Travaux cités

[1] M. Krzyżański, *Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique déterminées par les conditions initiales*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 18 (1945), p. 145-156.

[2] — *Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique déterminées par les conditions initiales* (note complémentaire), Annales de la Société Polonaise de Mathématique 20 (1947), p. 7-9.

[3] — *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*, cz. I, Warszawa 1957, en particulier p. 177-183.

[4] M. Picone, *Sul problema della propagazione del calore in un mezzo privo di frontiera...*, Mathematische Annalen 10 (1929), p. 701-712.

[5] — *Nuove formole di maggiorazioni per gl'integrali delle equazioni a derivate parziali del second'ordine ellittico-paraboliche*, Rendiconti R. Accad. dei Lincei 17 (1938).

[6] Л.Н. Слободецкий, *Теория потенциала для параболических уравнений*, ДАН СССР 103 (1955), p. 19-22.

[7] Р. Выборны, *О свойствах решений некоторых краевых задач дла уравнений параболического типа*, ДАН СССР 117 (1957), p. 563-565.

Reçu par la Rédaction le 12. 5. 1958

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1960)

Sur un problème généralisé de Vécoua

par J. Wolska-Bochenek (Warszawa)

Dans le travail [1] (voir aussi [5], p. 203) I. N. Vécoua a posé et résolu le problème qui consiste à déterminer une fonction holomorphe à l'intérieur d'un domaine S^+, limité par la ligne fermée L, qui satisfait à la condition limite suivante:

$$\text{(1)}\qquad \operatorname{re}\sum_{j=0}^{m}\Big\{a_j(t_0)\,\Phi^{(j)}(t_0)+\int_L h_j(t_0,t)\,\Phi^{(j)}(t)\,ds\Big\}=f(t_0)$$

en tout point t_0 de la ligne L. Les fonctions données $a_0(t),\ldots,a_m(t)$ sont complexes, définies pour $t\in L$ et satisfont à la condition de Hölder; $f(t)$ est une fonction réelle donnée, satisfaisant à la condition de Hölder et les fonctions données $h_j(t_0,t)$ sont complexes, définies pour $t\in L$, $t_0\in L$, par la formule

$$\text{(2)}\qquad h_j(t_0,t)=\frac{h_j^{(0)}(t_0,t)}{|t-t_0|^{\alpha}}\qquad(0\leqslant\alpha\leqslant1)$$

où $h_j^{(0)}(t_0,t)$ satisfont à la condition de Hölder. $\Phi^{(j)}(t_0)$ désigne la valeur limite $[\Phi^{(j)}(t_0)]^+$ de la j-ième dérivée de la fonction $\Phi(z)$; l'existence des valeurs limites précédentes est donc supposée.

En particulier, pour $m=0$ on obtient le problème de Hilbert-Riemann. Le problème aux limites de Poincaré est aussi un cas particulier du problème (1).

La méthode que I. N. Vécoua a utilisée pour traiter le problème précédent est basée sur sa représentation intégrale des fonctions holomorphes et conduit à la résolution d'une équation intégrale singulière.

Dans le cas $m\geqslant1$ la fonction inconnue $\Phi(z)$ est cherchée sous la forme

$$\text{(3)}\qquad \Phi(z)=\int_L(1-z/t)^{m-1}\log(1-z/t)\,\mu(t)\,ds+\int_L\mu(t)\,ds+iC,$$

où $\mu(t)$ est la fonction réelle inconnue, satisfaisant à la condition de Hölder, C est une constante réelle inconnue. Pour la fonction $\log(1-z/t)$

on prend la branche qui est égale à zéro pour $z = 0$ et t donné. Il en résulte que le problème (1) est ramené à l'équation intégrale suivante:

$$A(t_0)\mu(t_0)+\int_L N(t_0, t)\mu(t)\,ds = f(t_0)-C\delta(t_0), \tag{4}$$

où l'on a posé

$$A(t_0) = \operatorname{re}\{(-1)^m(m-1)!\,\pi i t_0^{1-m}\bar{t}_0' a_m(t_0)\},$$

$$\delta(t_0) = \operatorname{re}\Big\{ia_0(t_0)+i\int_L h_0(t_0, t)\,ds\Big\},$$

$$\begin{aligned} N(t_0, t) = \sum_{j=0}^{m} \operatorname{re}\Big\{a_j(t_0)N_j(t_0, t)+\int_L h_j(t_0, t_1)N_j(t_1, t)\,ds_1\Big\}+ \\ +\operatorname{re}\{(-1)^m(m-1)!\,\pi i h_m(t_0, t)t^{1-m}\bar{t}'\}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$N_j(t_0, t) = (-1)^j\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-j)}{t^j}\left(1-\frac{t_0}{t}\right)^{m-j-1}\times$$
$$\times\left\{\log\left(1-\frac{t_0}{t}\right)+\frac{1}{m-1}+\ldots+\frac{1}{m-j}\right\},$$

