ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1960)

Sur l'unicité des solutions des second et troisième problèmes de Fourier relatifs à l'équation linéaire normale du type parabolique

par M. Krzyżański (Kraków)

1. Nous allons établir dans le présent travail certains théorèmes d'unicité des solutions des problèmes de Fourier, second et troisième, pour l'équation parabolique

$$(1)\quad F[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(X,t)\,u''_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^{m} b_j(X,t)\,u'_{x_j} + c(X,t)\,u - u'_t = f(X,t),$$

X désignant le point variable de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de l'espace $\mathcal{E}_m$ à m dimensions. Nous supposons que les coefficients de l'équation (1) et la fonction $f(X,t)$ sont déterminés à l'intérieur d'un domaine fermé cylindrique $\mathcal{C}$ de l'espace-temps $\mathcal{E}_{m+1}$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$, défini de la manière suivante: $X \in \bar{D}$, $0 \leqslant t \leqslant T$, c'est-à-dire du produit topologique de la fermeture $\bar{D}$ d'un domaine D de l'espace $\mathcal{E}_m$ et de l'intervalle $\langle 0, T\rangle$ de l'axe t. L'intérieur du domaine $\mathcal{C}$ sera désigné par $\mathcal{C}^{(i)}$. La frontière $F(D)$ de ce domaine est par hypothèse une surface dont l'équation s'écrit sous la forme

$$(2)\qquad G(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0,$$

$G(X)$ étant une fonction de classe C^2 dans le domaine D, dont les dérivées secondes sont bornées dans ce domaine, et de classe C^1 dans la fermeture $\bar{D}$ du domaine D; on suppose en outre que l'on a

$$(3)\qquad \operatorname{grad}^2 G(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{m} (G'_{x_j})^2 \geqslant \Gamma^2 > 0,$$

Γ étant un nombre constant. Nous désignerons par σ la surface latérale de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire le produit topologique de $F(D)$ et de l'intervalle $\langle 0, T\rangle$. Nous supposons que la forme

$$(4)\qquad \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(X,t)\,\lambda_i \lambda_j$$

est définie positive et que le coefficient $c(X,t)$ est borné supérieurement dans l'intérieur $\mathcal{C}^{(i)}$ de $\mathcal{C}$; les coefficients $a_{ij}(X,t)$ et $b_j(X,t)$ sont supposés bornés dans $\mathcal{C}^{(i)}$.

Nous faisons correspondre à chaque point (X,t) de σ une demi-droite l pénétrant à l'intérieur de $\mathcal{C}$, parallèle au plan $t=0$.

Considérons le problème suivant. On cherche une fonction $u(X,t)$ régulière dans $\mathcal{C}$ ([1]), admettant une dérivée du/dl aux points de σ et satisfaisant à l'équation (1) à l'intérieur de cet ensemble, à la condition initiale

$$u(X,0)=\varphi(X) \quad \text{pour} \quad X\in\bar{D}$$

et à la condition aux limites

$$L[u]=\frac{du}{dl}+h(X,t)u=g(X,t) \quad \text{pour} \quad (X,t)\in\sigma,$$

$g(X,t)$ étant une fonction déterminée sur σ et $h(X,t)$ une fonction déterminée et bornée sur σ. Ce problème sera appelé dans la suite problème (F).

2. Nous passons à l'étude des cas particuliers de ce problème, relatifs aux différentes formes du domaine cylindrique $\mathcal{C}$. Nous commençons par le cas où le domaine D est borné. Nous supposons qu'il existe un nombre constant positif γ_0 tel que l'on a pour $(X,t)\in\sigma$ l'inégalité

$$\cos(l,n)\geqslant\gamma_0>0. \tag{5}$$

Nous allons démontrer que *le problème* (F) *admet alors une solution au plus* ([2]). Considérons le problème homogène (FH), correspondant au problème (F), c'est-à-dire le problème qui consiste à chercher une solution de l'équation homogène

$$F[u]=0, \tag{6}$$

régulière dans le domaine $\mathcal{C}$, s'annulant pour $t=0$, $X\in\bar{D}$ et satisfaisant à la condition aux limites homogène

$$L[u]\equiv\frac{du}{dl}+h(X,t)u=0 \quad \text{pour} \quad (X,t)\in\sigma, \tag{7}$$

la dérivée qui figure dans la condition (7) existant, bien entendu, pour $(X,t)\in\sigma$.

