des seconds membres des 4 premières équations du système (7) satisfont à la condition de Hölder (cela résulte des considérations du travail [1]). Nous en tirons la conclusion que la fonction $[v^*z^* - u^*w^*]$ vérifie la condition de Hölder dans tout domaine fermé $D^* \subset D$, et par conséquent la fonction $\psi^*(A, t)$ admet des dérivées secondes en tout point intérieur $A \epsilon D$, donc elle vérifie l'équation donnée (1).

Nous pouvons ainsi énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si les fonctions qui figurent dans l'équation* (1) *et la condition* (3) *vérifient les hypothèses* II *et* III, *si la courbe* C *limitant le domaine* D *vérifie la condition* I *et si l'intervalle de temps est suffisamment petit pour que les inégalités* (23) *soient satisfaites, il existe une fonction* $\psi(A, t)$ *qui satisfait à l'équation* (1) *en tout point intérieur* $A \epsilon D$ *pour* $0 \leqslant t \leqslant T$, *qui vérifie la condition limite* (2) *en tout point* $P \epsilon C$, *pour* $0 < t \leqslant T$, *et qui vérifie la condition initiale* (3) *en tout point* $A \epsilon D + C$ *et pour* $t = 0$.

Travaux cités

[1] J. Wolska-Bochenek, *Propriétés des intégrales d'une équation de l'hydrodynamique d'un fluie visqueux*, ce volume, p. 141-171.

[2] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math. 2 (1930), p. 171-180.

Reçu par la Rédaction le 5. 10. 1957

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1960)

La dérivée de Lie du comitant géométrique

par C. Jankiewicz (Wrocław)

1. En 1931 W. Ślebodziński [4] a introduit la notion qui s'appelle maintenant *dérivée de Lie*. Cette dérivée est largement appliquée par les mathématiciens et de plus en plus utilisée par les physiciens. Pour ces derniers cependant, la dérivée de Lie du comitant géométrique présente beaucoup plus d'intéret. Le but de cette note est l'étude de certaines propriétés de la dérivée de Lie d'un comitant géométrique.

2. Soit un espace analytique X_n à n dimensions des variables x^a, qui seront appelées les *coordonnées* d'un point de X_n (ici, et ailleurs, les indices grecs prennent les valeurs $1, 2, \ldots, n$). Si à chaque point de X_n correspond d'une façon univoque une suite de nombres Ω^A (l'indice A prend les valeurs $1, 2, \ldots, N$), nous dirons que dans X_n on a défini un *champ* de l'objet Ω^A. Les nombres Ω^A sont appelés les *composantes* de cet objet par rapport aux coordonnées x^a. L'objet Ω^A sera dit *objet géométrique de classe* p, si les conditions suivantes sont satisfaites:

(i) Après un changement de coordonnées

$$x^{a'} = x^{a'}(x^a) \qquad (a' = 1, 2, \ldots, n'), \tag{1}$$

où les fonctions $x^{a'}(x^a)$ sont de classe $r \geqslant p$, les nouvelles composantes $\Omega^{A'}(A' = 1', 2', \ldots, N')$ de l'objet Ω^A sont des fonctions de Ω^A, de $x^{a'}$, de x^a et des dérivées de $x^{a'}$ par rapport à x^a jusqu'à l'ordre p. Nous écrivons cette circonstance sous la forme

$$\Omega^{A'} = F^{A'}(\Omega^A, x^a, x^{a'}, \partial_{\varrho_1} x^{a'}, \partial_{\varrho_1}\partial_{\varrho_2} x^{a'}, \ldots, \partial_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_p} x^{a'}), \tag{2}$$

où

$$\partial_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_i} = \frac{\partial}{\partial x_{\varrho_1}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{\varrho_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{\varrho_i}} \tag{3}$$

ou, tout court, comme il suit:

$$\Omega^{A'} = F^{A'}(\Omega^A, x^a, x^{a'}) \tag{4}$$

(ici, et ailleurs, les indices grecs avec accent prennent les valeurs $1', 2', \ldots, n'$, l'indice A' prend les valeurs $1', 2', \ldots, N'$).

