ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1960)

Sur un problème aux limites pour l'équation différentielle du second ordre

par Z. Opial (Kraków)

1. Considérons l'équation différentielle du second ordre

$$u'' = f(t, u, u') \tag{1}$$

et la condition aux limites

$$u'(a) = A, \quad u(b)+hu'(b) = B, \tag{2}$$

où $a < b$, h, A et B sont des constantes. Pour simplifier, nous supposerons que la fonction $f(t, u, v)$ est définie et continue dans tout l'espace à trois dimensions des variables t, u et v. Dans certaines hypothèses supplémentaires sur la fonction $f(t, u, v)$, la constante h et la longueur de l'intervalle (a, b), nous allons montrer que le problème aux limites (2) pour l'équation (1) admet une solution unique. On obtiendra ainsi la généralisation d'un théorème établi par C. Corduneanu [1].

Dans la seconde partie de la présente note nous nous occuperons de trois autres problèmes aux limites pour l'équation différentielle du second ordre à second membre indépendant de la dérivée première.

2. Remplaçons l'équation (1) par le système équivalent d'équations du premier ordre

$$v' = f(t, u, v), \quad u' = v. \tag{3}$$

Au lieu des conditions aux limites (2), on obtiendra les conditions suivantes

$$v(a) = A, \quad u(b)+hv(b) = B \tag{4}$$

qui peuvent être interprétées comme il suit: le point initial, pour $t = a$, de l'intégrale $u(t)$, $v(t)$ du système (3) doit être situé sur la droite

$$t = a, \quad v = A \tag{5}$$

tandis que le point final, pour $t = b$, doit être situé sur la droite

$$t = b, \quad u+hv = B. \tag{6}$$

Parmi les intégrales du système (3), issues des points de la droite (5), existe-t-il une au moins qui coupe la droite (6)? Est-il possible qu'il en existe plusieurs? Dans certaines hypothèses, la réponse à ces questions est donnée par le théorème suivant:

THÉORÈME I. *Supposons que la fonction $f(t, u, v)$ ait dans l'ensemble R: $a \leqslant t \leqslant b$, $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$, des premières dérivées par rapport aux variables u et v continues et que l'on ait dans l'ensemble R:*

$$(7) \qquad |f_u(t, u, v)| \leqslant M$$

et, pour un K non négatif

$$(8) \qquad f_v(t, u, v) \leqslant K.$$

Dans ces hypothèses, le problème aux limites (2) pour l'équation (1) admet une solution unique. si la longueur $b-a$ de l'intervalle (a, b) est inférieure à celle de l'intervalle $\langle 0, a\rangle$, dans lequel l'intégrale $w(t)$ de l'équation de Riccati

$$(9) \qquad w' = w^2+Kw+M,$$

elle que $w(0) = 0$, satisfait à l'inégalité

$$(10) \qquad w(t) \leqslant 1/|h|$$

dans le cas où $h \neq 0$, et inférieure à la longueur de l'intervalle d'existence $\langle 0, a)$ de l'intégrale $w(t)$ dans le cas où $h = 0$.

Démonstration. Considérons la famille à un paramètre d'intégrales du système (3) issues des points de la droite (5):

$$u = u(t, \lambda), \qquad v = v(t, \lambda)$$

pour lesquelles on a

$$(11) \qquad u(a, \lambda) = \lambda, \qquad v(a, \lambda) = A.$$

Dans le plan $t = b$ considérons la courbe L:

$$(12) \qquad t = b, \qquad u = u(b, \lambda), \qquad v = v(b, \lambda) \qquad (-\infty < \lambda < +\infty).$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que la courbe L coupe la droite (6) seulement en un point. Nous allons montrer que nos hypothèses sont bien suffisantes pour qu'il en soit ainsi. La courbe L envisagée dans le plan $t = b$ et dans le système des coordonnées (u, v) coupe toute droite parallèle à l'axe des v seulement en un point. On a de plus

$$(13) \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} u(b, \lambda) = +\infty, \qquad \lim_{\lambda\to-\infty} u(b, \lambda) = -\infty.$$

