0$ pour $\tau\in\langle 0, t\rangle$. Alors on a $\int_0^{t_0} R(\tau)\,d\tau = 0$, $\int_0^{t} R(\tau)\,d\tau > 0$ pour $t > t_0$ et $\omega\big(\frac{1}{2}(a+b+4)\int_0^t R(\tau)\,d\tau\big) > 0$ pour $t > t_0$, donc en posant

$$\mu = \tfrac{1}{2}(a+b+4)\int_0^{t_1} R(\tau)\,d\tau$$

nous avons $\mu > 0$ et

$$\int_0^{\mu}\frac{du}{\omega(u)} = \frac{a+b+4}{2}\int_{t_0}^{t_1}\frac{R(t)}{\omega\big(\frac{1}{2}(a+b+4)\int_0^t R(\tau)\,d\tau\big)}\,dt \leqslant \frac{a+b+4}{2}(t_1-t_0)$$

en contradiction avec (3). Par suite, $R(t)\equiv 0$ pour $t\in\langle 0, +\infty)$, d'où $r(x, y)\equiv 0$ pour $(x, y)\in\Delta$.

LEMME 2. *Pour toute fonction $s_0(x, y)$, continue dans l'ensemble Δ, les fonctions $s_n(x, y)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, définies par la formule récurrente*

(10) $$s_n(x, y) = f\Big(x, y, \sigma(x)+\tau(y)+\iint_{\Delta xy} s_{n-1}(u, v)\,du\,dv,\ \sigma'(x)+\int_{g(x)}^{y} s_{n-1}(x, v)\,dv,\ \tau'(y)+\int_{h(y)}^{x} s_{n-1}(u, y)\,du\Big),$$

sont bornées dans leur ensemble et équicontinues dans l'ensemble Δ.

En effet, pour $\delta\in\langle 0, +\infty)$ admettons $\tilde\omega(\delta) = \sup|f(x, y, z, p, q)-f(x, y, \bar z, \bar p, \bar q)|$ où $(x, y)\in\Delta$, $-\infty < z, p, q, \bar z, \bar p, \bar q < +\infty$ et $|z-\bar z|+|p-\bar p|+|q-\bar q|\leqslant\delta$. Alors $\tilde\omega(\delta)\leqslant\omega(\delta)$ pour $\delta\in\langle 0, +\infty)$ et on a, pour $\delta_1, \delta_2\in\langle 0, +\infty)$ quelconques, l'inégalité $\tilde\omega(\delta_1+\delta_2)\leqslant\tilde\omega(\delta_1)+\tilde\omega(\delta_2)$. Par conséquent $\tilde\omega(\delta)\leqslant\tilde\omega(1+[\delta])\leqslant(1+[\delta])\cdot\tilde\omega(1)\leqslant(1+\delta)\cdot\omega(1)$ pour $\delta\in\langle 0, +\infty)$, donc $|f(x, y, 0, 0, 0)-f(x, y, z, p, q)|\leqslant\tilde\omega(|z|+|p|+|q|)\leqslant\omega(1)\cdot(1+|z|+|p|+|q|)$, d'où

(11) $$|f(x, y, z, p, q)|\leqslant L\cdot(1+|z|+|p|+|q|) \quad \text{pour} \quad (x, y)\in\Delta \quad \text{et} \quad z, p, q \quad \text{quelconques},$$

où

$$L = \max_{(x,y)\in\Delta}|f(x, y, 0, 0, 0)|+\omega(1).$$

Posons

(12) $$A = \max_{0\leqslant x\leqslant a}|\sigma(x)|, \quad B = \max_{0\leqslant y\leqslant b}|\tau(y)|, \quad C = \max_{0\leqslant x\leqslant a}|\sigma'(x)|, \quad D = \max_{0\leqslant y\leqslant b}|\tau'(y)|$$

et soit λ un nombre positif tel que $\lambda\geqslant 1+L\cdot(4+A+B+C+D)$ et $|s_0(x, y)|\leqslant\lambda e^{\lambda\cdot(x+y)}$ pour $(x, y)\in\Delta$. Supposons que l'on ait $|s_{n-1}(x, y)|\leqslant\lambda e^{\lambda\cdot(x+y)}$ pour $(x, y)\in\Delta$. Il s'ensuit, en tenant compte de (10), (11) et (12),