(ii) Les fonctions F^{Λ} satisfont aux propriétés des groupes

$$
(5)\qquad
\begin{gathered}
F^{\Lambda''}[F^{\Lambda'}(\Omega^{\Lambda}, x^{a}, x^{a'}), x^{a'}, x^{a''}] = F^{\Lambda''}(\Omega^{\Lambda}, x^{a}, x^{a''}),\\
F^{\Lambda}[F^{\Lambda'}(\Omega^{\Lambda}, x^{a}, x^{a'}), x^{a'}, x^{a}] = \Omega^{\Lambda},\\
F^{\Lambda}(\Omega^{\Lambda}, x^{a}, x^{a}) = \Omega^{\Lambda}\\
(\Lambda'' = 1'', 2'', \ldots, N''; \; a'' = 1'', 2'', \ldots, n'').
\end{gathered}
$$

Considérons dans X_n une transformation infiniment petite

$$(6)\qquad 'x^{a} = x^{a} + \omega^{a}\varepsilon,$$

où $\omega^{a}(x^{\gamma})$ est un champ de vecteurs contravariant, et ε une constante infinitésimale. La dérivée de Lie de l'objet Ω^{Λ} relativement au champ du vecteurs ω^{a} ou à la transformation infinitésimale (6) correspondante est définie par

$$(7)\qquad D\Omega^{\Lambda} = {}'\Omega^{\Lambda}(x^{\gamma}) - \Omega^{\Lambda}(x^{\gamma}),$$

où

$$(8)\qquad {}'\Omega^{\Lambda}(x^{\gamma}) = F^{\Lambda}[\Omega^{\Lambda}('x^{a}), 'x^{a}, x^{a}].$$

K. Yano [5] a montré que la dérivée de Lie de l'objet géométrique Ω^{Λ} peut être écrite sous la forme

$$(9)\qquad D\Omega^{\Lambda} = \frac{d}{d\varepsilon}(\Omega^{\Lambda} - F^{\Lambda})\Big|_{\varepsilon=0} = \omega^{\varkappa}\partial_{\varkappa}\Omega^{\Lambda} - \sum_{i=0}^{p} F_{\varkappa}^{\varrho_i\Lambda}\partial_{\varrho_i}\omega^{\varkappa},$$

où

$$\partial_{\varrho_0}\omega^{\varkappa} = \omega^{\varkappa}, \qquad \partial_{\varrho_i}\omega^{\varkappa} = \partial_{\varrho_0\varrho_1\ldots\varrho_i}\omega^{\varkappa},$$

$$F_{\varkappa}^{\varrho_0\Lambda} = \frac{\partial F^{\Lambda}}{\partial 'x^{\varkappa}}\Big|_{\varepsilon=0}, \qquad F_{\varkappa}^{\varrho_i\Lambda} = \frac{\partial F^{\Lambda}}{\partial(\partial_{\varrho_0\varrho_1\ldots\varrho_i}'x^{\varkappa})}\Big|_{\varepsilon=0}.$$

3. Considérons M objets géométriques $\overset{1}{\psi}{}^{\Lambda_1}, \overset{2}{\psi}{}^{\Lambda_2}, \ldots, \overset{M}{\psi}{}^{\Lambda_M}$ où les indices prennent les valeurs $\Lambda_1 = 1, 2, \ldots, N_1$; $\Lambda_2 = 1, 2, \ldots, N_2$; ...; $\Lambda_M = 1, 2, \ldots, N_M$. Supposons que les lois de transformation de ces objets soient:

$$
(10)\qquad
\begin{gathered}
\overset{1}{\psi}{}^{\Lambda_1'} = \overset{1}{F}{}^{\Lambda_1'}(\overset{1}{\psi}{}^{\Lambda_1}, x^{a}, x^{a'}) \qquad (\Lambda_1' = 1', 2', \ldots, N_1'),\\
\overset{2}{\psi}{}^{\Lambda_2'} = \overset{2}{F}{}^{\Lambda_2'}(\overset{2}{\psi}{}^{\Lambda_2}, x^{a}, x^{a'}) \qquad (\Lambda_2' = 1', 2', \ldots, N_2'),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\overset{M}{\psi}{}^{\Lambda_M'} = \overset{M}{F}{}^{\Lambda_M'}(\overset{M}{\psi}{}^{\Lambda_M}, x^{a}, x^{a'}) \qquad (\Lambda_M' = 1', 2', \ldots, N_M').
\end{gathered}
$$

Considérons en outre N fonctions de M objets géométriques $\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}$, $I = 1, 2, \ldots, M$, données sous la forme

$$(11)\qquad \Omega^{\Lambda} = G^{\Lambda}(\overset{1}{\psi}{}^{\Lambda_1}, \overset{2}{\psi}{}^{\Lambda_2}, \ldots, \overset{M}{\psi}{}^{\Lambda_M}).$$

Les nombres Ω^{Λ} sont appelés les composantes [1] du comitant géométrique des objets $\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}$, si dans la transformation des objets $\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}$ d'après (10), ces nombres se transforment d'après la formule

$$(12)\qquad \Omega^{\Lambda'} = F^{\Lambda'}(\Omega^{\Lambda}, x^{a}, x^{a'}),$$

où les fonctions F^{Λ} satisfont aux relations (5).