Pour démontrer l'unicité de la solution du problème (F), il suffit de démontrer que la seule solution du problème (FH) est $u(X,t)\equiv 0$. À cet effet, nous posons, en suivant la méthode de M. Picone (voir [4])

$$u(X,t)=v(X,t)e^{-AG(X)+Bt},$$

([1]) C'est-à-dire continue dans $\mathcal{C}$ et de classe C^2 dans $\mathcal{C}^{(i)}$.

([2]) Un théorème analogue résultera des évaluations effectuées par R. Vyborny (voir [7]), si l'on fait certaines hypothèses sur la frontière du domaine D.

$v(X,t)$ étant la nouvelle fonction inconnue, A et B deux nombres constants qui seront déterminés dans la suite. L'équation (6) se transforme en l'équation

$$\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}(X,t)v''_{x_ix_j}+\sum_{j=1}^{m}\bar{b}_j(X,t)v'_{x_j}+\bar{c}(X,t)v-v'_t=0, \tag{8}$$

avec

$$\bar{c}(X,t)=A^2\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}(X,t)G'_{x_i}G'_{x_j}-A\{F[G]-c(X,t)G\}+c(X,t)-B, \tag{9}$$

tandis que la condition (7) prend la forme

$$\frac{dv}{dl}+\bar{h}(X,t)v=0, \tag{10}$$

avec

$$\bar{h}(X,t)=-A\sum_{j=1}^{m}G'_{x_j}\cos(l,x_j)+h(X,t).$$

Nous choisissons le signe de la fonction $G(X)$ dans l'équation (2) de sorte que l'on ait

$$G'_{x_i}=\cos(n,x_i)\Big[\sum_{j=1}^{m}(G'_{x_j})^2\Big]^{1/2}=\cos(n,x_j)\cdot|\operatorname{grad}G|. \tag{11}$$

Posons $h_0=\sup\limits_{(X,t)\in\sigma}h(X,t)$. En tenant compte de (3) et (5) on obtient l'inégalité suivante

$$\bar{h}(X,t)=-A\cos(l,n)\cdot|\operatorname{grad}G|+h(X,t)\leqslant -A\Gamma\gamma_0+h_0.$$

Nous choisissons le nombre A de sorte que l'on ait $-A\Gamma\gamma_0+h_0<0$, on a alors $\bar{h}(X,t)<0$ dans (10). Il résulte de la formule (9) que l'on peut choisir le nombre B de sorte que l'on ait $\bar{c}(X,t)<0$. Comme la fonction $v(X,t)$ s'annule pour $t=0$, il résulte des inégalités $\bar{h}(X,t)<0$ et $\bar{c}(X,t)<0$ et du théorème de M. Picone (voir [5], [3]) que l'on a $v(X,t)\equiv 0$ et par suite $u(X,t)\equiv 0$ dans le domaine $\mathcal{C}$.

3. Nous passons au cas où le domaine D constitue l'extérieur d'un domaine borné et fermé. Nous supposons que la fonction $G(X)$ satisfait aux hypothèses du n° 1 et que l'inégalité (5) subsiste pour $(X,t)\in\sigma$. On peut supposer, en outre, qu'en dehors d'une sphère K_0 dans l'espace $\mathcal{E}_m$, de rayon R_0 de centre à l'origine des coordonnées, contenant la frontière $F(D)$ du domaine D à l'intérieur, la fonction $G(X)$ est identique à $r=(\sum_{j=1}^{m}x_j^2)^{1/2}$, c'est-à-dire que l'on a

$$G(X)=r=\Big(\sum_{j=1}^{m}x_j^2\Big)^{1/2} \quad \text{pour} \quad r>R_0. \tag{12}$$