En effet, d'après un théorème bien connu (v. p. ex. [4], p. 33) la dérivée de la fonction $u(t, \lambda)$ par rapport à λ satisfait à l'équation différentielle linéaire

$$(14) \qquad \left(\frac{\partial u(t, \lambda)}{\partial \lambda}\right)'' = \Phi_1(t, \lambda)\left(\frac{\partial u(t, \lambda)}{\partial \lambda}\right)' + \Phi_2(t, \lambda)\,\frac{\partial u(t, \lambda)}{\partial \lambda},$$

où les fonctions continues $\Phi_1(t, \lambda)$ et $\Phi_2(t, \lambda)$ sont égales aux dérivées de la fonction $f(t, u, v)$ par rapport à v et u respectivement, prises en des points convenables de l'ensemble R. Il en résulte, d'après les inégalités (7) et (8), que l'on a pour tout $t \in \langle a, b\rangle$ et λ quelconque

$$(15) \qquad \Phi_1(t, \lambda) \leqslant K \quad \text{et} \quad |\Phi_2(t, \lambda)| \leqslant M.$$

Introduisons les notations:

$$(16) \qquad U(t, \lambda) = \partial u(t, \lambda)/\partial \lambda, \qquad V(t, \lambda) = \partial v(t, \lambda)/\partial \lambda.$$

En vertu de (11) on a, pour $t = a$:

$$(17) \qquad U(a, \lambda) = 1, \qquad U'(a, \lambda) = V(a, \lambda) = 0.$$

De l'équation (14) il suit que, pour tout λ fixe, la fonction

$$(18) \qquad z(t, \lambda) = -U'(t, \lambda)/U(t, \lambda) = -V(t, \lambda)/U(t, \lambda)$$

pour laquelle on a — en vertu de (17) — $z(a, \lambda) = 0$, satisfait à l'équation de Riccati

$$z' = z^2+\Phi_1(t, \lambda)z-\Phi_2(t, \lambda).$$

Des inégalités (15) il résulte que la fonction $z(t, \lambda)$ satisfait à l'inégalité différentielle

$$z' \leqslant z^2+Kz+M$$

dans tout intervalle où elle prend des valeurs positives et à l'inégalité

$$z' \geqslant z^2+Kz-M$$

dans tout intervalle où elle prend des valeurs négatives. De ces deux inégalités on obtient facilement l'inégalité

$$D|z| \leqslant z^2+K|z|+M,$$

où $D|z|$ désigne la dérivée à droite de la fonction $|z(t, \lambda)|$. D'après le théorème bien connu sur les inégalités différentielles ([5], p. 119), il s'ensuit

$$(19) \qquad |z(a+t, \lambda)| \leqslant w(t),$$

où $w(t)$ est l'intégrale de l'équation (9) intervenant dans l'énoncé du théorème. D'après la définition (18) on a donc, pour tout λ fixe,

$$U(b,\lambda) \geqslant \exp\Big(-\int_0^{b-a} w(s)\,ds\Big) = m > 0,$$

où m est une constante positive, indépendante de λ. Cette dernière inégalité, en vertu de la définition (16), signifie que pour tout λ

$$\partial u(t,\lambda)/\partial\lambda|_{t=b} \geqslant m > 0, \tag{20}$$

d'où il résulte immédiatement que la courbe L coupe toute droite parallèle à l'axe des v exactement en un point et que l'on a les relations (13).

De ce que nous venons de démontrer il résulte que l'équation de la courbe L peut être écrite sous la forme $v = v(u)$. Nous allons montrer que, dans l'hypothèse que $h \neq 0$, sur la courbe L on a constamment

$$|dv/du| \leqslant 1/|h| - \varepsilon, \tag{21}$$

où ε est un nombre positif suffisamment petit. En effet, sur la courbe L on a

$$\frac{dv}{du} = \left[\frac{\partial v(t,\lambda)/\partial\lambda}{\partial u(t,\lambda)/\partial\lambda}\right]_{t=b} = \frac{V(b,\lambda)}{U(b,\lambda)}.$$

D'après (18) et (19) on a donc

$$|dv/du| \leqslant w(b-a).$$

La fonction $w(t)$ est croissante au sens strict et, d'après l'hypothèse, $b-a < \alpha$. On a donc pour un ε suffisamment petit

$$w(b-a) \leqslant 1/|h| - \varepsilon$$

et, par conséquent, l'inégalité (21).