4. Nous étudierons maintenant la dérivée de Lie du comitant géométrique. Nous allons définir dans X_n les objets $'\Omega^{\Lambda}$, $'\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}$ au moyen des expressions

$$(13)\qquad \Omega^{\Lambda}('x^{a}) = F^{\Lambda}['\Omega^{\Lambda}(x^{a}), x^{a}, 'x^{a}],$$

$$
(14)\qquad
\begin{gathered}
\overset{1}{\psi}{}^{\Lambda_1}('x^{a}) = \overset{1}{F}{}^{\Lambda_1}['\overset{1}{\psi}{}^{\Lambda_1}(x^{a}), x^{a}, x^{a'}],\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\overset{M}{\psi}{}^{\Lambda_M}('x^{a}) = \overset{M}{F}{}^{\Lambda_M}['\overset{M}{\psi}{}^{\Lambda_M}(x^{a}), x^{a}, 'x^{a}].
\end{gathered}
$$

En vertu de (11), (12) et de (13) on a

$$(15)\qquad \Omega^{\Lambda}('x^{a}) = G^{\Lambda}[\overset{1}{\psi}{}^{\Lambda_1}('x^{a}), \overset{2}{\psi}{}^{\Lambda_2}('x^{a}), \ldots, \overset{M}{\psi}{}^{\Lambda_M}('x^{a})],$$

$$
\begin{aligned}
(16)\qquad & F^{\Lambda}['\Omega^{\Lambda}(x^{a}), x^{a}, 'x^{a}]\\
&= G^{\Lambda}\{\overset{1}{F}{}^{\Lambda_1}['\overset{1}{\psi}{}^{\Lambda_1}(x^{a}), x^{a}, x^{a'}], \ldots, \overset{M}{F}{}^{\Lambda_M}['\overset{M}{\psi}{}^{\Lambda_M}(x^{a}), x^{a}, 'x^{a}]\}.
\end{aligned}
$$

En développant en série de Taylor les expressions (15) et (16) on a

$$
\begin{aligned}
(17)\qquad \Omega^{\Lambda}('x^{a}) &= \Omega^{\Lambda}(x^{a}) + \frac{d\Omega^{\Lambda}}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon + \ldots\\
&= \Omega^{\Lambda}(x^{a}) + \sum_{I=1}^{M}\sum_{\Lambda_I=1}^{N_I}\frac{\partial G^{\Lambda}}{\partial\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}}\cdot\frac{d\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon + \ldots,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(18)\qquad F^{\Lambda}['\Omega^{\Lambda}(x^{a}), x^{a}, 'x^{a}] &= {}'\Omega^{\Lambda}(x^{a}) + \frac{dF^{\Lambda}}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon + \ldots\\
&= {}'\Omega^{\Lambda}(x^{a}) + \sum_{I=1}^{M}\sum_{\Lambda_I=1}^{N_I}\frac{\partial G^{\Lambda}}{\partial\overset{I}{F}{}^{\Lambda_I}}\cdot\frac{d\overset{I}{F}{}^{\Lambda_I}}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon + \ldots
\end{aligned}
$$

En tenant compte des relations

$$\left.\frac{\partial G^{\Lambda}}{\partial \overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial G^{\Lambda}}{\partial \overset{I}{F}{}^{\Lambda_I}}\right|_{s=0} \tag{19}$$

et en vertu de (9) on a

$$D\Omega^{\Lambda} = \sum_{I=1}^{M} \sum_{\Lambda_I=1}^{N_I} \frac{\partial G^{\Lambda}}{\partial \overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}} D\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}. \tag{20}$$

Les relations (20) expriment la dérivée de Lie du comitant géométrique par les dérivées de Lie des objets géométriques.

