ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1960)

Résolution d'un problème aux limites dans la théorie du mouvement non stationnaire d'un fluide visqueux

par J. Wolska-Bochenek (Warszawa)

1. Introduction. Dans la théorie du mouvement plan d'un fluide visqueux on obtient l'équation de la forme

$$\nu\Delta\Delta\psi-\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}+\Phi, \tag{1}$$

où $\psi(x,y,t)$, dite fonction du courant, est définie par les égalités $v_x = \partial\psi/\partial y$, $v_y = -\partial\psi/\partial x$, v_x et v_y étant les composantes du vecteur de vitesse du fluide. La fonction donnée $\Phi(x,y,t) = \mathrm{rot}_z \boldsymbol{F}$, où $\boldsymbol{F}$ est le vecteur des forces extérieures, ν le coefficient de viscosité cinématique.

Dans ce travail nous nous proposons de trouver une fonction $\psi(x,y,t)$, qui à l'intérieur du domaine borné D, limité par la courbe fermée C, pour $0<t\leqslant T$ satisfait à l'équation (1) et, sur le contour C du domaine D, aux conditions limites suivantes:

$$\begin{gathered}\psi(P,t)=0,\\ \frac{d\Delta\psi(P,t)}{dn_P}+a(P,t)\frac{d\psi}{dn_P}+b(P,t)\Delta\psi(P,t)=0,\end{gathered}\qquad (0<t\leqslant T) \tag{2}$$

où $a(P,t)$ et $b(P,t)$ sont des fonctions données, définies dans le domaine $[P\epsilon C,\ 0\leqslant t\leqslant T]$. Nous demandons en outre que la fonction $\psi(A,t)$ satisfasse à la condition initiale

$$\begin{gathered}\psi(A,t)\to f(A)\\ \text{si}\quad t\to 0,\quad A\epsilon D+C,\end{gathered} \tag{3}$$

où la fonction $f(A)$ est donnée.

On admet les hypothèses suivantes:

I. La ligne fermée C a une tangente continue en tout point, et l'angle que fait cette tangente avec une direction fixe satisfait à la condition de Hölder suivante:

$$|\delta_{QQ_1}| < c\cdot r_{QQ_1}^{a} \quad (\tfrac{1}{2} < a \leqslant 1),$$

où δ_{QQ_1} désigne l'angle que font les tangentes en deux points arbitraires Q et Q_1 de la courbe C.

II. La fonction donnée $f(A)$ admet des dérivées troisièmes vérifiant la condition de Hölder et elle vérifie la condition limite

$$f(P)=0, \quad \Delta f(P)=0, \quad \frac{d\Delta f(P)}{dn}=0, \quad \frac{df(P)}{dn}=0.$$

III. La fonction donnée $\Phi(x,y,t)$ est continue par rapport au point $A(x,y)$ du domaine D, par rapport à la variable t de l'intervalle $0\leqslant t\leqslant T$ et elle vérifie la condition de Hölder suivante:

$$|\Phi(A,t)-\Phi(A_1,t)| < \mathrm{const}\cdot r_{AA_1}^{h} \quad (0<h\leqslant 1).$$

Ce fait a lieu si les composantes F_x et F_y du vecteur $\boldsymbol{F}$ des forces extérieures possèdent des dérivées premières continues, vérifiant la condition de Hölder par rapport au point A.

IV. Les fonctions données $a(P,t)$ et $b(P,t)$ sont continues et bornées dans le domaine $[P\in C,\ 0\leqslant t\leqslant T]$ et elles satisfont à la condition de Hölder suivante:

$$|a(P,t)-a(P_1,t_1)| \leqslant h_a[r_{PP_1}^{\beta}+|t-t_1|^{\theta}],$$
$$|b(P,t)-b(P_1,t_1)| \leqslant h_b[r_{PP_1}^{\beta}+|t-t_1|^{\theta}],$$

où $0<\beta<2a-1$, $0<\theta<1$.

2. Résolution du problème aux limites. En s'appuyant sur les résultats de notre travail [1], nous allons chercher la fonction inconnue $\psi(A,t)$, vérifiant l'équation (1) et les conditions (2) et (3), sous la forme d'une somme des potentiels suivants:

$$(4)\quad \psi(A,t) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_D \omega(A,t;B,\tau)\left[\frac{\partial\psi}{\partial y_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_B}-\frac{\partial\psi}{\partial x_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y_B}\right]d\sigma_B d\tau + \psi_0(A,t)+\int_0^t\int_C \omega(A,t;Q,\tau)\mu(Q,\tau)dl_Q d\tau+\int_C\frac{\cos\gamma_{QA}}{r_{AQ}}\zeta(Q,t)dl_Q,$$

où la fonction connue $\psi_0(A,t)$ est donnée par l'expression

$$(5)\quad \psi_0(A,t) = \frac{1}{4\pi}\iint_D\frac{1}{t}\exp\left[-\frac{r_{AB}^2}{4\nu t}\right]f(B)d\sigma_B - \frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_D\omega(A,t;B,\tau)\Phi(B,\tau)d\sigma_B d\tau.$$

Nous allons choisir les fonctions inconnues $\mu(Q,\tau)$ et $\zeta(Q,t)$ de telle façon que la fonction $\psi(A,t)$ vérifie les conditions limites (2).

En tenant compte des formules (46), (50), (89) du travail [1], nous demandons donc que les fonctions $\mu(Q,\tau)$ et $\zeta(Q,t)$ vérifient les équations intégrales:

$$(6)\quad \pi\zeta(P,t)+\int_C\frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\zeta(Q,t)dl_Q = -\int_0^t\int_C\omega(P,t;Q,\tau)\mu(Q,\tau)dl_Q d\tau + \frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_D\omega(P,t;B,\tau)\left[\frac{\partial\psi}{\partial y_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_B}-\frac{\partial\psi}{\partial x_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y_B}\right]d\sigma_B d\tau-\psi_0(P,t),$$

$$\frac{\pi}{2}\mu(P,t)+\pi a\int_0^t\mu(P,\tau)d\tau = \int_0^t\int_C\frac{d\Delta\omega}{dn_P}\mu(Q,\tau)dl_Q d\tau + a\int_0^t\int_C\frac{d\omega}{dn_P}\mu(Q,\tau)dl_Q d\tau + b\int_0^t\int_C\Delta\omega\cdot\mu(Q,\tau)dl_Q d\tau + \int_C\frac{d}{dn_P}\left(\frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\right)[\zeta(Q,t)-\zeta(P,t)]dl_Q - \frac{a}{4\pi}\int_0^t\iint_D\frac{d\omega}{dn_P}\left[\frac{\partial\psi}{\partial y_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_B}-\frac{\partial\psi}{\partial x_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y_B}\right]d\sigma_B d\tau - \frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_D\frac{d\Delta\omega}{dn_P}\left[\frac{\partial\psi}{\partial y_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_B}-\frac{\partial\psi}{\partial x_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y_B}\right]d\sigma_B d\tau - \frac{b}{4\pi}\int_0^t\iint_D\Delta\omega\left[\frac{\partial\psi}{\partial y_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_B}-\frac{\partial\psi}{\partial x_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y_B}\right]d\sigma_B d\tau + a\frac{d}{dn_P}[\psi_0(P,t)]+\frac{d}{dn_P}[\Delta\psi_0(P,t)]+b\Delta\psi_0(P,t).$$