Soit E_2 la classe des fonctions continues dans le domaine $\mathcal{C}$ et satisfaisant à l'inégalité de la forme

$$|u(X,t)| \leqslant Me^{Kr^2} \quad \text{pour} \quad (X,t)\,\epsilon\,\mathcal{C},$$

M et K étant des nombres constants non négatifs, qui dépendent en général de la fonction $u(X,t)$ elle-même (voir [1]). Nous allons démontrer le théorème suivant:

Dans la classe E_2 le problème (F) *posé dans le cas du domaine D défini au* n° 3 *admet une solution au plus* (³).

Il suffit de démontrer que la seule solution du problème homogène (FH), appartenant à la classe E_2 est $u(X,t)\equiv 0$. À cet effet nous allons choisir une fonction $H(X,t;k)$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$ et du paramètre k, positive dans le domaine $\mathcal{C}$ pour $k>0$ et telle que l'on ait

$$F[H]<0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{C}^{(i)}, \tag{13}$$

$$L[H]<0 \quad \text{sur} \quad \sigma, \tag{14}$$

$$\lim_{r\to\infty} e^{Kr^2}/H(X,t;k)=0 \quad \text{pour} \quad k>K. \tag{15}$$

La fonction $H(X,t;k)$ étant déterminée, la démonstration du théorème est analogue à celle du théorème I de mon travail [1]. Nous définissons la fonction $H(X,t;k)$ par la formule

$$H(X,t;k)=\exp\left[\frac{k(G-p)^2}{1-\mu(k)t}+\nu(k)t\right];$$

nous allons choisir le nombre p et les fonctions $\mu(k)$ et $\nu(k)$ du paramètre k de sorte que la fonction $H(X,t;k)$ satisfasse aux conditions (13) et (14). On a

$$\frac{1}{H}F[H]=\frac{k(G-p)^2}{(1-\mu t)^2}\left[4k\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}G'_{x_i}G'_{x_j}-\mu\right]+\frac{2k}{1-\mu t}\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}G'_{x_i}G'_{x_j}+$$
$$+\frac{2k(G-p)}{1-\mu t}\left[\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}G''_{x_ix_j}+\sum_{j=1}^{m}b_jG'_{x_j}\right]+c-\nu. \tag{16}$$

(³) L. Slobodeckij dans la note [6] a fait observer que pour assurer l'unicité des solutions des problèmes I-III de Fourier on suppose que ces solutions appartiennent à une classe qui est identique à la classe E_2 dans le cas particulier de l'équation du second ordre. Les théorèmes correspondants ne sont pas énoncés, ni démontrés dans [6].

Il résulte de (12) que les dérivées G'_{x_i} $(i=1,2,\ldots,m)$ sont bornées dans le domaine D. On peut donc choisir la fonction $\mu(k)$ continue et bornée pour $k>0$ de sorte que l'on ait

$$\mu(k)-4k\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}G'_{x_i}G'_{x_j}\geqslant a^2>0, \tag{17}$$

a étant un nombre constant positif. D'autre part on peut choisir, d'après (12) les nombres positifs B et C de sorte que l'on ait dans $\mathcal{C}^{(i)}$ les inégalités

$$\left|\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}G''_{x_ix_j}+\sum_{j=1}^{m}b_jG'_{x_j}\right|\leqslant B, \qquad 0<\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}G'_{x_i}G'_{x_j}\leqslant C. \tag{18}$$

Etant donné un nombre positif $\delta<1$, on a $1-\mu(k)t>\delta$ pour $0\leqslant t<$ $<(1-\delta)/\mu(k)$. On a donc, d'après (16), (17) et (18), l'inégalité

$$\frac{1}{H}F[H]\leqslant -ka^2\left(\frac{G-p}{1-\mu t}\right)^2+2Bk\frac{|G-p|}{1-\mu t}+\frac{2Ck}{\delta}+c_0-\nu,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{H}F[H]\leqslant -k\left[a\frac{|G-p|}{1-\mu t}-\frac{B}{a}\right]^2+\frac{kB^2}{a^2}+\frac{2Ck}{\delta}+c_0-\nu$$
$$\text{pour} \quad 0\leqslant t<(1-\delta)/\mu(k),$$

c_0 désignant la borne supérieure de $c(X,t)$ dans $\mathcal{C}^{(i)}$.