5. Un comitant géométrique est dit *différentiel* quand ses composantes sont fonctions non seulement de $\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}$, mais aussi des dérivées de $\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}$ par rapport à x^{a} relativement jusqu'à l'ordre p_I. En vertu de cette définition on a

$$\Omega^{\Lambda} = G^{\Lambda}(\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}, \partial_{\varrho_1}\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}, \ldots, \partial_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{p_I}}\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}). \tag{21}$$

Les dérivées $\partial_{\varrho_1}\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}, \ldots, \partial_{\varrho_1\ldots\varrho_{p_I}}\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}$ ne forment pas en général d'objet géométrique, mais l'ensemble de ces dérivées forme un objet géométrique avec les lois de transformation

$$\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda_I} = \overset{(I)}{F}{}^{\Lambda_I}(\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda_I'}, x^{a'}, x^{a}), \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\varrho_1}\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda_I} &= \overset{(I)}{F}{}^{\Lambda_I}_{\varrho_1}(\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda_I'}, \partial_{\varrho_1'}\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda_I'}, x^{a'}, x^{a}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \partial_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{p_I}}\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda_I} &= \overset{(I)}{F}{}^{\Lambda_I}(\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda_I'}, \ldots, \partial_{\varrho_1'\ldots\varrho_{p_I}'}\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda'_I}, x^{a'}, x^{a}). \end{aligned} \tag{23}$$

Les fonctions $\overset{I}{F}{}^{\Lambda_I}_{\varrho_1}, \ldots, \overset{I}{F}{}^{\Lambda_I}_{\varrho_1\ldots\varrho_{p_I}}$ sont obtenues par la différentiation des expressions (22) (l'indice I dans les parenthèses prend une valeur fixe). Définissons les nouveaux objets par les expressions

$$\begin{aligned} '[\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda_I}(x^{a})] &= \overset{(I)}{F}{}^{\Lambda_I}[\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda_I}('x^{a}), 'x^{a}, x^{a}],\\ '[\partial_{\varrho_1}\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda_I}(x^{a})] &= \overset{(I)}{F}{}^{\Lambda_I}_{\varrho_1}[\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda_I}('x^{a}), \partial_{\varrho_1}\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda_I}('x^{a}), 'x^{a}, x^{a}],\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ '[\partial_{\varrho_1\ldots\varrho_{p_I}}\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda_I}(x^{a})] &= \overset{(I)}{F}{}^{\Lambda_I}_{\varrho_1\ldots\varrho_{p_I}}[\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda_I}('x^{a}), \ldots, \partial_{\varrho_1\ldots\varrho_{p_I}}\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda_I}('x^{a}), 'x^{a}, x^{a}]. \end{aligned} \tag{24}$$

En vertu de (23) on a

$$\begin{aligned} '(\partial_{\varrho_1}\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda_I}) &= \partial_{\varrho_1}('\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda_I}),\\ &\ldots\ldots\ldots\\ '(\partial_{\varrho_1\ldots\varrho_{p_I}}\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda_I}) &= \partial_{\varrho_1\ldots\varrho_{p_I}}('\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda_I}). \end{aligned} \tag{25}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} D(\partial_{\varrho_1}\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda_I}) &= \partial_{\varrho_1}(D\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda_I}),\\ &\ldots\ldots\ldots\\ D(\partial_{\varrho_1\ldots\varrho_{p_I}}\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda_I}) &= \partial_{\varrho_1\ldots\varrho_{p_I}}(D\overset{(I)}{\psi}{}^{\Lambda_I}). \end{aligned} \tag{26}$$

En tenant compte de (20) et de (26) on a finalement

$$D\Omega^{\Lambda} = \sum_{I=1}^{M} \sum_{\Lambda_I=1}^{N_I} \sum_{s_I=0}^{p_I} \frac{\partial G^{\Lambda}}{\partial(\partial_{\varrho_0\ldots\varrho_{s_I}}\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I})} \partial_{\varrho_0\ldots\varrho_{s_I}} D\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}, \tag{27}$$

où

$$\partial_{\varrho_0}\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I} = \overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}, \quad \partial_{\varrho_0} D\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I} = D\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}. \tag{28}$$

Les relations (27) expriment la dérivée de Lie du comitant géométrique différentiel Ω^{Λ} par les dérivées de Lie des objets géométriques $\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}$.