$$N_m(t_0, t) = \frac{(-1)^m(m-1)}{t^{m-1}(t-t_0)}.$$

L'équation (4) possède donc un noyau du type de Cauchy de la forme

$$N(t_0, t) = \frac{K(t_0, t)}{t-t_0}, \tag{6}$$

où la fonction $K(t_0, t)$ satisfait à la condition de Hölder. Dans le cas $m = 0$ la fonction $\Phi(z)$ est cherchée sous la forme

$$\Phi(z) = \int_L \frac{\mu(t)\,ds}{1-z/t}+iC \tag{7}$$

et la condition limite (1) prend la forme

$$\operatorname{re}\Big\{a_0(t_0)\Phi(t_0)+\int_L h_0(t_0, t)\Phi(t)\,ds = f(t_0) \tag{8}$$

qui conduit à l'équation intégrale (4), où on a posé $m = 0$ dans les expressions (5).

La discussion de I. N. Vécoua, concernant tous les cas de l'existence de la solution de l'équation intégrale (4), est très complète. En particulier I. N. Vécoua a démontré que le problème (1) peut être résolu *pour toute fonction* $f(t)$ dans le cas où le nombre k' des solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène associée à l'équation (4) est égal à 0 ou 1 ($k' = 0$, $k' = 1$); en outre, pour $k' = 0$ le problème (1) peut être résolu *pour toute fonction* $f(t)$ *et toute constante* C.

Dans ce travail nous nous proposons de trouver une fonction $\Phi(z)$, holomorphe à l'intérieur du domaine S^+, limité par la ligne fermée L, qui satisfasse à la condition limite suivante:

$$\begin{aligned} \operatorname{re}\sum_{j=0}^{m}\Big\{a_j(t)\Phi^{(j)}(t)+\int_L h_j(t, \tau)\Phi^{(j)}(\tau)\,d\sigma\Big\} \\ = f(t)+F[t, \Phi(t), \Phi'(t), \ldots, \Phi^{(m)}(t)] \end{aligned} \tag{9}$$

en tout point de la ligne L, $d\sigma$ désignant l'élément de longueur de la ligne L au point τ, $\Phi^{(j)}(t)$ la valeur limite $[\Phi^{(j)}(t)]^+$ de la j-ième dérivée de la fonction $\Phi(z)$.

On admet les hypothèses suivantes:

I. La ligne fermée L possède en tout point $t(s)\in L$ une tangente continue et l'angle que font les tangentes aux points t et t_1 de la ligne L satisfait à la condition de Hölder

$$|\delta_{tt_1}| < k|t-t_1|^\gamma \quad (0 < \gamma \leqslant 1).$$

II. Les fonctions données complexes $a_0(t), \ldots, a_m(t)$ sont définies pour $t\in L$ et satisfont à la condition de Hölder:

$$|a_j(t)-a_j(t_1)| < k_a|t-t_1|^\beta \quad (0 < \beta \leqslant \gamma;\ j = 0, 1, \ldots, m).$$

III. Les fonctions données complexes $h_j(t, \tau)$ sont définies pour $t\in L$, $\tau\in L$ par la formule

$$h_j(t, \tau) = \frac{h_j^{(0)}(t, \tau)}{|t-\tau|^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1),$$

où les fonctions $h_j^{(0)}(t, \tau)$ satisfont à la condition de Hölder:

$$|h_j^{(0)}(t, \tau)-h_j^{(0)}(t_1, \tau)| < k_h|t-t_1|^\beta.$$

IV. La fonction donnée $f(t)$, définie pour $t\in L$, est réelle et satisfait à la condition de Hölder:

$$|f(t)-f(t_1)| < k_f|t-t_1|^\beta.$$

V. La fonction donnée réelle $F[t, u_0, u_1, \ldots, u_m]$ est définie dans le domaine

$$t\in L, \quad |u_j| \leqslant R \quad (j = 0, 1, \ldots, m)$$

(où R est une constante positive réelle) et satisfait à la condition suivante:

$$|F[t, u_0, u_1, \ldots, u_m] - F[t', u_0', u_1', \ldots, u_m']| < k_F\Big[|t-t'|^\beta + \sum_{j=0}^{m-1} |u_j - u_j'|^\beta + |u_m - u_m'|\Big].$$

D'après les recherches de I. N. Vécoua [1], toute fonction $\Phi(z)$ holomorphe dans le domaine S^+, dont les dérivées jusqu'à l'ordre m admettent des valeurs limites en tout point $t \in L$ (les valeurs limites $\Phi^{(m)}(t)$ vérifiant, de plus, une condition de Hölder), peut être représentée d'une façon unique par la formule (3).