Posons ensuite

$$\nu(k)=\frac{kB^2}{a^2}+\frac{2Ck}{\delta}+c_0+1;$$

alors on a

$$\frac{1}{H}F[H]\leqslant -k\left[a\frac{|G-p|}{1-\mu t}-\frac{B}{a}\right]^2-1, \tag{19}$$

et il en résulte aussitôt l'inégalité (13).

D'autre part, en tenant compte de (11), on obtient

$$\frac{1}{H}L[H]=-\frac{2kp}{1-\mu t}\cdot|\operatorname{grad}G|\cos(l,n)+h(X,t) \quad \text{pour} \quad (X,t)\,\epsilon\,\sigma.$$

En procédant de même qu'au n° 2 et en tenant compte de l'inégalité $1-\mu t\leqslant 1$, on déduit de (3) et (5) l'inégalité

$$\frac{1}{H}L[H]\leqslant -2kp\gamma_0\Gamma+h_0,$$

où l'on a posé $h_0 = \sup_\sigma h(X, t)$. On peut donc choisir le nombre p de sorte que l'on ait l'inégalité (14).

Il est évident que l'on a l'égalité (15) pour $k > K$.

4. Choisissons un nombre $\bar{k} > K$ et un nombre $\delta > 0$ et considérons la partie $\mathcal{C}^{(1)}$ du domaine $\mathcal{C}$ située dans la zone $0 \leqslant t \leqslant (1-\delta)/2\mu(k)$. En reprenant le procédé appliqué par M. Picone [4] nous formons une suite $\{\mathcal{C}_n\}$ de domaines séparés de $\mathcal{C}^{(1)}$ par les surfaces cylindriques de révolution $r = R_n$, les nombres $R_n > R_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tendant vers l'infini pour $n \to \infty$. Soit $u(X, t)$ une solution du problème (FH) relatif à l'équation (6) et au domaine $\mathcal{C}^{(1)}$. Posons

$$v(X, t) = u(X, t)/H(X, t; \bar{k}).$$

Il est évident que l'on a $v(X, 0) = 0$ et

$$\frac{dv}{dl} + \bar{h}(X, t)v = 0 \quad \text{pour} \quad (X, t) \in \sigma^{(1)}, \tag{20}$$

où $\sigma^{(1)}$ est la partie de la frontière du domaine $\mathcal{C}^{(1)}$ (et des domaines $\mathcal{C}_n$) située sur σ et

$$\bar{h}(X, t) = \frac{1}{H} L[H]. \tag{21}$$

À l'intérieur $\mathcal{C}_n^{(i)}$ du domaine $\mathcal{C}_n$ la fonction $v(X, t)$ satisfait à une équation analogue à (8), avec