$$|s_n(x, y)|\leqslant L\cdot\Big(1+A+B+\iint_{\Delta xy}|s_{n-1}(u, v)|\,du\,dv+C+\int_{g(x)}^{y}|s_{n-1}(x, v)|\,dv+D+\int_{h(y)}^{x}|s_{n-1}(u, y)|\,du\Big)$$

$$\leqslant L\cdot\Big(1+A+B+C+D+\int_0^x\!\!\int_0^y \lambda e^{\lambda\cdot(u+v)}\,du\,dv+\int_0^y\lambda e^{\lambda\cdot(x+v)}\,dv+\int_0^x\lambda e^{\lambda\cdot(u+y)}\,du\Big)$$

$$\leqslant L\cdot(1+A+B+C+D+3e^{\lambda\cdot(x+y)}) < \lambda e^{\lambda\cdot(x+y)}$$

pour $(x, y)\in\Delta$, d'où il résulte par induction que $|s_n(x, y)|\leqslant\lambda e^{\lambda\cdot(x+y)}$ pour $(x, y)\in\Delta$ et $n = 0, 1, 2, \ldots$, donc les fonctions sont bornées dans leur ensemble. Posons

$$M = \lambda e^{\lambda\cdot(a+b)},$$

$$E = \{(x, y, z, p, q);\ (x, y)\in\Delta,\ |z|\leqslant A+B+abM,\ |p|\leqslant C+bM,\ |q|\leqslant D+aM\},$$

$$\omega_1(\delta) = \min\big(\omega(\delta),\ 2\max_{E}|f(x, y, z, p, q)|\big) \quad \text{pour} \quad \delta\in\langle 0, +\infty)$$

et soit $\omega_2(\delta)$ une fonction continue et non décroissante pour $\delta\in\langle 0, +\infty)$ telle que $\omega_2(0) = 0$ et

$$|f(x, y, z, p, q)-f(\bar x, \bar y, \bar z, \bar p, \bar q)|\leqslant\omega_2(|x-\bar x|+|y-\bar y|+|z-\bar z|+|p-\bar p|+|q-\bar q|)$$
$$\text{pour} \quad (x, y, z, p, q), (\bar x, \bar y, \bar z, \bar p, \bar q)\in E,$$

$$|g(x)-g(\bar x)|, \quad |\sigma(x)-\sigma(\bar x)|, \quad |\sigma'(x)-\sigma'(\bar x)|\leqslant\omega_2(|x-\bar x|) \quad \text{pour} \quad x, \bar x\in\langle 0, a\rangle,$$

$$|h(y)-h(\bar y)|, \quad |\tau(y)-\tau(\bar y)|, \quad |\tau'(y)-\tau'(\bar y)|\leqslant\omega_2(|y-\bar y|) \quad \text{pour} \quad y, \bar y\in\langle 0, b\rangle,$$

$$|s_0(x, y)-s_0(\bar x, \bar y)|\leqslant\omega_2(|x-\bar x|+|y-\bar y|) \quad \text{pour} \quad (x, y), (\bar x, \bar y)\in\Delta.$$

Posons

$$\omega_3(\delta) = \omega_2\big(\delta+(a+b+1)M\delta+2\omega_2(\delta)\big) \quad \text{pour} \quad \delta\in\langle 0, +\infty)$$

et définissons, pour $t \in \langle 0, +\infty)$ et $\delta \in \langle 0, +\infty)$, la fonction $\varepsilon(t, \delta)$ comme la solution de l'équation (¹)

$$\varepsilon(t, \delta) = \omega_3(\delta) + \omega_1\Big(\int_0^t \varepsilon(\tau, \delta)\, d\tau\Big).$$

Comme la fonction $\omega_1(\delta)$ est bornée dans l'intervalle $\langle 0, +\infty)$ et la condition (3) est vérifiée, la fonction $\varepsilon(t, \delta)$ est ainsi bien définie, continue et $\varepsilon(t, 0) \equiv 0$ pour $t \in \langle 0, +\infty)$. Evidemment $|s_0(x, y) - s_0(\bar{x}, y)| \leqslant \omega_2(|x-\bar{x}|) \leqslant \omega_3(|x-\bar{x}|) \leqslant \varepsilon(y, |x-\bar{x}|)$ pour $(x, y), (\bar{x}, y) \in \Delta$. Supposons que l'on ait $|s_{n-1}(x, y) - s_{n-1}(\bar{x}, y)| \leqslant \varepsilon(y, |x-\bar{x}|)$ pour $(x, y), (\bar{x}, y) \in \Delta$. Il s'ensuit, d'après (10),