D'après la théorie des équations intégrales de Volterra, la dernière équation du système (6) est équivalente à l'équation intégrale suivante:

$$
\begin{aligned}
(6')\qquad \mu(P,t) ={}& \frac{2}{\pi}\int_0^t\int_C \frac{d\Delta\omega}{dn}\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau+\frac{2a}{\pi}\int_0^t\int_C \frac{d\omega}{dn}\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau+\\
&+\frac{2b}{\pi}\int_0^t\int_C \Delta\omega\cdot\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau+\frac{2a}{\pi}\int_C \frac{d}{dn_P}\left(\frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\right)[\zeta(Q,t)-\zeta(P,t)]\,dl_Q-\\
&-\frac{a}{2\pi^2}\int_0^t\iint_D \frac{d\omega}{dn_P}\left[\frac{\partial\psi}{\partial y_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_B}-\frac{\partial\psi}{\partial x_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y_B}\right]d\sigma_B\,d\tau-\\
&-\frac{1}{2\pi^2}\int_0^t\iint_D \frac{d\Delta\omega}{dn_P}\left[\frac{\partial\psi}{\partial y_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_B}-\frac{\partial\psi}{\partial x_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y_B}\right]d\sigma_B\,d\tau-\\
&-\frac{ab}{2\pi^2}\int_0^t\iint_D \Delta\omega\left[\frac{\partial\psi}{\partial y_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_B}-\frac{\partial\psi}{\partial x_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y_B}\right]d\sigma_B\,d\tau+\\
&+\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{d\psi_0}{dn}+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{d\Delta\psi_0}{dn}+\frac{2ab}{\pi}\Delta\psi_0-\\
&-a\int_0^t \exp\left[-2\int_s^t a(P,\tau)\,d\tau\right]\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^s\int_C \frac{d\Delta\omega}{dn}\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau+\right.\\
&+\frac{2a}{\pi}\int_0^s\int_C \frac{d\omega}{dn}\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau+\frac{2ab}{\pi}\int_0^s\int_C \Delta\omega\cdot\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau+\\
&+\frac{2a}{\pi}\int_C \frac{d}{dn_P}\left(\frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\right)[\zeta(Q,t)-\zeta(P,s)]\,dl_Q-\\
&-\frac{1}{2\pi^2}\int_0^s\iint_D \frac{d\Delta\omega}{dn}\left[\frac{\partial\psi}{\partial y_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_B}-\frac{\partial\psi}{\partial x_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y_B}\right]d\sigma_B\,d\tau-\\
&-\frac{a}{2\pi^2}\int_0^s\iint_D \frac{d\omega}{dn}\left[\frac{\partial\psi}{\partial y_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_B}-\frac{\partial\psi}{\partial x_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y_B}\right]d\sigma_B\,d\tau-\\
&-\frac{ab}{2\pi^2}\int_0^s\iint_D \Delta\omega\left[\frac{\partial\psi}{\partial y_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_B}-\frac{\partial\psi}{\partial x_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y_B}\right]d\sigma_B\,d\tau+\\
&\left.+\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{d\psi_0}{dn}+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{d\Delta\psi_0}{dn}+\frac{2ab}{\pi}\Delta\psi_0\right\}ds.
\end{aligned}
$$

Les équations (4) et (6) forment un système de trois équations intégro-différentielles, non linéaires, à forte singularité, avec les fonctions inconnues $\psi(A,t)$, $\mu(Q,\tau)$, $\zeta(Q,t)$. Pour résoudre le système d'équations (4) et (6), étudions le système auxiliaire suivant:

$$
(7)\qquad\left\{
\begin{aligned}
u(A,t) ={}& -\frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_D \frac{\partial}{\partial x}\omega(A,t;B,\tau)[vz-uw]_B\,d\sigma_B\,d\tau+\\
&+\int_0^t\int_C \frac{\partial}{\partial x}\omega(A,t;Q,\tau)\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau+\\
&+\int_C \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos\gamma_{QA}}{r_{AQ}}\right)[\zeta(Q,t)-\zeta(P,t)]\,dl_Q+\frac{\partial}{\partial x}\psi_0(A,t),\\
v(A,t) ={}& -\frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_D \frac{\partial}{\partial y}\omega(A,t;B,\tau)[vz-uw]_B\,d\sigma_B\,d\tau+\\
&+\int_0^t\int_C \frac{\partial}{\partial y}\omega(A,t;Q,\tau)\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau+\\
&+\int_C \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\cos\gamma_{QA}}{r_{AQ}}\right)[\zeta(Q,t)-\zeta(P,t)]\,dl_Q+\frac{\partial}{\partial y}\psi_0(A,t),\\
w(A,t) ={}& -\frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_D \frac{\partial}{\partial x}[\Delta\omega(A,t;B,\tau)][vz-uw]_B\,d\sigma_B\,d\tau+\\
&+\int_0^t\int_C \frac{\partial}{\partial x}[\Delta\omega(A,t;Q,\tau)]\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau+\frac{\partial}{\partial x}[\Delta\psi_0(A,t)],\\
z(A,t) ={}& -\frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_D \frac{\partial}{\partial y}[\Delta\omega(A,t;B,\tau)][vz-uw]_B\,d\sigma_B\,d\tau+\\
&+\int_0^t\int_C \frac{\partial}{\partial y}[\Delta\omega(A,t;Q,\tau)]\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau+\frac{\partial}{\partial y}[\Delta\psi_0(A,t)],\\
\pi\zeta(P,t)+\int_C \frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\zeta(Q,t)\,dl_Q ={}& \int_0^t\int_C \omega(A,t;Q,\tau)\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau+\\
&+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_D \omega(A,t;B,\tau)[vz-uw]_B\,d\sigma_B\,d\tau-\psi_0(P,t),
\end{aligned}\right.
$$

$$(7)\quad \begin{cases} \mu(P,t)-\int\limits_0^t\int\limits_C N(P,t;Q,\tau)\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau=\dfrac{2a}{\pi}\int\limits_C\dfrac{d}{dn_P}\left(\dfrac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\right)\times \\ \times\left\{[\zeta(Q,t)-\zeta(P,t)]-a\int\limits_0^t\exp\left[-\int\limits_s^t a(P,\tau)\,d\tau\right][\zeta(Q,t)-\zeta(P,s)]\,ds\right\}dl_Q+ \\ \quad+\dfrac{a}{2\pi^2}\int\limits_0^t\iint\limits_D\dfrac{d}{dn_P}\,\omega(A,t;B,\tau)[vz-uw]_B\,d\sigma_B\,d\tau- \\ \quad-\dfrac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^t\iint\limits_D\dfrac{d}{dn_P}[\Delta\omega(A,t;B,\tau)][vz-uw]_B\,d\sigma_B\,d\tau- \\ \quad-\dfrac{ab}{2\pi^2}\int\limits_0^t\iint\limits_D\Delta\omega(A,t;B,\tau)[vz-uw]_B\,d\sigma_B\,d\tau+ \\ \quad+\dfrac{2a}{\pi}\cdot\dfrac{d\psi_0}{dn_P}+\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{d\Delta\psi_0}{dn_P}+\dfrac{2ab}{\pi}\Delta\psi_0, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(7')\quad N(P,t;Q,\tau)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{d}{dn_P}[\Delta\omega(P,t;Q,\tau)]-a\int\limits_\tau^t\exp\left[-2\int\limits_s^t a(P,\tau)\,d\tau\right]\cdot\frac{d}{dn_P}[\Delta\omega(P,t;Q,s)]\,ds+\right.$$

$$+a\frac{d}{dn_P}[\omega(P,t;Q,\tau)]-a^2\int\limits_\tau^t\exp\left[-2\int\limits_s^t a(P,\tau)\,d\tau\right]\cdot\frac{d}{dn_P}[\omega(P,t;Q,s)]\,ds+$$

$$\left.+ab\Delta\omega(P,t;Q,\tau)-a^2b\int\limits_\tau^t\exp\left[-2\int\limits_s^t a(P,\tau)\,d\tau\right]\cdot\Delta\omega(P,t;Q,s)\,ds\right\}.$$

C'est un système de 6 équations intégrales, à fortes singularités, avec 6 fonctions inconnues $u(A,t)$, $v(A,t)$, $w(A,t)$, $z(A,t)$, $\zeta(P,t)$, $\mu(P,t)$. Nous allons résoudre ce système par l'application du théorème topologique de J. Schauder [2]:

Si, dans un espace de Banach, une transformation continue fait correspondre à un ensemble E de points, convexe et fermé, son sous-ensemble compact, il existe dans l'ensemble E au moins un point invariant de la transformation.