$$\bar{c}(X, t) = \frac{1}{H} F[H]. \tag{22}$$

Il résulte de (22), (13), (21), (14) que l'on a $\bar{c}(X, t) < 0$ à l'intérieur de $\mathcal{C}_n$ et $\bar{h}(X, t) < 0$ sur $\sigma^{(1)}$. D'autre part, étant donné un nombre positif ε, on peut choisir un nombre N de sorte que l'on ait $|v(X, t)| < \varepsilon$ sur la partie de la frontière du domaine $\mathcal{C}_n$ située sur la surface cylindrique $r = R_n$ pour $n > N$. D'après le théorème de M. Picone (voir [5]) on en déduit que l'on a $|v(X, t)| < \varepsilon$ dans $\mathcal{C}_n$. Soit (X_0, t_0) un point arbitraire de $\mathcal{C}^{(1)}$; on peut choisir le nombre N de sorte que le point (X_0, t_0) appartienne aux domaines $\mathcal{C}_n$ pour $n > N$. On a donc $|v(X_0, t_0)| < \varepsilon$; or $\varepsilon > 0$ étant choisi d'une manière arbitraire, il en résulte que $v(X_0, t_0) = 0$, et par suite $u(X_0, t_0) = 0$. Or (X_0, t_0) étant un point arbitraire de $\mathcal{C}^{(1)}$, on a $u(X, t) \equiv 0$ dans $\mathcal{C}^{(1)}$. On procède ensuite de même dans les parties du domaine $\mathcal{C}$ situées dans les zones $(j-1)(1-\delta)/2\mu(k) \leqslant t \leqslant j(1-\delta)/2\mu(k)$ $(j = 2, 3, \ldots, s)$ et on démontre ainsi que $u(X, t) \equiv 0$ dans $\mathcal{C}$.

On peut appliquer la fonction $H(X, t; k)$ à la démonstration d'un théorème d'existence analogue à celui du travail [2].

5. Il est aisé de construire une fonction $H_1(X, t; k)$ analogue à $H(X, t; k)$ correspondant au cas où le domaine $\mathcal{C}$ est un quart $t \geqslant 0$, $x_1 \geqslant 0$, $-\infty < x_i < +\infty$ $(i = 2, 3, \ldots, m)$ de l'espace-temps $\mathcal{E}_{m+1}$ (voir n° 1); la surface σ est alors le demi-plan $x_1 = 0, t \geqslant 0$, $-\infty < x_i < +\infty$ $(i = 2, 3, \ldots, m)$. On peut ramener à ce cas, par un changement des variables indépendantes, un cas plus général où la surface σ est représentable par une équation de la forme

$$x_1 = \vartheta(x_2, \ldots, x_m).$$

La fonction $H_1(X, t; k)$ peut être déterminée par la formule

$$H_1(X, t; k) = \exp\left\{\frac{k\left[(x_1-p)^2 + \sum_{j=2}^{m} x_j^2\right]}{1-\mu(k)t} + \nu(k)t\right\},$$

le nombre p et les fonctions $\mu(k)$ et $\nu(k)$ étant choisis d'une manière analogue à celle du n° 3.

6. Il est évident que dans tous les trois cas considérés aux n^{os} 2-5 on peut démontrer le théorème suivant(⁴):

*Soit $u(X, t)$ une fonction régulière et de classe E_2 (dans les cas des n^{os} 3-5) dans $\mathcal{C}$, admettant une dérivée du/dl aux points de σ. Si l'on a $F[u] \leqslant 0$ (ou $F[u] \geqslant 0$) à l'intérieur de $\mathcal{C}$, $L[u] \leqslant 0$ (resp. $L[u] \geqslant 0$) sur σ, et $u(X, 0) \geqslant 0$ (*resp.* $u(X, 0) \leqslant 0$) pour $X \in \bar{D}$, alors $u(X, t) \geqslant 0$ (resp. $u(X, t) \leqslant 0$) dans $\mathcal{C}$.*

On en déduit des évaluations relatives aux solutions des second et troisième problème de Fourier dans les cas des n^{os} 3-4, en particulier on a le théorème suivant:

Supposons que l'on ait $c(X, t) \leqslant 0$ dans $\mathcal{C}^{(i)}$ et $h(X, t) < 0$ sur σ. Soit $u(X, t)$ une fonction régulière et de classe E_2 dans $\mathcal{C}$, telle que l'on ait $F[u] \leqslant 0$ (ou $F[u] \geqslant 0$) dans $\mathcal{C}^{(i)}$, $L[u] \leqslant 0$, (resp. $L[u] \geqslant 0$) sur σ et $u(X, 0) \geqslant -M$ (resp. $u(X, 0) \leqslant M$) pour $X \in \bar{D}$, où M est un nombre non négatif. Alors $u(X, t) \geqslant -M$ (resp. $u(X, t) \leqslant M$) dans $\mathcal{C}$.