$$|s_n(x, y) - s_n(\bar{x}, y)| \leqslant \omega_2\Big(|x-\bar{x}| + |\sigma(x) - \sigma(\bar{x})| + \Big|\iint_{\Delta xy} s_{n-1}(u, v)\, du\, dv -$$

$$- \iint_{\Delta \bar{x} y} s_{n-1}(u, v)\, du\, dv\Big| + |\sigma'(x) - \sigma'(\bar{x})| + \Big|\int_{\bar{x}}^{x} s_{n-1}(u, y)\, du\Big|\Big) +$$

$$+ \omega_1\Big(\int_{g(x)}^{y} |s_{n-1}(x, v) - s_{n-1}(\bar{x}, v)|\, dv\Big)$$

$$\leqslant \omega_3(|x-\bar{x}|) + \omega_1\Big(\int_0^y \varepsilon(v, |x-\bar{x}|)\, dv\Big) = \varepsilon(y, |x-\bar{x}|)$$

pour $(x, y), (\bar{x}, y) \in \Delta$, d'où il vient par induction

$$|s_n(x, y) - s_n(\bar{x}, y)| \leqslant \varepsilon(y, |x-\bar{x}|) \quad \text{pour} \quad (x, y), (\bar{x}, y) \in \Delta \quad \text{et} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

On a de même

$$|s_n(x, y) - s_n(x, \bar{y})| \leqslant \varepsilon(x, |y-\bar{y}|) \quad \text{pour} \quad (x, y), (x, \bar{y}) \in \Delta \quad \text{et} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

donc les fonctions $s_n(x, y)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ sont équicontinues dans l'ensemble Δ.

LEMME 3. *Pour toute fonction $s_0(x, y)$ continue dans l'ensemble Δ on a l'égalité*

$$\lim_{n\to\infty} \big(\max_{(x,y)\in\Delta} |s_n(x, y) - s_{n-1}(x, y)|\big) = 0,$$

où les fonctions $s_n(x, y)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, sont définies par la formule récurrente (10).

(¹) En introduisant cette équation j'utilise une idée due à Z. Szmydt [3].

En effet, posons

$$r_n(x, y) = |s_n(x, y) - s_{n-1}(x, y)|, \qquad R_n(x, y) = \sup_{k=0,1,2,\ldots} r_{n+k}(x, y)$$
$$\text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$r(x, y) = \lim_{n\to\infty} R_n(x, y).$$

En vertu du lemme 2, les fonctions $r_n(x, y)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, sont bornées dans leur ensemble et équicontinues dans l'ensemble Δ, il en est donc de même des fonctions $R_n(x, y)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, et la fonction $r(x, y)$ est continue dans l'ensemble Δ. De plus, la suite des fonctions $R_n(x, y)$ converge vers la fonction $r(x, y)$ uniformément dans l'ensemble Δ (ceci résulte non seulement du théorème de Dini sur la convergence des suites monotones de fonctions continues, mais découle aussi directement du fait que les fonctions $R_n(x, y)$ sont équicontinues). De (10) et (2) il vient

$$r_{n+1}(x, y) \leqslant \omega\Big(\iint_{\Delta xy} r_n(u, v)\, du\, dv + \int_{g(x)}^{y} r_n(x, v)\, dv + \int_{h(y)}^{x} r_n(u, y)\, du\Big)$$
$$\text{pour} \quad (x, y) \in \Delta \quad \text{et} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

d'où

$$r_{n+1+k}(x, y) \leqslant \omega\Big(\iint_{\Delta xy} R_n(u, v)\, du\, dv + \int_{g(x)}^{y} R_n(x, v)\, dv + \int_{h(y)}^{x} R_n(u, y)\, du\Big)$$
$$\text{pour} \quad (x, y) \in \Delta, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{et} \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

donc

$$R_{n+1}(x, y) \leqslant \omega\Big(\iint_{\Delta xy} R_n(u, v)\, du\, dv + \int_{g(x)}^{y} R_n(x, v)\, dv + \int_{h(y)}^{x} R_n(u, y)\, du\Big)$$
$$\text{pour} \quad (x, y) \in \Delta \quad \text{et} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

d'où il résulte que la fonction $r(x, y)$ satisfait à l'inégalité (9) et que l'on a, en vertu du lemme 1, $r(x, y) \equiv 0$ pour $(x, y) \in \Delta$. Par conséquent, la suite des fonctions $R_n(x, y)$ converge uniformément vers zéro dans l'ensemble Δ et le lemme est ainsi démontré.