Considérons donc un espace fonctionnel Λ composé de tous les systèmes de 6 fonctions réelles:

$$U[u(A,t),\,v(A,t),\,w(A,t),\,z(A,t),\,\zeta(P,t),\,\mu(P,t)],$$

définies dans le domaine $[A\in D+C,\ 0\leqslant t\leqslant T]$ ou bien $[P\in C,\ 0\leqslant t\leqslant T]$, où les fonctions u, v, w, z, ζ, μ sont continues et la fonction ζ est continue par rapport à la variable t et possède une dérivée par rapport à l'arc continue en tout point P de la courbe C. On définit les opérations linéaires dans l'espace Λ par les relations connues:

$$[u,v,w,z,\zeta,\mu]+[u_1,v_1,w_1,z_1,\zeta_1,\mu_1]$$
$$=[u+u_1,\,v+v_1,\,w+w_1,\,z+z_1,\,\zeta+\zeta_1,\,\mu+\mu_1],$$
$$\lambda[u,v,w,z,\zeta,\mu]=[\lambda u,\lambda v,\lambda w,\lambda z,\lambda\zeta,\lambda\mu].$$

On définit la distance $\delta(U,U_1)$ de deux points $U[u,v,w,z,\zeta,\mu]$ et $U_1[u_1,v_1,w_1,z_1,\zeta_1,\mu_1]$ de l'espace Λ par la somme des bornes supérieures

$$(8)\quad \delta(U,U_1)=\sup|u-u_1|+\sup|v-v_1|+\sup|w-w_1|+\sup|z-z_1|+$$
$$+\sup|\mu-\mu_1|+\sup|\zeta-\zeta_1|+\sup\left|\frac{d\zeta}{dl}-\frac{d\zeta_1}{dl}\right|$$

et enfin la norme du point U par la distance $\delta(U,0)$ des points U et $0(0,0,0,0,0,0)$, c'est-à-dire

$$(9)\quad \|U\|=\sup|u|+\sup|v|+\sup|w|+\sup|z|+\sup|\mu|+\sup|\zeta|+\sup\left|\frac{d\zeta}{dl}\right|.$$

L'espace Λ est donc linéaire, normé et complet — par conséquent c'est un espace de Banach.

Considérons maintenant dans l'espace Λ l'ensemble E de tous les points $U[u(A,t),v(A,t),w(A,t),z(A,t),\zeta(P,t),\mu(P,t)]$ satisfaisant aux conditions

$$|U(A,t)|\leqslant R,\quad |v(A,t)|\leqslant R,\quad |w(A,t)|\leqslant R,$$
$$|z(A,t)|\leqslant R,\quad |\zeta(P,t)|\leqslant\varrho_1,\quad \zeta(P,0)=0,$$
$$(10)\quad \left|\frac{d\zeta(P,t)}{dl}\right|\leqslant\varrho_1',\quad \left|\frac{d\zeta(Q_1,t)}{dl}-\frac{d\zeta(Q_2,t)}{dl}\right|\leqslant\varkappa_1 r^\beta_{Q_1Q_2},$$
$$|\mu(P,t)|\leqslant\varrho_2,\quad |\mu(Q_1,t)-\mu(Q_2,t)|\leqslant\varkappa_2 r^\beta_{Q_1Q_2},$$

où β est un exposant positif arbitrairement choisi, mais tel que $\beta<2\alpha-1$, où α est l'exposant de la condition I. Les constantes positives R, ϱ_1, ϱ_1', ϱ_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ sont arbitrairement choisies, mais elles doivent vérifier des inégalités que nous préciserons plus tard. L'ensemble E est évidemment fermé, puisque les fonctions limites des suites uniformément convergentes des fonctions $u(A,t)$, $v(A,t)$, $w(A,t)$, $z(A,t)$, $\zeta(P,t)$, $\mu(P,t)$ vérifiant les conditions (10), vérifient aussi ces conditions. L'ensemble E est en outre convexe; en effet, si $[u_1, v_1, w_1, z_1, \zeta_1, \mu_1]$ et $[u_2, v_2, w_2, z_2, \zeta_2, \mu_2]$ sont deux points vérifiant les inégalités (10), les fonctions:

$$(1-m)u_1+mu_2,\quad (1-m)v_1+mv_2,\quad (1-m)w_1+mw_2,$$
$$(1-m)z_1+mz_2,\quad (1-m)\zeta_1+m\zeta_2,\quad (1-m)\mu_1+m\mu_2$$

vérifient aussi ces conditions, si le nombre réel m varie dans l'intervalle $(0,1)$; cela veut dire que tous les points du segment rectiligne, joignant les points U_1 et U_2 dans l'ensemble E, appartiennent aussi à cet ensemble.

Transformons maintenant l'ensemble E en faisant correspondre à tout point $U[u, v, w, z, \zeta, \mu]$ de cet ensemble le point $\bar U[\bar u, \bar v, \bar w, \bar z, \bar\zeta, \bar\mu]$ déterminé par les relations fonctionnelles:

$$(11)\left\{\begin{aligned}
\bar u(A,t) &= -\frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_D \frac{\partial\omega}{\partial x}[vz-uw]_B\,d\sigma_B\,d\tau+\int_0^t\int_C \frac{\partial\omega}{\partial x}\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau+\\
&\quad+\int_C \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos\gamma_{QA}}{r_{AQ}}\right)[\zeta(Q,t)-\zeta(P,t)]\,dl_Q+\frac{\partial\psi_0}{\partial x},\\
\bar v(A,t) &= -\frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_D \frac{\partial\omega}{\partial y}[vz-uw]_B\,d\sigma_B\,d\tau+\int_0^t\int_C \frac{\partial\omega}{\partial y}\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau+\\
&\quad+\int_C \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\cos\gamma_{QA}}{r_{AQ}}\right)[\zeta(Q,t)-\zeta(P,t)]\,dl_Q+\frac{\partial\psi_0}{\partial y},\\
\bar w(A,t) &= -\frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_D \frac{\partial\Delta\omega}{\partial x}[vz-uw]_B\,d\sigma_B\,d\tau+\\
&\quad+\int_0^t\int_C \frac{\partial\Delta\omega}{\partial x}\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau+\frac{\partial\Delta\psi_0}{\partial x},\\
\bar z(A,t) &= -\frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_D \frac{\partial\Delta\omega}{\partial y}[vz-uw]_B\,d\sigma_B\,d\tau+\\
&\quad+\int_0^t\int_C \frac{\partial\Delta\omega}{\partial y}\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau+\frac{\partial\Delta\psi_0}{\partial y},\\
\pi\bar\zeta(P,t)+\int_C \frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\bar\zeta(Q,t)\,dl_Q &= \int_0^t\int_C \omega\cdot\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau+\\
&\quad+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_D \omega\cdot[vz-uw]_B\,d\sigma_B\,d\tau-\psi_0(P,t),\\
\bar\mu(P,t)-\int_0^t\int_C N(P,t;Q,\tau)\bar\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau &= \frac{2a}{\pi}\int_C \frac{d}{dn}\left(\frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\right)\times\\
&\quad\times\Big\{[\bar\zeta(Q,t)-\bar\zeta(P,t)]-a\int_0^t \exp\Big[-\int_s^t a(P,\tau)\,d\tau\Big][\bar\zeta(Q,t)-\bar\zeta(P,s)]\,ds\Big\}\,dl_Q-\\
&\quad-\frac{a}{2\pi^2}\int_0^t\iint_D \frac{d\omega}{dn}[vz-uw]_B\,d\sigma_B\,d\tau-\frac{1}{2\pi^2}\int_0^t\iint_D \frac{d\Delta\omega}{dn}[vz-uw]_B\,d\sigma_B\,d\tau-\\
&\quad-\frac{ab}{2\pi^2}\int_0^t\iint_D \Delta\omega[vz-uw]_B\,d\sigma_B\,d\tau+\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{d\psi_0}{dn}+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{d\Delta\psi_0}{dn}+\frac{2ab}{\pi}\Delta\psi_0.
\end{aligned}\right.$$

Nous allons démontrer que ces relations déterminent un point $\bar U[\bar u, \bar v, \bar w, \bar z, \bar\zeta, \bar\mu]$ de l'espace Λ. Remarquons d'abord que, d'après les résultats du travail [1], les 4 premières équations du système (11) fournissent les fonctions u, v, w, z, continues dans la région fermée $[D+C, (0,T)]$, en considérant les valeurs limites de ces fonctions si $A\to P$ comme les valeurs correspondant au point P de la frontière C.