Pour la démonstration on pose $\bar{u}(X, t) = u(X, t) + M$ (resp. $\bar{u}(X, t) = u(X, t) - M$) et on applique le théorème précédent à la fonction $\bar{u}(X, t)$.

(⁴) Ce théorème est analogue à celui de mon travail *Certaines inégalités relatives aux solutions de l'équation parabolique linéaire normale*, Bulletin de l'Acad. Polon. des Sciences, Sér. des sci. math., astr. et phys. 7 (1959), p. 131-135.

Travaux cités

[1] M. Krzyżański, *Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique déterminées par les conditions initiales*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 18 (1945), p. 145-156.

[2] — *Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique déterminées par les conditions initiales* (note complémentaire), Annales de la Société Polonaise de Mathématique 20 (1947), p. 7-9.

[3] — *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*, cz. I, Warszawa 1957, en particulier p. 177-183.

[4] M. Picone, *Sul problema della propagazione del calore in un mezzo privo di frontiera...*, Mathematische Annalen 10 (1929), p. 701-712.

[5] — *Nuove formole di maggiorazioni per gl'integrali delle equazioni a derivate parziali del second'ordine ellittico-paraboliche*, Rendiconti R. Accad. dei Lincei 17 (1938).

[6] Л.Н. Слободецкий, *Теория потенциала для параболических уравнений*, ДАН СССР 103 (1955), p. 19-22.

[7] Р. Выборны, *О свойствах решений некоторых краевых задач дла уравнений параболического пита*, ДАН СССР 117 (1957), p. 563-565.

Reçu par la Rédaction le 12. 5. 1958

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1960)

Sur un problème généralisé de Vécoua

par J. Wolska-Bochenek (Warszawa)

Dans le travail [1] (voir aussi [5], p. 203) I. N. Vécoua a posé et résolu le problème qui consiste à déterminer une fonction holomorphe à l'intérieur d'un domaine S^+, limité par la ligne fermée L, qui satisfait à la condition limite suivante:

$$\text{re} \sum_{j=0}^{m} \Big\{ a_j(t_0)\,\Phi^{(j)}(t_0) + \int_L h_j(t_0, t)\,\Phi^{(j)}(t)\,ds \Big\} = f(t_0) \tag{1}$$

en tout point t_0 de la ligne L. Les fonctions données $a_0(t), \ldots, a_m(t)$ sont complexes, définies pour $t \in L$ et satisfont à la condition de Hölder; $f(t)$ est une fonction réelle donnée, satisfaisant à la condition de Hölder et les fonctions données $h_j(t_0, t)$ sont complexes, définies pour $t \in L$, $t_0 \in L$, par la formule

$$h_j(t_0, t) = \frac{h_j^{(0)}(t_0, t)}{|t - t_0|^{\alpha}} \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1) \tag{2}$$

où $h_j^{(0)}(t_0, t)$ satisfont à la condition de Hölder. $\Phi^{(j)}(t_0)$ désigne la valeur limite $[\Phi^{(j)}(t_0)]^+$ de la j-ième dérivée de la fonction $\Phi(z)$; l'existence des valeurs limites précédentes est donc supposée.

En particulier, pour $m = 0$ on obtient le problème de Hilbert-Riemann. Le problème aux limites de Poincaré est aussi un cas particulier du problème (1).

La méthode que I. N. Vécoua a utilisée pour traiter le problème précédent est basée sur sa représentation intégrale des fonctions holomorphes et conduit à la résolution d'une équation intégrale singulière.

Dans le cas $m \geqslant 1$ la fonction inconnue $\Phi(z)$ est cherchée sous la forme

$$\Phi(z) = \int_L (1 - z/t)^{m-1} \log(1 - z/t)\,\mu(t)\,ds + \int_L \mu(t)\,ds + iC, \tag{3}$$

où $\mu(t)$ est la fonction réelle inconnue, satisfaisant à la condition de Hölder, C est une constante réelle inconnue. Pour la fonction $\log(1 - z/t)$