Nous allons donc chercher la fonction inconnue $\Phi(z)$ sous la forme (3) et, en répétant le calcul de Vécoua, nous ramenons le problème proposé (9) à la résolution de l'équation intégrale singulière suivante avec la fonction inconnue $\mu(t)$:

$$A(t)\mu(t) + \int_L N(t, \tau)\mu(\tau)d\sigma = f(t) + F[t, u_0, u_1, \ldots, u_m] - C\delta(t), \tag{10}$$

où les fonctions $A(t)$, $\delta(t)$, $N(t, \tau)$, sont définies par les formules (5) et les fonctions u_j désignent les valeurs limites de la fonction $\Phi(z)$ et leurs dérivées, définies par les formules

$$u_0(t) = \Phi(t) = \int_L \Big(1-\frac{t}{\tau}\Big)^{m-1} \log\Big(1-\frac{t}{\tau}\Big)\mu(\tau)d\sigma + \int_L \mu(\tau)d\sigma + iC,$$

$$u_j(t) = \Phi^{(j)}(t) = (-1)^j(m-1)(m-2)\ldots(m-j)\int_L \Big(1-\frac{t}{\tau}\Big)^{m-j-1}\frac{1}{\tau^j} \times$$

$$\times\Big\{\log\Big(1-\frac{t}{\tau}\Big) + \frac{1}{m-1} + \ldots + \frac{1}{m-j}\Big\}\mu(\tau)d\sigma \quad (j = 1, 2, \ldots, m-2), \tag{11}$$

$$u_{m-1}(t) = (-1)^{m-1}(m-1)(m-2)\ldots 2\cdot 1\int_L \frac{1}{\tau^{m-1}}\Big\{\log\Big(1-\frac{t}{\tau}\Big) + \frac{1}{m-1} + \ldots + 1\Big\}\mu(\tau)d\sigma,$$

$$u_m(t) = \Phi^{(m)}(t) = (-1)^m(m-1)!\pi i t^{1-m}\bar{t}'\mu(t) + (-1)^m(m-1)!\int_L \frac{\mu(\tau)d\sigma}{(\tau-t)\tau^{m-1}}.$$

La fonction $u_m(t)$ s'exprime par une intégrale à singularité forte. L'équation (10) est réelle et son premier membre contient un noyau du type de Cauchy de la forme

$$N(t, \tau) = \frac{K(t, \tau)}{\tau - t} \tag{12}$$

où la fonction $K(t, \tau)$ satisfait à la condition de Hölder, d'après les hypothèses. En outre dans l'équation (10) figure une singularité forte dans le membre non linéaire par l'intermédiaire du terme u_m.

En séparant la partie singulière caractéristique du premier membre de l'équation (10), nous écrirons cette équation sous la forme équivalente:

$$A(t)\mu(t) + \frac{B(t)}{\pi i}\int_L \frac{\mu(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t) + F[t, u_0, u_1, \ldots, u_m] - C\delta(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \tilde{K}(t, \tau)\mu(\tau)d\tau, \tag{13}$$

où, d'après les formules (5), nous avons posé:

$$B(t) = \tfrac{1}{2}(-1)^m(m-1)!\pi i[t^{1-m}\bar{t}'a_m(t) + \bar{t}^{1-m}t'\overline{a_m(t)}], \tag{14}$$

$$\tilde{K}(t, \tau) = \frac{K(t, \tau)\bar{\tau}' - K(t, t)\bar{t}'}{\tau - t} = \frac{k(t, \tau)}{|\tau - t|^{1-\alpha}} \quad (0 < \alpha < \beta) \tag{15}$$

$\bar{t}'$ désignant la dérivée de la fonction $t(s)$ par rapport à l'arc s ($\bar{t}' = 1/t'$).