La 5-ième équation du système (11) a la forme d'une équation de Fredholm à singularité faible, avec la fonction inconnue $\bar\zeta(P,t)$. De la théorie du problème de Dirichlet nous savons que l'équation homogène, obtenue en égalant à zéro le second membre de cette équation, n'admet que la solution $\bar\zeta=0$. Donc la 5-ième équation (11) détermine une fonction continue $\bar\zeta(P,t)$.

La 6-ième équation du système (11) est une équation de Volterra de la forme

$$(12)\qquad \bar\mu(P,t)-\int_0^t\int_C N(P,t;Q,\tau)\bar\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau = F(P,t).$$

Le noyau de cette équation $N(P,t;Q,\tau)$, de la forme (7'), admet une singularité faible, d'après les limitations connues des fonctions $d\omega/dn$, $d\Delta\omega/dn$, $\Delta\omega$ (voir [1]):

$$\begin{aligned}
|N(P,t;Q,\tau)| < \frac{2}{\pi}\Big[&\frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\lambda}}\cdot\frac{1}{r_{PQ}^{3-2\lambda-\alpha}}+\text{const}\cdot A_0(t-\tau)^{1-\lambda}\frac{1}{r_{PQ}^{3-2\lambda-\alpha}}+\\
&+\text{const}\cdot A_0(t-\tau)^{\lambda/2}\cdot\frac{1}{r_{PQ}^{1+\lambda-\alpha}}+\text{const}\cdot A_0^2(t-\tau)^{\lambda/2+1}\cdot\frac{1}{r_{PQ}^{1+\lambda-\alpha}}+\\
&+\frac{\text{const}\cdot A_0B_0}{(t-\tau)^{\lambda}}\cdot\frac{1}{r_{PQ}^{2-2\lambda}}+\text{const}\cdot A_0^2B_0(t-\tau)^{1-\lambda}\cdot\frac{1}{r_{PQ}^{2-2\lambda}}\Big],
\end{aligned}$$

où $A_0=\sup|a(P,t)|$, $B_0=\sup|b(P,t)|$; $1-\frac{1}{2}\alpha<\lambda<1$.

L'équation de Volterra (12) admet alors une solution de la forme

$$\mu(P,t) = F(P,t) - \int_0^t \int_C \mathfrak{N}(P,t;Q,\tau) F(Q,\tau)\, dl_Q\, d\tau,$$

où $\mathfrak{N}(P,t;Q,\tau)$ est le noyau résolvant du noyau $N(P,t;Q,\tau)$ et la fonction donnée $F(P,t)$ est bornée et intégrable dans le domaine $[P \in C,\ 0 \leqslant t \leqslant T]$.

Remarquons maintenant que tous les termes du second membre de la 5-ième équation du système (11) possèdent une dérivée par rapport à l'arc, vérifiant la condition de Hölder avec l'exposant β, en tout point P de la courbe C. Cette propriété résulte pour la première intégrale

$$\int_0^t \int_C \omega(P,t;Q,\tau)\mu(Q,\tau)\, dl_Q\, d\tau$$

du théorème 10 du travail [1]. La seconde intégrale

$$\int_0^t \iint_D \omega(P,t;B,\tau)\,[vz-uw]_B\, d\sigma_B\, d\tau$$

est un potentiel de charge plane et possède une dérivée tangentielle vérifiant la condition de Lipschitz, sous la seule supposition que la densité de la charge $[vz-uw]$ soit continue.

La fonction donnée $\psi_0(P,t)$ possède la même propriété. En s'appuyant d'abord sur la continuité évidente de la fonction $\bar{\zeta}(Q,t)$, nous pouvons affirmer que l'intégrale du premier membre de la 5-ième équation du système (11) satisfait à la condition de Hölder avec un exposant arbitrairement inférieur à l'exposant α de l'hypothèse I. Il en résulte que la solution $\bar{\zeta}(Q,t)$ de la 5-ième équation du système (11) vérifie la condition de Hölder avec l'exposant $\beta_1 < \alpha$.

Maintenant, en s'appuyant sur le fait que la fonction $\bar{\zeta}$ vérifie la condition de Hölder avec l'exposant β_1 tel que $\alpha+\beta_1 > 1$, nous voyons, en vertu du théorème 13 du travail [1], que cette intégrale possède une dérivée par rapport à l'arc, vérifiant la condition de Hölder avec l'exposant $\alpha+\beta_1-1$. D'après l'hypothèse I on a $\alpha > \frac{1}{2}$ et l'exposant β vérifie l'inégalité $\beta < 2\alpha-1$, donc on peut toujours choisir β_1 de telle façon qu'on ait $\alpha+\beta_1 > 1+\beta$.

Nous pouvons donc constater que la dérivée par rapport à l'arc de l'intégrale du premier membre de la 5-ième équation du système (11) satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant $\beta < \alpha$.

Il en résulte encore que la fonction $\bar{\zeta}(P,t)$ correspondant aux fonctions $\mu(P,t)$, $u(A,t)$, $v(A,t)$, $w(A,t)$, $z(A,t)$ de l'ensemble E possède une dérivée par rapport à l'arc vérifiant la condition de Hölder avec l'exposant β. En outre nous remarquons que $\bar{\zeta}(P,0) = 0$.

Nous établirons maintenant les propriétés suivantes des termes du second membre de la 6-ième équation du système (11). L'intégrale

$$\frac{2a}{\pi}\int_C \frac{d}{dn_P}\left(\frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\right)\Big\{[\bar{\zeta}(Q,t)-\bar{\zeta}(P,t)] - a\int_0^t \exp\Big[-\int_s^t a(P,\tau)\,d\tau\Big][\bar{\zeta}(Q,t)-\bar{\zeta}(P,s)]\,ds\Big\}dl_Q$$

satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant β, d'après le théorème 15 du travail [1] et l'hypothèse faite pour la fonction $a(P,t)$. L'intégrale

$$\frac{a}{2\pi^2}\int_0^t \iint_D \frac{d\omega}{dn}[vz-uw]_B\, d\sigma_B\, d\tau$$

satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant β, d'après inégalité (17') (travail [1]) et d'après l'hypothèse faite pour la fonction $a(P,t)$.

L'intégrale

$$\int_0^t \iint_D \frac{d\Delta\omega}{dn}[vz-uw]_B\, d\sigma_B\, d\tau$$

satisfait à la condition de Hölder avec un exposant arbitrairement inférieur à l'unité, d'après l'inégalité (37) (travail [1]). L'intégrale

$$\frac{ab}{2\pi^2}\int_0^t \iint_D \Delta\omega\,[vz-uw]_B\, d\sigma_B\, d\tau$$

satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant β, d'après l'inégalité (39) (travail [1]) et d'après l'hypothèse faite pour les fonctions $a(P,t)$, $b(P,t)$. Les fonctions données $\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{d\psi_0}{dn}$, $\frac{d\Delta\psi_0}{dn}$, $\frac{2ab}{\pi}\Delta\psi_0$ possèdent la même propriété.

La fonction μ étant continue, nous pouvons affirmer, d'après le théorème 12 (travail [1]), d'après l'inégalité (35), (17') (travail [1]), que l'intégrale du premier membre de la 6-ième équation du système (11) satisfait aussi à la condition de Hölder avec un exposant arbitrairement inférieur à l'exposant α. Nous en concluons que la fonction $\mu(P,t)$ correspondant aux fonctions $\bar{\zeta}(P,t)$, $u(A,t)$, $v(A,t)$, $w(A,t)$, $z(A,t)$ de l'ensemble E satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant $\beta < \alpha$.

Le point transformé $\overline{U}[\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{z},\bar{\zeta},\bar{\mu}]$ appartient donc à l'espace Λ.