Il est aisé de voir que les relations (13) et de l'inégalité (21) il résulte immédiatement que la courbe L coupe la droite (6) en un seul point. En effet, en vertu de (21) la courbe L: $v = v(u)$ est située dans le plan $t = b$ entre les deux droites

$$v = v(0) + (1/|h| - \varepsilon)u \quad \text{et} \quad v = v(0) - (1/|h| - \varepsilon)u.$$

Ce fait et les relations (13) garantissent que la courbe L coupe la droite (6):

$$v = -\frac{1}{h}u + \frac{B}{h}$$

au moins en un point. L ne peut la couper en plusieurs points, sinon le théorème des accroissements finis nous conduirait à une contradiction avec l'inégalité (21).

Dans le cas où $h = 0$, les relations (13) et l'inégalité (20) suffisent pour conclue que la courbe L coupe la droite (6): $u = B$, en un seul point.

Le théorème I se trouve ainsi démontré.

3. Il est aisé de vérifier que l'évaluation de l'intervalle d'existence et d'unicité des solutions du problème (2) pour l'équation (1), donnée par le théorème I, est la meilleure possible. Il suffit de prendre, à cet effet, l'équation à coefficients constants

$$u'' = Ku' - Mu \tag{22}$$

et de poser: $a = 0$, $h = 0$ et $A = 0$. Toute solution $u(t)$ de l'équation (22) est une combinaison linéaire de deux solutions indépendentes $u_1(t)$ et $u_2(t)$, qui peuvent évidemment être choisies de sorte que l'on ait

$$u_1(0) = 1, \quad u_1'(0) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad u_2'(0) = 1.$$

On vérifie sans peine que l'intégrale $u_1(t)$ s'annule pour $t = \alpha$, où α a la même signification que dans l'énoncé du théorème I. Il en résulte que le problème aux limites

$$u'(0) = 0, \quad u(\alpha) = B$$

pour l'équation (22) n'admet une solution que dans le cas où $B = 0$ et que dans ce cas spécial il en admet une infinité.

4. L'équation de Riccati (9) s'intègre évidemment par des quadratures et on pourrait ainsi obtenir des évaluations effectives pour la longueur de l'intervalle d'existence et d'unicité des solutions du problème (2). Nous nous bornerons seulement au cas le plus simple où $K = 0$. L'équation (9) se réduit alors à l'équation

$$w' = w^2 + M$$

et pour l'intégrale $w(t)$, telle que $w(0) = 0$, on obtient la formule

$$w(t) = \sqrt{M}\,\mathrm{tg}\sqrt{M}\,t.$$

La longueur $b-a$ de l'intervalle (a,b) d'existence et d'unicité des solutions du problème (2) doit donc satisfaire à l'inégalité

$$b-a < \frac{1}{\sqrt{M}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{\sqrt{M}h} \tag{23}$$

dans le cas où $h \neq 0$ et à l'inégalité

$$b-a < \frac{\pi}{2\sqrt{M}} = \lim_{|h|\to 0}\frac{1}{\sqrt{M}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{\sqrt{M}h} \tag{24}$$

si $h = 0$. Dans la note déjà mentionnée, C. Corduneanu a obtenu la relation suivante entre la longueur de l'intervalle (a, b), la valeur de la constante M et le coefficient h:

$$M < \frac{2}{(b-a)^2 + 2|h|(b-a)}. \tag{25}$$

Par un calcul élémentaire, bien qu'assez pénible, et qu'il est inutile de répéter ici, on peut montrer que les inégalités (23) et (24) entraînent toujours l'inégalité (25).

5. Pour le problème aux limites

$$u(a) + hu'(a) = A, \quad u'(b) = B, \tag{2'}$$

on pourrait facilement établir un théorème d'existence et d'unicité analogue au théorème I. A cet effet il faudrait seulement remplacer l'inégalité (8) par celle-ci:

$$f_v(t, u, v) \geqslant -K$$

avec un $K \geqslant 0$ et appliquer ensuite le théorème I à l'équation

$$u'' = f(-t, u, -u')$$

et au problème aux limites

$$u(-b) = -B, \quad u(-a) - hu'(-a) = A.$$

6. Notons que C. Corduneanu [1] a montré comment on peut ramener au problème considéré (2) ou (2') un problème aux limites plus général:

$$h_1 u(a) + h_2 u'(a) = A, \quad k_1 u(b) + k_2 u'(b) = B$$

dans le cas où $|h_2| + |k_2| > 0$.