Étudions d'abord l'équation suivante:

$$A(t)\mu(t) + \frac{B(t)}{\pi i}\int_L \frac{\mu(\tau)d\tau}{\tau - t} = \Omega(t), \tag{16}$$

où $\Omega(t)$ est une fonction donnée sur L vérifiant la condition de Hölder. En s'appuyant sur la solution du problème de Hilbert, I. N. Vécoua a donné dans le travail [2] la solution générale de l'équation (16). Dans le cas $\varkappa \geqslant 0$ cette solution est de la forme

$$\mu(t) = A^*(t)\Omega(t) - \frac{B^*(t)Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{\Omega(\tau)d\tau}{Z(\tau)(\tau - t)} + B^*(t)Z(t)P_{\varkappa-1}(t), \tag{17}$$

où nous avons posé

$$A^*(t) = \frac{A(t)}{A^2(t) - B^2(t)}, \quad B^*(t) = \frac{B(t)}{A^2(t) - B^2(t)},$$

$$Z(t) = \frac{\sqrt{A^2(t) - B^2(t)}}{\sqrt{\Pi(t)}}\, t^{-\varkappa/2}e^{\Gamma(t)}, \tag{18}$$

où $\varkappa$ désigne l'indice de l'équation (16):

$$(19)\qquad \varkappa = \frac{1}{2\pi i}\left[\log\frac{A-B}{A+B}\right]_L,$$

$$\Pi(t) = \prod_{1}^{p}(t-a_k)^{\lambda_k},\qquad \lambda_k = \frac{1}{2\pi i}\left[\log\frac{A-B}{A+B}\right]_{L_k}\qquad (k = 0, 1, \ldots, p)$$

et $\varkappa = \lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_p$. $P_{\varkappa-1}(t)$ est un polynôme arbitraire de degré $n \leqslant \varkappa-1$, ou $P = 0$ si $\varkappa = 0$. Nous n'allons étudier que le cas où l'équation homogène adjointe à l'équation (10), c'est-à-dire

$$A(t)\nu(t)+\int_L N(\tau, t)\nu(\tau)d\sigma = 0,$$

ne possède pas des solutions non nulles ($k' = 0$) et l'équation

$$A(t)\mu(t)+\int_L N(t, \tau)\mu(\tau)d\sigma = f(t)$$

peut être résolue pour toute fonction f. Il en résulte que le nombre k des solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène obtenue de l'équation (10) est égale à $\varkappa$, donc on doit avoir $\varkappa \geqslant 0$.

En substituant (sous l'hypothèse $k' = 0$), le premier membre de l'équation (14) au lieu de la fonction $\Omega(t)$, nous obtenons une équation intégrale singulière, équivalente à l'équation (14), de la forme

$$(20)\quad \mu(t)+\frac{A^*(t)}{\pi i}\int_L \tilde{K}(t, \tau)\mu(\tau)d\tau+\frac{B^*(t)Z(t)}{(\pi i)^2}\int_L \frac{\left[\int_L \tilde{K}(\tau, \tau_1)\mu(\tau_1)d\tau_1\right]}{Z(\tau)(\tau-t)}d\tau$$

$$= A^*(t)F[t, u_0, u_1, \ldots, u_m]-\frac{B^*(t)Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{F[\tau, u_0, u_1, \ldots, u_m]}{Z(\tau)(\tau-t)}d\tau+f^*(t),$$

où les fonctions $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_m$ sont données par les formules (11) et la fonction $f^*(t)$ est donnée par la formule

$$(21)\quad f^*(t) = A^*(t)f(t)-A^*(t)C\delta(t)-\frac{B^*(t)\cdot Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)d\tau}{Z(\tau)(\tau-t)}-$$

$$-\frac{B^*(t)Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{C\delta(\tau)d\tau}{Z(\tau)(\tau-t)}+B^*(t)Z(t)P_{\varkappa-1}(t),$$

C étant une constante arbitraire.

D'après les hypothèses et les formules (15), nous constatons que tous les termes de la fonction $\tilde{K}(t, \tau)$ satisfont à la condition de Hölder (voir la formule (15)). Étudions d'abord l'intégrale

$$(22)\qquad J(t) = \int_L \frac{\int_L \tilde{K}(\tau, \tau_1)\mu(\tau_1)d\tau_1}{Z(\tau)(\tau-t)}d\tau,$$

où l'on peut écrire

$$\tilde{K}(\tau, \tau_1) = \frac{k(\tau, \tau_1)}{|\tau_1-\tau|^{1-\alpha}}$$

où $0<\alpha<\beta$, et la fonction $k(\tau, \tau_1)$ satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant $\beta-\alpha$. Il en résulte

$$J(t) = \int_L \frac{\int_L \frac{k(\tau, \tau_1)}{|\tau_1-\tau|^{1-\alpha}}\mu(\tau_1)d\tau_1}{\tau-t}d\tau = \int_L\left[\int_L \frac{k(\tau, \tau_1)d\tau}{Z(\tau)(\tau-t)|\tau-\tau_1|^{1-\alpha}}\right]\mu(\tau_1)d\tau_1$$