Cherchons maintenant la condition pour que le point transformé $\overline{U}[\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{z},\bar{\zeta},\bar{\mu}]$ fasse partie de l'ensemble E. Remarquons d'abord que, d'après les 4 premières équations du système (11) et d'après les inégalités (17), (37), (64), (66), (99) (travail [1]), les fonctions $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{z}$ vérifient les inégalités suivantes:

$$(13)\quad \begin{aligned} |\bar{u}(A,t)| &\leqslant \frac{R^2}{2\pi}K'_\omega t^{\lambda/2+1}+k'_\omega(\varrho_2+\varkappa_2)t^{\lambda^*/2+1}+(\tilde{c}'\varrho'_1+\tilde{c}''\varkappa_1)+L_1,\\ |\bar{v}(A,t)| &\leqslant \frac{R^2}{2\pi}K'_\omega t^{\lambda/2+1}+k'_\omega(\varrho_2+\varkappa_2)t^{\lambda^*/2+1}+(\tilde{c}'\varrho'_1+\tilde{c}''\varkappa_1)+L_1,\\ |\bar{w}(A,t)| &\leqslant \frac{R^2}{2\pi}K''_\omega t^{1-\lambda'}+k''_\omega(\varrho_2 t^{1-\lambda_1}+\varkappa_2 t^{1-\lambda_2})+L_2,\\ |\bar{z}(A,t)| &\leqslant \frac{R^2}{2\pi}K''_\omega t^{1-\lambda'}+k''_\omega(\varrho_2 t^{1-\lambda_1}+\varkappa_2 t^{1-\lambda_2})+L_2, \end{aligned}$$

où

$$(13')\qquad L_1 = \sup|(\psi_0)'_A|,\qquad L_2 = \sup|(\Delta\psi_0)'_A|.$$

Cherchons maintenant une limitation de la fonction $\bar{\zeta}(P,t)$. Cette fonction est la solution unique de l'équation de Fredholm

$$\pi\bar{\zeta}(P,t)+\int_C\frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\bar{\zeta}(Q,t)\,dl_Q = \tilde{F}(P,t),$$

où $\tilde{F}(P,t)$ désigne le second membre de la 5-ième équation du système (11). D'après le premier théorème de Fredholm nous aurons

$$\bar{\zeta}(P,t) = \frac{1}{\pi}\tilde{F}(P,t)+\frac{1}{\pi}\int_C\mathfrak{M}(P,Q)\tilde{F}(Q,t)\,dl_Q,$$

$\mathfrak{M}$ étant une fonction déterminée, à singularité faible si $Q\to P$, ne dépendant que du noyau $\dfrac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}$. Nous aurons donc d'après (43′) et (11′) (travail [1])

$$(14)\qquad |\bar{\zeta}(P,t)| < K_{\mathfrak{M}}\Big(k_\omega t^{\lambda/2+1}\sup|\mu|+\frac{R^2}{2\pi}K_\omega t^{\lambda/2+1}+L_3\Big),$$

où

$$(14')\qquad L_3 = \sup|\psi_0|,\qquad K_{\mathfrak{M}} = \frac{1}{\pi}\Big(1+\sup\int_C|\mathfrak{M}|\,dl_Q\Big).$$

D'après les considérations précédentes et les expressions (90), (65), (17′) (travail [1]) la fonction $\bar{\zeta}(P,t)$ vérifie la condition de Hölder de la forme

$$(15)\qquad |\bar{\zeta}(P_1,t)-\bar{\zeta}(P_2,t)| < \pi^{-1}\Big(c_3\sup|\bar{\zeta}|+k'_\omega t^{\lambda^*/2+1}(\varrho_2+\varkappa_2)+\frac{R^2}{2\pi}H_\omega t^{\lambda/2+1}+L'_3\Big)r^{\beta}_{P_1P_2},$$

où

$$(15')\qquad L'_3 = \text{const}\cdot\sup\left|\frac{d\psi_0}{dl}\right|.$$

Il en résulte, d'après le théorème 15 (travail [1]), que la fonction $\bar{\zeta}$ possède une dérivée par rapport à l'arc, vérifiant l'inégalité

$$(16)\qquad \left|\frac{d\bar{\zeta}}{dl}\right| < \pi^{-1}\Big[c'_5 H_{\bar{\zeta}}+c'_1\sup|\mu|t+\tilde{c}'_1 H_\mu t+K'_\omega t^{\lambda/2+1}\frac{R^2}{2\pi}+L_4\Big],$$

où

$$(16')\qquad L_4 = \sup\left|\frac{d\psi_0}{dl}\right|,$$

et la condition de Hölder de la forme

$$(17)\qquad \left|\frac{d}{dl}\bar{\zeta}(P_1,t)-\frac{d}{dl}\bar{\zeta}(P_2,t)\right| < \pi^{-1}\Big[c_5 H_{\bar{\zeta}}+c_1\sup|\mu|t^{1-\lambda}+\tilde{c}_1 H_\mu t^{1-\lambda}+\frac{R^2}{2\pi}H'_\omega t^{1+\lambda/2}+L'_4\Big]r^{\alpha+\beta_1-1}_{P_1P_2},$$

où L'_4 est le coefficient de Hölder de la fonction $d\psi_0/dl$. D'après l'hypothèse $\frac{1}{2}<\alpha<1$, $\beta<2\alpha-1$, nous choisissons $\beta_1<\alpha$ tel qu'on ait $\alpha+\beta_1-1=\beta$.

D'après la 6-ième équation du système (11) et d'après les inégalités (40), (95), (35′), (17) (travail [1]) nous voyons que la fonction $\mu(P,t)$ admet la limitation

$$(18)\qquad |\mu(P,t)| < 2\pi^{-1}(1+K_{\mathfrak{N}})\bigg[\Big(c'A_0\sup\left|\frac{d\bar{\zeta}}{dl}\right|+c'_4A_0\tilde{H}_{\bar{\zeta}}\Big)(1+A_0t)+ +\frac{A_0R^2}{2\pi}K^*_\omega t^{\lambda/2+1}+\frac{R^2}{2\pi}K''_\omega t^{1-\lambda'}+\frac{A_0B_0R^2}{2\pi}K'_\omega t^{1-\lambda}+A_0L_5+L_6+A_0B_0L_7\bigg],$$

où

$$(19)\qquad A_0 = \sup|a|,\qquad B_0 = \sup|b|,$$
$$L_5 = \sup\left|\frac{d\psi_c}{dn}\right|,\qquad L_6 = \sup\left|\frac{d\Delta\psi_0}{dn}\right|,\qquad L_7 = \sup|\Delta\psi_0|,$$

et d'après les inégalités (39), (70), (96), (17′), (36) (travail [1]) la condition de Hölder suivante:

$$
\begin{aligned}
(20)\qquad & |\bar\mu(P_1, t)-\bar\mu(P_2, t)| \\
& < \pi^{-1}\Bigg[\pi c_2 \sup|\bar\mu|\, t^{(1-\theta)\alpha/2}+2(cA_0+c'h_a)\sup\left|\frac{d\bar\zeta}{dl}\right|\cdot(1+A_0t)+ \\
& +2(c_4A_0+c_4'h_a)\tilde H_{\bar\zeta}\cdot(1+A_0t)+\frac{R^2}{\pi}H_\omega'' t^{1-\lambda'}+\frac{A_0+\sqrt{2}h_a}{\sqrt{2}\cdot\pi}R^2K_\omega^* t^{\lambda/2+1}+ \\
& +\frac{A_0B_0R^2}{\pi}H_\omega' t^{1-\lambda}+\frac{A_0h_b+B_0h_a}{\pi}R^2K_\omega' t^{1-\lambda}+ \\
& +A_0L_5'+L_6'+A_0B_0L_7'+2h_aL_5+2(A_0h_b+B_0h_a)L_7\Bigg] r_{P_1P_2}^{\beta},
\end{aligned}
$$

où L_5', L_6', L_7' sont les coefficients de Hölder des fonctions $2d\psi_0/dn$, $2d\Delta\psi_0/dn$, $2\Delta\psi_0$.