Nous appellerons dérivée partielle de Lie relativement à l'objet $\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}$ l'expression

$$D_I\Omega^{\Lambda} = \sum_{\Lambda_I=1}^{N_I} \sum_{s_I=0}^{p_I} \frac{\partial G^{\Lambda}}{\partial(\partial_{\varrho_0\ldots\varrho_{s_I}}\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I})} \partial_{\varrho_0\ldots\varrho_{s_I}} D\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}. \tag{29}$$

En vertu de (27) on peut écrire les relations (27) brièvement

$$D\Omega^{\Lambda} = \sum_{I=1}^{M} D_I\Omega^{\Lambda}. \tag{30}$$

6. En intégrant les équations (27) on a

$$\int D\Omega^{\Lambda}(dx) = \int \sum_{I=1}^{M} \sum_{\Lambda_I=1}^{N_I} \sum_{s_I=0}^{p_I} \frac{\partial G^{\Lambda}}{\partial(\partial_{\varrho_0\ldots\varrho_{s_I}}\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I})} \partial_{\varrho_0\ldots\varrho_{s_I}} D\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}(dx), \tag{31}$$

où (dx) est un élément de volume de X_n. Les termes sous le signe d'intégrale peuvent être écrits

$$s_I = 0, \qquad \frac{\partial G^\Lambda}{\partial(\partial_{\varrho_0}\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I})}\,\partial_{\varrho_0}D\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I} = \frac{\partial G^\Lambda}{\partial\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}}\,D\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I},$$

$$s_I = 1, \qquad \frac{\partial G^\Lambda}{\partial(\partial_{\varrho_1}\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I})}\,\partial_{\varrho_1}D\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I} = -\left[\partial_{\varrho_1}\frac{\partial G^\Lambda}{\partial(\partial_{\varrho_1}\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I})}\,D\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}\right]+$$

$$(32)\qquad +\partial_{\varrho_1}\left[\frac{\partial G^\Lambda}{\partial(\partial_{\varrho_1}\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I})}\,D\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}\right] = (-1)^1\left[\partial_{\varrho_1}\frac{\partial G^\Lambda}{\partial(\partial_{\varrho_1}\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I})}\right]D\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I} + \partial_{\varrho_1}{}'\overset{I}{\Theta}{}^{\Lambda\varrho_1}_{\Lambda_I},$$

. . . .

$$s_I = p_I, \qquad \frac{\partial G^\Lambda}{\partial(\partial_{\varrho_1\ldots\varrho_{p_I}}\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I})}\,\partial_{\varrho_1\ldots\varrho_{p_I}}D\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}$$

$$= (-1)^{p_I}\left[\partial_{\varrho_1\ldots\varrho_{p_I}}\frac{\partial G^\Lambda}{\partial(\partial_{\varrho_1\ldots\varrho_{p_I}}\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I})}\right]D\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I} + \partial_{\varrho_1}{}^{(p_I)}\overset{I}{\Theta}{}^{\Lambda\varrho_1}_{\Lambda_I}.$$

Posons

$$(33)\qquad \overset{I}{H}{}^{\Lambda}_{\Lambda_I} = -(-1)^{s_I}\sum_{s_I=0}^{p_I}\partial_{\varrho_0}\cdots_{\varrho_{s_I}}\frac{\partial G^\Lambda}{\partial(\partial_{\varrho_0\ldots\varrho_{s_I}}\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I})},$$

$$(34)\qquad \overset{I}{\Theta}{}^{\Lambda\alpha}_{\Lambda_I} = \sum_{s_I=1}^{p_I}{}^{(s_I)}\overset{I}{\Theta}{}^{\Lambda\alpha}_{\Lambda_I}.$$

Nous appellerons l'objet $\overset{I}{H}{}^{\Lambda}_{\Lambda_I}$ *dérivée de Hamilton*. Dans le cas particulier où l'objet Ω^Λ est une densité scalaire de poids $(+1)$, l'objet $\overset{I}{H}{}^{\Lambda}_{\Lambda_I}$ représente une dérivée ordinaire de Hamilton (v. p. ex. [3]). En utilisant (33), (34) et en vertu de (19) on a

$$(35)\qquad \int D\Omega^\Lambda(dx) = -\int\sum_{I=1}^{M}\sum_{\Lambda_I=1}^{N_I}(\overset{I}{H}{}^{\Lambda}_{\Lambda_I}D\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I} - \partial_\alpha\overset{I}{\Theta}{}^{\Lambda\alpha}_{\Lambda_I})(dx).$$