$$= \int_L\left[\int_L \frac{k^*(\tau, \tau_1)d\tau}{(\tau-t)(\tau-\tau_1)Z(\tau)}\right]\mu(\tau_1)d\tau_1,$$

où la fonction k^* s'exprime par la formule

$$k^* = \frac{k(\tau, \tau_1)(\tau-\tau_1)}{|\tau-\tau_1|^{1-\alpha}}$$

et satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant $\beta_1 = \min(\alpha, \beta-\alpha)$. Nous constatons donc que l'intégrale $J(t)$ a la forme

$$J(t) = \int_L \tilde{N}(t, \tau_1)\mu(\tau_1)d\tau_1.$$

On démontre dans la théorie des équations singulières que la fonction

$$(23)\qquad \tilde{N}(t, \tau_1) = \int_L \frac{k^*(\tau, \tau_1)d\tau}{(\tau-t)(\tau-\tau_1)Z(\tau)}$$

admet une faible singularité; notamment elle s'exprime par la formule

$$(24)\qquad \tilde{N}(t, \tau_1) = \frac{N^*(t, \tau_1)}{|t-\tau_1|^{1-\beta^*}}\qquad (0<\beta^*<\beta_1),$$

où la fonction $N^*(t, \tau_1)$ vérifie la condition de Hölder avec l'exposant $\beta_1-\beta^*$.

En admettant que la fonction μ est bornée et intégrable, nous concluons que la fonction $J(t)$ satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant $\frac{1}{2}\beta^*$. Donc, si l'on suppose $\beta^* < \beta_1 = \min(\alpha, \beta-\alpha)$, il sera avantageux de choisir $\beta^* < \frac{1}{2}\beta$. L'équation intégrale (20) aura donc la forme

$$\mu(t)+\frac{A^*(t)}{\pi i}\int\limits_L \tilde{K}(t,\tau)\mu(\tau)\,d\tau+\frac{B^*(t)Z(t)}{(\pi i)^2}\int\limits_L \tilde{N}(t,\tau)\mu(\tau)\,d\tau \tag{25}$$

$$= A^*(t)F[t,u_0,u_1,\ldots,u_m]-\frac{B^*(t)Z(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{F[\tau,u_0,u_1,\ldots,u_m]}{Z(\tau)(\tau-t)}+f^*(t),$$

où les fonctions $u_0, u_1, \ldots, u_m$ dépendent de la fonction inconnue μ d'après les formules (11). Rappelons encore que la fonction u_m s'exprime par une intégrale du type de Cauchy, donc l'intégrale à droite de l'équation (25) possède une singularité remarquable.

Nous allons résoudre l'équation (25) par l'application du théorème topologique de J. Schauder [4], relatif au point invariant d'une transformation fonctionnelle.

Considérons un espace fonctionnel Λ composé de toutes les fonctions complexes $\mu(t)$ déterminées et continues en tout point $t\epsilon L$. On définit la distance $\delta(U, V)$ de deux points $U[\mu(t)]$, $V[\mu_1(t)]$ de l'espace Λ par la borne supérieure

$$\delta(U,V)=\sup|\mu(t)-\mu_1(t)|$$

et en prenant pour la norme des points U la distance $\delta(U, 0)$

$$\|\mu\|=\delta(U,0)=\sup|\mu|.$$

L'espace Λ est donc complet et normé. En outre l'espace Λ sera linéaire, si nous définissons le produit du point U par un nombre réel l et la somme de deux points U, V par les égalités

$$lU=(l\mu),\qquad U+V=(\mu+\mu_1).$$

Considérons maintenant, dans l'espace Λ, l'ensemble E de tous les points $U(\mu)$ satisfaisant aux conditions

$$|\mu|\leqslant\varrho,\qquad |\mu(t)-\mu(t')|\leqslant\varkappa|t-t'|^{\zeta}, \tag{26}$$

où les constantes positives arbitraires ϱ et $\varkappa$ doivent satisfaire aux inégalités

$$p\varrho\leqslant R,\qquad p'\varrho+p''\varkappa\leqslant R, \tag{27}$$

les constantes positives p, p', p'' étant définies par les égalités

$$p=\max\Big\{\int\limits_L\Big[\Big|\Big(1-\frac{t}{\tau}\Big)^{m-1}\log\Big(1-\frac{t}{\tau}\Big)\Big|+1\Big]d\sigma+|C|, \tag{28}$$

$$\int\limits_L|N_j(t,\tau)|\,d\sigma\cdot(j=1,2,\ldots,m-1)\Big\},$$

$$p'=\sup_{t\epsilon L}[(m-1)!\,\pi|t|^{1-m}|t'|]+\sup_{t\epsilon L}\Big[(m-1)!\Big|\int\limits_L\frac{d\sigma}{\tau^{m-1}(\tau-t)}\Big|\Big], \tag{29}$$

$$p''=\sup_{t\epsilon L}\Big[(m-1)!\int\limits_L\frac{d\sigma}{|\tau|^{m-1}|\tau-t|^{1-\zeta}}\Big]. \tag{30}$$