En s'appuyant sur les inégalités (13)-(20) nous pouvons affirmer que l'ensemble transformé $\bar E$ fera partie de l'ensemble E, si les constantes du problème vérifient les inégalités suivantes:

$$
(21)\qquad \left\{
\begin{aligned}
& \frac{R^2}{2\pi}K_\omega' T^{\lambda/2+1}+(\varrho_2+\varkappa_2)k_\omega' T^{\lambda^*/2+1}+\tilde c'\varrho_1'+\tilde c''\varkappa_1+L_1 \leqslant R, \\
& \qquad \frac{R^2}{2\pi}K_\omega'' T^{1-\lambda'}+k_\omega''(\varrho_2T^{1-\lambda'}+\varkappa_2T^{1-\lambda_2})+L_2 \leqslant R, \\
& \qquad\qquad K_{\mathfrak{M}}\left(k_\omega T^{\lambda/2+1}\varrho_2+\frac{R^2}{2\pi}K_\omega T^{\lambda/2+1}+L_3\right) \leqslant \varrho_1, \\
& \pi^{-1}\Bigg\{c_5'\pi^{-1}\Bigg[c_3K_{\mathfrak{M}}\left(k_\omega T^{\lambda/2+1}\varrho_2+\frac{R^2}{2\pi}K_\omega T^{\lambda/2+1}+L_3\right)+k_\omega' T^{\lambda^*/2+1}(\varrho_2+\varkappa_2)+ \\
& +\frac{R^2}{2\pi}H_\omega T^{\lambda/2+1}+L_3'\Bigg]+c_1'\varrho_2T+\tilde c_1'\varkappa_2T+K_\omega'\frac{R^2}{2\pi}T^{\lambda/2+1}+L_4\Bigg\} \leqslant \varrho_1', \\
& \pi^{-1}\Bigg\{c_5\pi^{-1}\Bigg[c_3K_{\mathfrak{M}}\left(k_\omega T^{\lambda/2+1}\varrho_2+\frac{R^2}{2\pi}K_\omega T^{\lambda/2+1}+L_3\right)+k_\omega' T^{\lambda^*/2+1}(\varrho_2+\varkappa_2)+ \\
& +\frac{R^2}{2\pi}H_\omega T^{\lambda/2+1}+L_3'\Bigg]+c_1\varrho_2T^{1-\lambda}+\tilde c_1\varkappa_2T^{1-\lambda}+\frac{R^2}{2\pi}H_\omega' T^{1+\lambda/2}+L_4'\Bigg\} \leqslant \varkappa_1, \\
& 2\pi^{-1}(1+K_{\mathfrak{M}})\Bigg\{A_0c'\pi^{-1}(1+A_0T)\Bigg[c_5'\pi^{-1}\Bigg(c_3K_{\mathfrak{M}}k_\omega T^{\lambda/2+1}\varrho_2+
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(21)\qquad \left\{
\begin{aligned}
& +c_3K_{\mathfrak{M}}\frac{R^2}{2\pi}K_\omega T^{\lambda/2+1}+c_3K_{\mathfrak{M}}L_3+k_\omega' T^{\lambda/2+1}\varrho_2+\frac{R^2}{2\pi}H_\omega T^{\lambda/2+1}+L_3'\Bigg)+ \\
& +c_1'\varrho_2T+\tilde c_1'\varkappa_2T+K_\omega' T^{\lambda/2+1}\cdot\frac{R^2}{2\pi}+L_4\Bigg]+ \\
& +A_0c_4'\pi^{-1}\Bigg[c_5\pi^{-1}(1+A_0T)\Bigg(c_3K_{\mathfrak{M}}k_\omega T^{\lambda/2+1}\varrho_2+ \\
& +c_3K_{\mathfrak{M}}\frac{R^2}{2\pi}K_\omega T^{\lambda/2+1}+L_3c_3K_{\mathfrak{M}}+k_\omega' T^{\lambda^*/2+1}(\varrho_2+\varkappa_2)+\frac{R^2}{2\pi}H_\omega T^{\lambda/2+1}+L_3'\Bigg) \\
& +c_1\varrho_2T^{1-\lambda}+\tilde c_1\varkappa_2T^{1-\lambda}+\frac{R^2}{2\pi}H_\omega' T^{\lambda/2+1}+L_4'\Bigg]+\frac{A_0R^2}{2\pi}K_\omega^* T^{\lambda/2+1}+ \\
& +\frac{R^2}{2\pi}K_\omega'' T^{1-\lambda'}+\frac{A_0B_0R^2}{2\pi}K_\omega' T^{1-\lambda}+A_0L_5+L_6+A_0B_0L_7\Bigg\} \leqslant \varrho_2, \\
& \pi^{-1}\Bigg\{\pi c_2\varrho_2T^{(1-\theta)\alpha/2}+2\pi^{-1}(cA_0+c'h_a)(1+A_0T)\times \\
& \times\Bigg[c_5'\pi^{-1}\Bigg(c_3K_{\mathfrak{M}}k_\omega T^{\lambda/2+1}\varrho_2+c_3K_{\mathfrak{M}}\frac{R^2}{2\pi}K_\omega T^{\lambda/2+1}+ \\
& +c_3K_{\mathfrak{M}}L_3+k_\omega' T^{\lambda^*/2+1}(\varrho_2+\varkappa_2)+\frac{R^2}{2\pi}H_\omega T^{\lambda/2+1}+L_3'\Bigg)+c_1'\varrho_2T+ \\
& +\tilde c_1'\varkappa_2T+K_\omega' T^{\lambda/2+1}\frac{R^2}{2\pi}+L_4\Bigg]+2(c_4A_0+c_4'h_a)\pi^{-1}(1+A_0T)\times \\
& \times\Bigg[c_5\pi^{-1}\Bigg(c_3K_{\mathfrak{M}}k_\omega T^{\lambda/2+1}\varrho_2+c_3K_{\mathfrak{M}}\cdot\frac{R^2}{2\pi}K_\omega T^{\lambda/2+1}+L_3c_3K_{\mathfrak{M}}+ \\
& +k_\omega' T^{\lambda/2+1}(\varrho_2+\varkappa_2)+\frac{R^2}{2\pi}H_\omega T^{\lambda/2+1}+L_3'\Bigg)+c_1\varrho_2T^{1-\lambda}+\tilde c_1\varkappa_2T^{1-\lambda}+ \\
& +\frac{R^2}{2\pi}H_\omega' T^{1+\lambda/2}+L_4'\Bigg]+\frac{A_0+\sqrt{2}h_a}{\pi\sqrt{2}}R^2K_\omega^* T^{\lambda/2+1}+\frac{R^2}{\pi}H_\omega'' T^{1-\lambda'}+ \\
& +\frac{A_0B_0R^2}{\pi}H_\omega' T^{1-\lambda}+\frac{A_0h_b+B_0h_a}{\pi}R^2K_\omega' T^{1-\lambda}+A_0L_5'+L_6'+ \\
& +A_0B_0L_7'+2h_aL_5+2(A_0h_b+B_0h_a)L_7\Bigg\} \leqslant \varkappa_2.
\end{aligned}
\right.
$$

Remarquons d'abord que les constantes L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, L_1', L_2', L_3', L_4', L_5', L_6' L_7' sont nulles pour $t = 0$. Cela résulte de la forme de la fonction donnée $\psi_0(A, t)$. Pour $T = 0$ les inégalités (21) seront satisfaites si $\tilde c'\varrho_1'+\tilde c''\varkappa_1 < R$ et si les constantes ϱ_1, ϱ_1', ϱ_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ sont positives (ce qui résulte des hypothèses admises). Les constantes positives R, ϱ_1, ϱ_1', ϱ_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ étant arbitraires, nous en concluons que les inégalités (21) seront certainement satisfaites, si l'intervalle de temps $(0, T)$ est suffisamment petit. Alors l'ensemble transformé $\bar{E}$ fera partie de l'ensemble E. Nous allons maintenant démontrer que la transformation (11) est continue dans l'espace Λ.