En supposant que le vecteur ω^α et ses dérivées par rapport à x^α sont nulles sur le bord du domaine d'intégration, le relations précédentes deviennent

$$(36)\qquad \int D\Omega^\Lambda(dx) = -\int\sum_{I=1}^{M}\sum_{\Lambda_I=1}^{N_I}\overset{I}{H}{}^{\Lambda}_{\Lambda_I}D\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}(dx).$$

En tenant compte de (9) et en intégrant (36) on a

$$(37)\qquad \int\Big\{\partial_\varkappa\Omega^\Lambda\omega^\varkappa - F^\Lambda_\varkappa\omega^\varkappa + \sum_{s=1}^{p}(\partial_{\varrho_1\ldots\varrho_s}F^{\varrho_1\ldots\varrho_s\Lambda}_\varkappa)\,\omega^\varkappa\Big\}(dx)$$

$$= \int\sum_{I=1}^{M}\sum_{\Lambda_I=1}^{N_I}\Big\{\overset{I}{H}{}^{\Lambda}_{\Lambda_I}(\partial_\varkappa\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I})\,\omega^\varkappa - \overset{I}{H}{}^{\Lambda}_{\Lambda_I}\overset{I}{F}{}^{\Lambda_I}_\varkappa\omega^\varkappa +$$

$$+\sum_{s_I=1}^{p_I}(\partial_{\varrho_1\ldots\varrho_{s_I}}\overset{I}{H}{}^{\Lambda}_{\Lambda_I}\overset{I}{F}{}^{\varrho_1\ldots\varrho_{s_I}\Lambda_I}_\varkappa)\,\omega^\varkappa\Big\}(dx).$$

Posons

$$(38)\qquad T^{\Lambda\mu}_{I\nu} = \sum_{\Lambda_I=1}^{N_I}\sum_{s_I=2}^{p_I}\partial_{\varrho_2\ldots\varrho_{s_I}}(\overset{I}{H}{}^{\Lambda}_{\Lambda_I}\overset{I}{F}{}^{\mu\varrho_2\ldots\varrho_{s_I}\Lambda_I}_\nu),$$

$$(39)\qquad J^\Lambda_{I\nu} = \sum_{\Lambda_I=1}^{N_I}\overset{I}{H}{}^{\Lambda}_{\Lambda_I}(\overset{I}{F}{}^{\Lambda_I}_\Lambda - \partial_\nu\overset{I}{\psi}{}^{\Lambda_I}),$$

$$(40)\qquad t^{\Lambda\mu}_\nu = \sum_{s=2}^{p}\partial_{\varrho_2\ldots\varrho_s}F^{\mu\varrho_2\ldots\varrho_s\Lambda}_\nu,$$

$$(41)\qquad j^\Lambda_\nu = F^\Lambda_\nu - \partial_\nu\Omega^\Lambda.$$

En vertu de (38)-(40) la relation (37) devient

$$(42)\qquad \int(\partial_\mu t^{\Lambda\mu}_\nu - j^\Lambda_\nu)\,\omega^\nu(dx) = \int\sum_{I=1}^{M}(\partial_\mu T^{\Lambda\mu}_{I\nu} - J^\Lambda_{I\nu})\,\omega^\nu(dx).$$

Le vecteur ω^ν étant arbitraire, on a finalement

$$(43)\qquad \partial_\mu t^{\Lambda\mu}_\nu - j^\Lambda_\nu = \sum_{I=1}^{M}(\partial_\mu T^{\Lambda\mu}_{I\nu} - J^\Lambda_{I\nu}).$$

Les expressions (43) représentent $n\cdot N$ relations pour un comitant différentiel. Dans le cas particulier où Ω^Λ est une densité scalaire de poids $(+1)$, on en déduit facilement les identités de E. Noether [2].

L'auteur remercie M. W. Ślebodziński de ses précieuses remarques au sujet de cette note.

Travaux cités

[1] S. Gołąb, Ann. Soc. Pol. Math., 17 (2) (1938).
[2] E. Noether, Nachr. Ges., Göttingen, 235 (1918).
[3] J. A. Schouten und D. J. Struik, *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie I*, Groningen 1935.
[4] W. Ślebodziński, Bull. Acad. Roy. Belg. 17 (5) (1931).
[5] K. Yano, *The theory of Lie derivatives and its applications*, Groningen 1955.

Reçu par la Rédaction le 1. 6. 1958