Pour achever la démonstration de notre théorème, supposons que la fonction $z(x, y)$, continue dans l'ensemble Δ avec ses dérivées $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ et $\partial^2 z/\partial x \partial y$, y vérifie l'équation (1) et les conditions (4). Alors, en vertu de (7), la fonction continue $s(x, y) = \partial^2 z(x, y)/\partial x \partial y$ satisfait dans l'ensemble Δ à l'équation

$$s(x, y) = f\Big(x, y, \sigma(x) + \tau(y) + \iint_{\Delta xy} s(u, v)\, du\, dv,$$
$$\sigma'(x) + \int_{g(x)}^{y} s(x, v)\, dv,\ \tau'(y) + \int_{h(y)}^{x} s(u, y)\, du\Big). \tag{13}$$

Inversement, supposons que la fonction continue $s(x,y)$ vérifie l'équation (13) dans l'ensemble Δ. Alors, la fonction $z(x,y) = \sigma(x)+\tau(y)+ \iint\limits_{\Delta xy} s(u,v)\,du\,dv$, ainsi que ses dérivées $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ et $\partial^2 z/\partial x\partial y$ sont continues dans l'ensemble Δ, elle y satisfait à l'équation (1) et remplit les conditions (4).

Supposons que les fonctions continues $s(x,y)$ et $\tilde{s}(x,y)$ vérifient l'équation (13) dans l'ensemble Δ. Alors, d'après (2), la fonction $r(x,y) = |s(x,y)-\tilde{s}(x,y)|$ satisfait à l'inégalité (9), donc, en vertu du lemme 1, on a $s(x,y)\equiv\tilde{s}(x,y)$ pour $(x,y)\in\Delta$. Par conséquent il existe au plus une fonction continue dans l'ensemble Δ qui y satisfait à l'équation (13).

Considérons une fonction arbitraire $s_0(x,y)$, continue dans l'ensemble Δ, et une sous-suite quelconque $s_{n_m}(x,y)$, $m=1,2,3,\ldots$, de la suite $s_n(x,y)$, $n=0,1,2,\ldots$, définie par la formule récurrente (10). En vertu du lemme 2 et du théorème d'Arzela, on peut extraire de la suite $s_{n_m}(x,y)$ une sous-suite $s_{n_{m_k}}(x,y)$, $k=1,2,3,\ldots$, convergente uniformément dans l'ensemble Δ vers une fonction continue $s(x,y)$. D'après le lemme 3, la suite $s_{n_{m_k}+1}(x,y)$ converge uniformément dans l'ensemble Δ vers la même fonction $s(x,y)$, donc, d'après (10), cette fonction vérifie l'équation (13). Il existe donc exactement une fonction $s(x,y)$ continue dans l'ensemble Δ qui y vérifie l'équation (13) et, pour toute fonction $s_0(x,y)$ continue dans l'ensemble Δ on peut extraire de chaque sous-suite $s_{n_m}(x,y)$ de la suite $s_n(x,y)$ une sous-suite $s_{n_{m_k}}(x,y)$ qui converge uniformément dans l'ensemble Δ vers cette fonction $s(x,y)$. Ceci prouve que pour toute fonction $s_0(x,y)$ continue dans l'ensemble Δ la suite $s_n(x,y)$ converge uniformément dans l'ensemble Δ vers la fonction $s(x,y)$ et, avec (10), (8) et (6), achève la démonstration du théorème.

Travaux cités

[1] J. Dieudonné, *Sur la convergence des approximations successives*, Bull. Sci. Math. 2, 69 (1945), p. 62-72.

[2] E. R. van Kampen, *Notes on systems of ordinary differential equations*, Amer. J. Math. 63 (1941), p. 371-376.

[3] Z. Szmydt, *Sur un nouveau type de problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4, 2 (1956), p. 67-72.

[4] A. Wintner, *On the convergence of successive approximations*, Amer. J. Math. 68 (1946), p. 13-19.

Reçu par la Rédaction le 10. 6. 1958