Supposons que $U_n[u_n, v_n, w_n, z_n, \zeta_n, \mu_n]$ soit une suite d'éléments de l'ensemble E, qui tend vers le point $U[u, v, w, z, \zeta, \mu]$; il en résulte que les suites $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{w_n\}$, $\{z_n\}$, $\{\zeta_n\}$, $\{\mu_n\}$, $\{d\zeta_n/dl\}$ tendent uniformément vers les fonctions $u, v, w, z, \zeta, \mu, d\zeta/dl$. D'après les propriétés connues des intégrales à singularité faible, nous pouvons constater que ces intégrales tendent uniformément vers les intégrales analogues des fonctions limites, par exemple

$$\int_C \frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{AQ}} \zeta_n(Q, t)\, dl_Q\, d\tau \to \int_C \frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{AQ}} \zeta(Q, t)\, dl_Q\, d\tau.$$

Nous allons montrer que les intégrales à singularité forte possèdent la même propriété, c'est-à-dire que

$$\int_C \frac{d}{dn_p}\left[\frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\right]\cdot[\zeta_n(Q, t) - \zeta_n(P, t)]\, dl_Q \to$$

$$\to \int_C \frac{d}{dn_P}\left[\frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\right]\cdot[\zeta(Q, t) - \zeta(P, t)]\, dl_Q, \tag{22}$$

$$\int_C \left[\frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\right]'_A [\zeta_n(Q, t) - \zeta_n(P, t)]\, dl_Q \to \int_C \left[\frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\right]'_A [\zeta(Q, t) - \zeta(P, t)]\, dl_Q.$$

Étudions les intégrales

$$G(P, t) = \int_C \frac{d}{dn_P}\left[\frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\right]\cdot[\zeta(Q, t) - \zeta(P, t)]\, dl_Q,$$

$$G_n(P, t) = \int_C \frac{d}{dn_P}\left[\frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\right][\zeta_n(Q, t) - \zeta_n(P, t)\, dl_Q.$$

Comme la fonction $\zeta(Q, t)$ possède par hypothèse une dérivée par rapport à l'arc, vérifiant la condition de Hölder avec l'exposant β, nous pouvons écrire

$$G_n(P, t) = \frac{d\zeta_n(P, t)}{dl} \int_C \frac{d}{dn_P}\left(\frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\right)(l_Q - l_P)\, dl_Q + \tag{23}$$
$$+ \int_C \frac{d}{dn_P}\left(\frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\right)\left[\frac{d\zeta_n(Q^*, t)}{dl} - \frac{d\zeta_n(P, t)}{dl}\right](l_Q - l_P)\, dl_Q,$$

où Q^* désigne un point sur la courbe C situé entre les points Q et P. Pour la fonction $G(P, t)$ nous aurons une expression analogue à (23). Évidemment la première intégrale dans l'expression (23) tend uniformément vers l'intégrale analogue de la fonction limite. Il reste à démontrer cette propriété pour la seconde intégrale (23), c'est-à-dire

$$\bar{G}_n(P, t) = \int_C \frac{d}{dn_P}\left(\frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\right)\left[\frac{d\zeta_n(Q^*, t)}{dl} - \frac{d\zeta_n(P, t)}{dl}\right](l_Q - l_P)\, dl_Q.$$

Prenons le cercle K de centre au point P et de rayon r_K. Désignons la partie de la courbe C située à l'intérieur du cercle K par l_ε, et décomposons les fonctions $\bar{G}_n(P, t)$ et $\bar{G}(P, t)$ en deux intégrales

$$\bar{G}_n(P, t) = \bar{G}_n^{l_\varepsilon}(P, t) + \bar{G}_n^{C-l_\varepsilon}(P, t), \qquad \bar{G}(P, t) = \bar{G}^{l_\varepsilon}(P, t) + \bar{G}^{C-l_\varepsilon}(P, t),$$

prises suivant les arcs l_ε et $C - l_\varepsilon$. Nous pouvons choisir le rayon r_K (et de même l'arc l_ε) suffisamment petit pour qu'on ait

$$|\bar{G}_n^{l_\varepsilon}| < \varepsilon/3, \qquad |\bar{G}^{l_\varepsilon}| < \varepsilon/3.$$

Étudions maintenant la différence

$$\bar{G}_n^{C-l_\varepsilon}(P, t) - \bar{G}^{C-l_\varepsilon}(P, t)$$
$$= \int_{C-l_\varepsilon} \frac{d}{dn_P}\left(\frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\right)\left[\frac{d\zeta_n(Q^*, t)}{dl} - \frac{d\zeta_n(P, t)}{dl}\right](l_Q - l_P)\, dl_Q -$$
$$- \int_{C-l_\varepsilon} \frac{d}{dn_P}\left(\frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\right)\left[\frac{d\zeta(Q^*, t)}{dl} - \frac{d\zeta(P, t)}{dl}\right](l_Q - l_P)\, dl_Q$$
$$= \int_{C-l_\varepsilon} \frac{d}{dn_P}\left(\frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\right)[\zeta_n(Q, t) - \zeta(Q, t)]\, dl_Q +$$
$$+ \int_{C-l_\varepsilon} \frac{d}{dn_P}\left(\frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\right)\left[\frac{d\zeta_n(P, t)}{dl} - \frac{d\zeta(P, t)}{dl}\right](l_Q - l_P)\, dl_Q.$$

La première intégrale dans l'expression précédente tend évidemment vers zéro si $\zeta_n \to \zeta$. La seconde intégrale est donc régulière, lorsque le point P est extérieur à l'arc $C - l_\varepsilon$. Il en résulte de même que la seconde intégrale tend vers zéro. Donc on aura

$$|\bar{G}_n(P, t) - \bar{G}(P, t)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |\zeta_n - \zeta| < \eta_\varepsilon$$

c. q. f. d.

D'une manière analogue nous pouvons démontrer la seconde propriété (22). Il en résulte, d'après les propriétés connues des solutions des équations de Fredholm et Volterra, que la suite des points $\overline{U}_n[\overline{u}_n, \overline{v}_n, \overline{w}_n, \overline{z}_n, \overline{\zeta}_n, \overline{\mu}_n]$ transformés par le système (11) tend uniformément vers le point $\overline{U}[\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{z}, \overline{\zeta}, \overline{\mu}]$ correspondant au point $U[u, v, w, z, \zeta, \mu]$. La transformation est donc continue. Il reste à montrer que l'ensemble transformé $\overline{E}$ des points $\overline{U}[\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{z}, \overline{\zeta}, \overline{\mu}]$ est compact. D'après les propriétés du potentiel de simple couche et du potentiel logarithmique de double couche, nous pouvons constater que les fonctions $\overline{u}(A, t)$, $\overline{v}(A, t)$, $\overline{w}(A, t)$, $\overline{z}(A, t)$, $\overline{\zeta}(P, t)$, $\overline{\mu}(P, t)$ satisfont à la condition de Hölder par rapport au point A et par rapport à la variable t, puisque toutes les intégrales dans les expressions pour $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{z}, \overline{\zeta}, \overline{\mu}$ possèdent cette propriété. Les coefficients de Hölder sont les mêmes pour toute la famille de fonctions $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{z}, \overline{\zeta}, \overline{\mu}$, donc les fonctions $\overline{u}(A, t)$, $\overline{v}(A, t)$, $\overline{w}(A, t)$, $\overline{z}(A, t)$, $\overline{\zeta}(P, t)$, $\overline{\mu}(P, t)$ relatives à l'ensemble $\overline{E}$ forment des familles de fonctions également continues. Or l'ensemble E est borné, il en résulte donc, d'après le théorème connu d'Arzelà, que l'ensemble transformé $\overline{E}$ est compact.