7. Remplaçons maintenant l'équation (1) par l'équation

$$u'' = f(t, u) \tag{26}$$

dont le second membre ne dépend pas de la dérivée première et considérons les trois conditions aux limites suivantes:

(I) $\quad u(0) = A, \quad \sup|u(t)| < +\infty, \quad 0 \leqslant t < +\infty,$

(II) $\quad u'(0) = B, \quad \sup|u(t)| < +\infty, \quad 0 \leqslant t < +\infty,$

(III) $\quad u'(0) - hu(0) = C \quad (h > 0), \quad \sup|u(t)| < +\infty, \quad 0 \leqslant t < +\infty.$

Dans certaines hypothèses sur la fonction $f(t, u)$, C. Corduneanu [2] a démontré l'existence et l'unicité des solutions de chacun de ces trois problèmes aux limites pour l'équation (26). Nous allons montrer que le théorème de C. Corduneanu peut être considérablement généralisé. A cet effet, il est commode de séparer le problème d'existence de celui d'unicité des solutions des problèmes aux limites considérés. C'est dans cet ordre d'idées que nous allons d'abord énoncer les théorèmes d'existence et nous nous occuperons ensuite de la question d'unicité.

THÉORÈME II. *Supposons que la fonction $f(t, u)$ soit définie et continue dans l'ensemble $0 \leqslant t < +\infty$, $-\infty < u < +\infty$ et qu'il existe deux nombres a et b $(a < b)$ tels que*

$$f(t, u) \leqslant 0 \quad \textit{pour} \quad t \geqslant 0 \quad \textit{et} \quad u \leqslant a, \tag{27}$$

$$f(t, u) \geqslant 0 \quad \textit{pour} \quad t \geqslant 0 \quad \textit{et} \quad u \geqslant b. \tag{28}$$

Dans ces hypothèses, les problèmes aux limites (I) *et* (III) *pour l'équation* (26) *admettent au moins une solution.*

Quant au problème (I), la démonstration du théorème II s'obtient immédiatement de la remarque II de notre travail [3]. Afin de pouvoir appliquer le même raisonnement au problème (III), il suffit de choisir deux nombres u_1 et u_2 tels que l'on ait

$$u_1 \leqslant a, \quad u_2 \geqslant b, \quad hu_1 + C < 0 \quad \text{et} \quad hu_2 + C > 0, \tag{29}$$

ce qui est toujours possible, puisque par hypothèse $h > 0$. En effet, les deux dernières des inégalités (29) signifient que dans l'espace (t, u, v):

1° le point $P(0, u_1, hu_1 + C)$ est situé au-dessous du plan $v = 0$,

2° le point $Q(0, u_2, hu_2 + C)$ est situé au-dessus de ce plan.

Il en résulte que l'intégrale du système

$$u' = v, \quad v' = f(t, u), \tag{30}$$

équivalent à l'équation (26), issue du point P sort du tuyau

T: $\quad t \geqslant 0, \quad u_1 \leqslant u \leqslant u_2, \quad -\infty < v < +\infty$

par la surface

$$t \geqslant 0, \quad u = u_1, \quad v \leqslant 0 \tag{31}$$

tandis que l'intégrale issue du point Q sort de T par la surface

$$t \geqslant 0, \quad u = u_2, \quad v \geqslant 0. \tag{32}$$

Il en résulte qu'il existe une intégrale du système (30), issue d'un point du segment

$$t = 0, \quad v = hu + C, \quad u_1 \leqslant u \leqslant u_2,$$

qui reste pour $t \geqslant 0$ à l'intérieur de T.

Théorème III. *Supposons que la fonction $f(t, u)$ soit définie et continue dans l'ensemble $0 \leqslant t < +\infty$, $-\infty < u < +\infty$ et qu'il existe trois nombres a, b $(a < b)$ et $m > 0$ tels que*

(33) $$f(t, u) \leqslant -m \quad \textit{pour} \quad t \geqslant 0 \quad \textit{et} \quad u \leqslant a,$$

(34) $$f(t, u) \geqslant m \quad \textit{pour} \quad t \geqslant 0 \quad \textit{et} \quad u \geqslant b.$$

Dans ces hypothèses, le problème aux limites (II) *pour l'équation* (26) *admet au moins une solution.*