La constante positive ζ doit satisfaire à l'inégalité

$$\zeta<\tfrac{1}{4}\beta, \tag{31}$$

où β est l'exposant de Hölder figurant dans les hypothèses II-V. L'ensemble E est fermé, puisque la suite convergente des points de cet ensemble tend vers un point limite, qui vérifie aussi les conditions (26). L'ensemble E est en outre convexe. En effet, si U et V sont deux points arbitraires de l'ensemble E, alors tous les points du segment rectiligne joignant ces points

$$\theta U+(1-\theta)V\qquad(0\leqslant\theta\leqslant1)$$

satisfont aux conditions (26) et appartiennent à l'ensemble E. Appliquons maintenant à tous les points $U[\mu(t)]$ de l'ensemble E la transformation fonctionnelle définie par la relation

$$\tilde{\mu}(t)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L M(t,\tau)\tilde{\mu}(\tau)\,d\tau \tag{32}$$

$$=A^*(t)F[t,u_0,u_1,\ldots,u_m]-\frac{B^*(t)Z(t)}{\pi i}\int\limits_L\frac{F[\tau,u_0,u_1,\ldots,u_m]\,d\tau}{Z(\tau)(\tau-t)}+f^*(t),$$

où nous avons posé

$$M(t,\tau)=A^*(t)\tilde{K}(t,\tau)+\frac{B^*(t)Z(t)}{\pi i}\tilde{N}(t,\tau), \tag{33}$$

$u_0, u_1, \ldots, u_m$ étant données par les formules (11). L'équation (32) est donc une équation de Fredholm à singularité faible, avec la fonction inconnue $\tilde{\mu}$.

Dans le cas discuté ici cette équation intégrale admet une solution unique de la forme

$$\tilde{\mu}(t) = \Omega^*(t) + \int_L \mathfrak{M}(t, \tau)\Omega^*(\tau)d\tau,$$

où $\mathfrak{M}(t, \tau)$ désigne le noyau à singularité faible, dépendant du noyau $M(t, \tau)$ et Ω^* désigne le membre droit de l'équation (32). Remarquons d'abord que la fonction $F[t, u_0, u_1, \ldots, u_m]$ satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant ζ. En effet:

$$(35)\qquad |F[t, u_0(t), u_1(t), \ldots, u_m(t)] - F[\tau, u_0(\tau), u_1(\tau), \ldots, u_m(\tau)]|$$
$$< k_F\Big[|t-\tau|^\beta + \sum_{j=0}^{m-1} |u_j(t)-u_j(\tau)|^\beta + |u_m(t)-u_m(\tau)|\Big].$$

D'après les expressions (11), les fonctions $u_j(t)$ pour $j = 0, 1, 2, \ldots, \ldots, m-2$ s'expriment par des intégrales régulières et satisfont à la condition de Lipschitz suivante:

$$(36)\qquad \sum_{j=0}^{m-2} |u_j(t)-u_j(\tau)| < (m-2)p_1\varrho|t-\tau|,$$

où la constante positive p_1 est définie par l'égalité

$$(37)\qquad p_1 = \sup_{t\epsilon L} \int_L |N_j(t, \tau)|d\sigma \qquad (j = 1, 2, \ldots, m-1).$$

La fonction $u_{m-1}(t)$ possède une singularité logarithmique (voir les formules (11)), donc la différence $u_{m-1}(t) - u_{m-1}(\tau)$ s'exprime par l'intégrale

$$(38)\qquad u_{m-1}(t) - u_{m-1}(\tau) = (m-1)! \int_L \frac{1}{\tau_1^{m-1}} \log\frac{\tau_1 - t}{\tau_1-\tau}\mu(\tau_1)d\tau_1.$$

D'après un théorème bien connu dans la théorie du potentiel logarithmique. nous avons l'inégalité suivante:

$$(39)\qquad |u_{m-1}(t) - u_{m-1}(\tau)| < p_2\varrho|t-\tau|^\theta \qquad (0 < \theta < 1),$$

où la constante positive p_2 ne dépend que de la courbe L et du nombre θ choisi.