Toutes les conditions du théorème de J. Schauder étant satisfaites, nous voyons que dans l'ensemble $\overline{E}$ il existe au moins un point $U^*[u^*, v^*, w^*, z^*, \zeta^*, \mu^*]$ invariant relativement à la transformation (11) c'est-à-dire vérifiant le système d'équations intégrales (7). Considérons maintenant la fonction $\psi^*(A, t)$ définie dans la région $A \epsilon D+C$, $0 \leqslant t \leqslant T$ par la formule

$$\psi^*(A, t) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^t \iint_D \omega(A, t; B, \tau)[v^*(B, \tau)z^*(B, \tau) -$$

$$- u^*(B, \tau)w^*(B, \tau)]d\sigma_B d\tau + \int_0^t \int_C \omega(A, t; Q, \tau)\mu^*(Q, \tau)dl_Q d\tau +$$

$$+ \int_C \frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{AQ}}\zeta^*(Q, \tau)dl_Q + \psi_0(A, t).$$

On voit, d'après les équations (7), que les fonctions $u^*(A, t)$, $v^*(A, t)$, $w^*(A, t)$, $z^*(A, t)$ vérifient les égalités

$$u^*(A, t) = \frac{\partial}{\partial x}\psi^*(A, t), \qquad v^*(A, t) = \frac{\partial}{\partial y}\psi^*(A, t),$$

$$w^*(A, t) = \frac{\partial}{\partial x}[\Delta\psi^*(A, t)], \qquad z^*(A, t) = \frac{\partial}{\partial y}[\Delta\psi^*(A, t)].$$

Les fonctions obtenues $\zeta^*(P, t)$ et $\mu^*(P, t)$ vérifient donc le système d'équations:

$$(24) \quad \pi\zeta^*(P, t) + \int_C \frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\zeta^*(Q, t)dl_Q = \int_0^t \int_C \omega(P, t; Q, \tau)\mu^*(Q, \tau)dl_Q d\tau +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^t \iint_D \omega(P, t; B, \tau)\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial y_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi^*}{\partial x_B} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi^*}{\partial y_B}\right]d\sigma_B d\tau - \psi_0(P, t),$$

$$\mu^*(P, t) - \int_0^t \int_C N(P, t; Q, \tau)\mu^*(Q, \tau)dl_Q d\tau$$

$$= \frac{2a}{\pi}\int_C \frac{d}{dn_P}\left(\frac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}}\right)\Big\{[\zeta^*(Q, t) - \zeta^*(P, t)] -$$

$$- a\int_0^t \exp\left[-\int_s^t a(P, \tau)\right][\zeta^*(Q, t) - \zeta^*(P, s)]ds\Big\}dl_Q +$$

$$+ \frac{a}{2\pi^2}\int_0^t \iint_D \frac{d\omega}{dn}\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial y_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi^*}{\partial x_B} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi^*}{\partial y_B}\right]d\sigma_B d\tau -$$

$$- \frac{1}{2\pi^2}\int_0^t \iint_D \frac{d\Delta\omega}{dn}\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial y_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi^*}{\partial x_B} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi^*}{\partial y_B}\right]d\sigma_B d\tau -$$

$$- \frac{ab}{2\pi^2}\int_0^t \iint_D \Delta\omega\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial y_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi^*}{\partial x_B} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x_B}\cdot\frac{\partial\Delta\psi^*}{\partial y_B}\right]d\sigma_B d\tau +$$

$$+ \frac{2a}{\pi}\cdot\frac{d\psi_0}{dn} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{d\Delta\psi_0}{dn} + \frac{2ab}{\pi}\Delta\psi_0$$

et de même le système d'équations (6), puisque la seconde équation du système (6), équivalente à l'équation (6'), peut être écrite, d'après la transformation de Dirichlet, sous forme de la seconde équation du système (24) dont le noyau $N(P, t; Q, \tau)$ est de la forme (7'). Il en résulte que les fonctions $\psi^*(A, t)$, $\zeta^*(P, t)$, $\mu^*(P, t)$ constituent une solution du système d'équations (4) et (6).

Nous allons montrer que la fonction obtenue $\psi^*(A, t)$ est la solution de l'équation (1) et qu'elle vérifie les conditions limites (2) et (3).

En effet, d'après l'équation (4), la fonction $\psi^*(A, t)$ vérifie la condition initiale (3). Remarquons maintenant que toutes les intégrales des seconds membres des 4 premières équations du système (7) satisfont à la condition de Hölder (cela résulte des considérations du travail [1]). Nous en tirons la conclusion que la fonction $[v^*z^* - u^*w^*]$ vérifie la condition de Hölder dans tout domaine fermé $D^* \subset D$, et par conséquent la fonction $\psi^*(A, t)$ admet des dérivées secondes en tout point intérieur $A \epsilon D$, donc elle vérifie l'équation donnée (1).

Nous pouvons ainsi énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si les fonctions qui figurent dans l'équation* (1) *et la condition* (3) *vérifient les hypothèses* II *et* III, *si la courbe C limitant le domaine D vérifie la condition* I *et si l'intervalle de temps est suffisamment petit pour que les inégalités* (23) *soient satisfaites, il existe une fonction $\psi(A, t)$ qui satisfait à l'équation* (1) *en tout point intérieur $A \epsilon D$ pour $0 \leqslant t \leqslant T$, qui vérifie la condition limite* (2) *en tout point $P \epsilon C$, pour $0 < t \leqslant T$, et qui vérifie la condition initiale* (3) *en tout point $A \epsilon D + C$ et pour $t = 0$.*

Travaux cités

[1] J. Wolska-Bochenek, *Propriétés des intégrales d'une équation de l'hydrodynamique d'un fluie visqueux*, ce volume, p. 141-171.

[2] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math. 2 (1930), p. 171-180.

Reçu par la Rédaction le 5. 10. 1957

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1960)

La dérivée de Lie du comitant géométrique

par C. JANKIEWICZ (Wrocław)

1. En 1931 W. Ślebodziński [4] a introduit la notion qui s'appelle maintenant *dérivée de Lie*. Cette dérivée est largement appliquée par les mathématiciens et de plus en plus utilisée par les physiciens. Pour ces derniers cependant, la dérivée de Lie du comitant géométrique présente beaucoup plus d'intéret. Le but de cette note est l'étude de certaines propriétés de la dérivée de Lie d'un comitant géométrique.

2. Soit un espace analytique X_n à n dimensions des variables x^a, qui seront appelées les *coordonnées* d'un point de X_n (ici, et ailleurs, les indices grecs prennent les valeurs $1, 2, \ldots, n$). Si à chaque point de X_n correspond d'une façon univoque une suite de nombres Ω^Λ (l'indice Λ prend les valeurs $1, 2, \ldots, N$), nous dirons que dans X_n on a défini un *champ* de l'objet Ω^Λ. Les nombres Ω^Λ sont appelés les *composantes* de cet objet par rapport aux coordonnées x^a. L'objet Ω^Λ sera dit *objet géométrique de classe p*, si les conditions suivantes sont satisfaites:

(i) Après un changement de coordonnées

$$x^{a'} = x^{a'}(x^a) \quad (a' = 1, 2, \ldots, n'), \tag{1}$$

où les fonctions $x^{a'}(x^a)$ sont de classe $r \geqslant p$, les nouvelles composantes $\Omega^{\Lambda'}(\Lambda' = 1', 2', \ldots, N')$ de l'objet Ω^Λ sont des fonctions de Ω^Λ, de $x^{a'}$, de x^a et des dérivées de $x^{a'}$ par rapport à x^a jusqu'à l'ordre p. Nous écrivons cette circonstance sous la forme

$$\Omega^{\Lambda'} = F^{\Lambda'}(\Omega^\Lambda, x^a, x^{a'}, \partial_{\varrho_1} x^{a'}, \partial_{\varrho_1}\partial_{\varrho_2} x^{a'}, \ldots, \partial_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_p} x^{a'}), \tag{2}$$

où

$$\partial_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_i} = \frac{\partial}{\partial x_{\varrho_1}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{\varrho_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{\varrho_i}} \tag{3}$$

ou, tout court, comme il suit:

$$\Omega^{\Lambda'} = F^{\Lambda'}(\Omega^\Lambda, x^a, x^{a'}) \tag{4}$$

(ici, et ailleurs, les indices grecs avec accent prennent les valeurs $1', 2', \ldots, n'$, l'indice Λ' prend les valeurs $1', 2', \ldots, N'$).