Pour obtenir la démonstration de ce théorème, il suffit de modifier un peu la démonstration du théorème précédent. Pour fixer les idées, supposons que l'on ait par exemple $B > 0$. Choisissons les nombres u_1 et u_2 de sorte que l'on ait $u_2 = b$, $u_1 + Bt - \frac{1}{2}mt^2 < a$ pour tout $t \geqslant 0$. De cette dernière inégalité et de l'hypothèse (33) il résulte que l'intégrale du système (30), issue du point $(0, u_1, B)$, sort du tuyau T par la surface (31), tandis que l'intégrale du même système, issue du point $(0, u_2, B)$, sort de T par la surface (32). Il s'ensuit que parmi les intégrales du système (30), issues des points du segment

$$t = 0, \quad u_1 \leqslant u \leqslant u_2, \quad v = B,$$

il existe au moins une qui reste pour tout $t \geqslant 0$ dans le tuyau T. Le théorème III se trouve ainsi démontré.

8. Les deux théorèmes précédents donnent des conditions suffisantes d'existence des solutions des problèmes aux limites (I)-(III) pour l'équation (26). Le théorème suivant résout, dans certains cas, le problème d'unicité de telles solutions.

Théorème IV. *Si la fonction continue $f(t, u)$ est non décroissante par rapport à la variable u, les problèmes aux limites* (I) *et* (III) *pour l'équation* (26) *ne peuvent admettre plus d'une solution.*

Si la fonction continue $f(t, u)$ est croissante au sens strict par rapport à la variable u, le problème aux limites (II) *pour l'équation* (26) *ne peut admettre plus d'une solution.*

Démonstration. Pour la démonstration par l'absurde supposons qu'il existe deux solutions $u(t)$ et $v(t)$ différentes d'un quelconque de ces trois problèmes. Il est aisé de voir que l'on pourrait alors trouver un $t_0 \geqslant 0$ tel que l'on ait

$$[u(t_0) - v(t_0)][u'(t_0) - v'(t_0)] > 0.$$

D'après les hypothèses du théorème IV il en résulte que pour $t \geqslant t_0$ la différence $u'(t) - v'(t)$ est positive et non décroissante si $u(t_0) - v(t_0) > 0$,

et négative et non croissante si $u(t_0) - v(t_0) < 0$. On a donc en tout cas

$$\lim_{t \to +\infty} |u(t) - v(t)| = +\infty$$

et la contradiction est manifeste.

9. Remarque I. Dans le cas du problème (II) l'hypothèse de la croissance au sens strict de la fonction $f(t, u)$ peut bien être remplacée par la même hypothèse, faite seulement pour $t = 0$, ou bien pour un $t_0 \geqslant 0$ quelconque.

Remarque II. Il est à souligner que ni dans les théorèmes d'existence, ni dans le théorème sur l'unicité des solutions des problèmes aux limites envisagés nous n'avions besoin de l'hypothèse de l'unicité des solutions du problème initial de Cauchy.

Remarque III. Dans certaines hypothèses sur la fonction $f(t, u, v)$, analogues aux hypothèses (27), (28) et (33), (34), on pourrait démontrer de la même manière quelques théorèmes d'existence et d'unicité des solutions des problèmes aux limites (I)-(III), non seulement pour l'équation (26), mais aussi pour l'équation générale (1).

Travaux cités

[1] C. Corduneanu, *Asupra unei probleme la limită pentru ecuaţiile diferenţiale neliniare de ordinul al doilea*, Analele Stiinţifice Iaşi, Sec. I, 1, nr 1-2 (1955), p. 11-16.

[2] — *Probleme la limită pe simiaxa pentru ecuaţiile diferenţiale neliniare de ordinul al doilea*, Studii şi Corc. Stiinţifice, Seria I, 6, nr 1-2 (1955), p. 163-171.

[3] Z. Opial, *Sur les solutions bornées de l'équation $u'' = f(t, u, u')$*, Ann. Polon. Math. 4 (1958), p. 314-324.

[4] G. Sansone, *Equazioni differentiali nel campo reale*, Parte prima, Bologna 1948.

[5] T. Ważewski, *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Ann. Soc. Pol. Math. 23 (1950), p. 112-166.

Reçu par la Rédaction le 21. 10. 1958