La fonction $u_m(t)$ possède une singularité forte (voir les formules (11)) et, d'après les propriétés bien connues de l'intégrale du type de Cauchy, elle satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant ζ, si la fonction μ satisfait à cette condition. Donc nous aurons

$$(40)\qquad |u_m(t) - u_m(\tau)| < [p_3\varrho + p_4\varkappa]|t-\tau|^\zeta,$$

où les constantes positives p_3 et p_4 ne dépendent que de la courbe L. En substituant les inégalités (36), (39), (40) dans l'inégalité (35) nous obtenons

$$(41)\qquad |F[t, u_0(t), u_1(t), \ldots, u_m(t)] - F[\tau, u_0(\tau), u_1(\tau), \ldots, u_m(\tau)]|$$
$$< k_F\{[1+(m-2)p_1\varrho + p_2\varrho]|t-\tau|^{\theta\beta} + [p_3\varrho + p_4\varkappa]|t-\tau|^\zeta\}$$
$$< k_F(1+p^*\varrho + p_4\varkappa)|t-\tau|^\zeta$$

d'après la relation (31).

Étudions maintenant l'intégrale

$$(42)\qquad I(t) = \int_L \frac{F[\tau, u_0, u_1, \ldots, u_m]}{Z(\tau)(\tau-t)}d\tau$$

qui est une intégrale du type de Cauchy, où la fonction $F[\tau, u_0, \ldots, u_m]$ satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant ζ et la fonction $Z(\tau)$ satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant β. Écrivons l'intégrale (42) sous la forme

$$(43)\qquad I(t) = \frac{F[t, u_0(t), \ldots, u_m(t)]}{Z(t)} \int_L \frac{d\tau}{\tau - t} +$$
$$+ \int_L \frac{F[\tau, u_0(\tau), \ldots, u_m(\tau)] - F[t, u_0(t), \ldots, u_m(t)]}{Z(\tau)(\tau-t)}d\tau +$$
$$+ \int_L \frac{F[t, u_0(t), \ldots, u_m(t)][Z(t)-Z(\tau)]}{Z(\tau)Z(t)(\tau-t)}d\tau.$$

Il en résulte que la borne supérieure de l'intégrale (42) dépend de la borne supérieure de la fonction F, la borne inférieure de la fonction Z, des coefficients de Hölder des fonctions F et Z et de la borne supérieure de l'intégrale

$$\int_L \frac{d\tau}{|\tau-t|^{1-\beta}} \quad \text{et} \quad \int_L \frac{d\tau}{|\tau-t|^{1-\zeta}}.$$

Nous en tirons la limitation suivante de l'intégrale (42)

$$(44)\qquad \left|\int_L \frac{F[\tau, u_0, u_1, \ldots, u_m]}{Z(\tau)(\tau-t)}d\tau\right| < \tilde{p}_5 M_F + \tilde{p}_6 k_F(1+p^*\varrho + p_4\varkappa),$$

où $M_F = \sup|F|$ et les constantes positives $\tilde{p}_5$ et $\tilde{p}_6$ dépendent de la fonction Z et des bornes supérieures des intégrales citées.

En outre nous constatons que l'intégrale (42) satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant ζ (ce qui résulte des propriétés connues de l'intégrale du type de Cauchy)

$$(45)\qquad |I(t)-I(\tau)| < [p_5 M_F + p_6 k_F(1+p^*\varrho + p_4\varkappa)]|t-\tau|^{\zeta},$$

où les constantes positives p_5 et p_6 dépendent, comme dans le cas précédent, de la fonction Z et des bornes supérieures des intégrales singulières. La fonction donnée $f^*(t)$ possède, en vertu des hypothèses, une borne supérieure M_{f*} et elle satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant β et le coefficient k_{f*}. Cherchons maintenant la condition pour que le point transformé $\tilde{\mu}(t)$ appartienne à l'ensemble E. D'après les considérations précédentes, nous aurons

$$(46)\qquad |\tilde{\mu}| < K_{\mathfrak{M}}\{M_A M_F + \pi^{-1} M_B M_Z[\tilde{p}_5 M_F + \tilde{p}_6 k_F(1+p^*\varrho+p_4\varkappa)] + M_{f*}\}$$

où

$$(46')\qquad K_{\mathfrak{M}} = \sup\Big[1+\int_L |M(t,\tau)\,d\tau|\Big]$$
$$M_A = \sup|A^*|,\qquad M_B = \sup|B^*|,\qquad M_Z = \sup|Z|,$$

$$(47)\qquad |\tilde{\mu}(t)-\tilde{\mu}(\tau)| < \{1+\pi^{-1}p_7\sup|\tilde{\mu}| + k_A M_F + M_A k_F(1+p^*\varrho+p_4\varkappa) + \pi^{-1}M_B M_Z[p_5 M_F + p_6 k_F(1+p^*\varrho+p_4\varkappa)] + k_{BZ}[\tilde{p}_5 M_F + \tilde{p}_6 k_F(1+p^*\varrho+p_4\varkappa)] + k_{f*}\}|t-\tau|^{\zeta},$$

où k_A, k_{BZ} désignent les coefficients de Hölder des fonctions A et BZ (voir les formules (18)) et la constante p_7 désigne le coefficient de Hölder de l'intégrale $\int_L M(t,\tau)\tilde{\mu}(\tau)\,d\tau$ dans l'équation (32). L'inégalité (47) est vraie puisque $\zeta \leqslant \frac{1}{4}\beta$. Pour que le point transformé $\tilde{\mu}$ appartienne à l'ensemble E il suffit donc que les inégalités suivantes soient satisfaites:

$$K_{\mathfrak{M}}\{M_A M_F + \pi^{-1}M_B M_Z M_F \tilde{p}_5 + M_B M_Z \tilde{p}_6 k_F(1+p^*\varrho+p_4\varkappa) + M_{f*}\} \leqslant \varrho,$$
$$(48)\qquad 1+\pi^{-1}p_7\varrho + k_A M_F + M_A k_F(1+p^*\varrho+p_4\varkappa) + \pi^{-1}M_B M_Z[p_5 M_F + p_6 k_F(1+p^*\varrho+p_4\varkappa)] + k_{BZ}[\tilde{p}_5 M_F + \tilde{p}_6 k_F(1+p^*\varrho+p_4\varkappa)] + k_{f*} \leqslant \varkappa.$$

En remarquant que le choix des constantes $\varkappa$ et ϱ est arbitraire, nous voyons que les inégalités (48) seront satisfaites, si la borne supérieure M_F de la fonction $|F|$ et son coefficient de Hölder k_F sont suffisamment petits.

Nous devons maintenant montrer que la transformation (32) est continue dans l'espace Λ, c'est-à-dire que si la suite des points $U_n(\mu_n)$ de l'ensemble E converge vers le point $U(\mu)$ de cet ensemble, alors la suite des points transformés $V_n(\tilde{\mu}_n)$ converge vers le point transformé

$V(\tilde{\mu})$ du point limite $U(\mu)$. Cette propriété est évidente pour les intégrales à singularité faible. La preuve que cette propriété subsiste dans le cas des intégrales à singularité forte a été donnée par W. Pogorzelski dans le travail [4]. Il en résulte que la transformation fonctionnelle définie par la relation (32) est continue.

Il reste à montrer que l'ensemble $\tilde{E}$ transformé de l'ensemble E est compact. D'après les inégalités (46) et (47), les fonctions $\tilde{\mu}(t)$ forment une famille de fonctions uniformément bornées et équicontinues. Donc, d'après le théorème d'Arzelà, l'ensemble $\tilde{E}$ est compact.

Il en résulte donc, d'après le théorème de J. Schauder, qu'il existe dans l'ensemble E un point μ^* invariant relativement à la transformation fonctionnelle (32). La fonction μ^* est une solution de l'équation (25), donc aussi de l'équation (10). En substituant la fonction obtenue $\mu^*(\tau)$ dans la formule [3], on obtient la fonction

$$\Phi(z) = \int_L (1-z/t)^m \log(1-z/t)\mu^*(t)\,ds + \int_L \mu^*(t)\,ds + iC$$

qui est une solution du problème proposé; en effet, elle est holomorphe à l'intérieur du domaine D et ses dérivées jusqu'à l'ordre m ont des valeurs limites qui vérifient en tout point $t \in L$ la relation non linéaire (9).

Travaux cités

[1] I. N. Vécoua, *Nouvelle représentation d'une fonction analytique et applications* (en géorgien), Soobshcheniya AN Gruz. SSR 2 (1941), p. 477-484.

[2] — *Sur la théorie des équations intégrales singulières* (en géorgien), Soobshcheniya AN Gruz. SSR 3 (1942), p. 869-876.

[3] W. Pogorzelski, *Problème aux limites d'Hilbert généralisé*, Ann. Polon. Math. 2 (1955), p. 136-144.

[4] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Mathematica 2 (1930), p. 171-180.

[5] N. I. Muskhelishvili, *Singular integral equations*, Groningen 1953, p. 203-226.

Reçu par la Rédaction le 29. 11. 1958