ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1959)

Un théorème limite sur la dérivée de l'intégrale de Poisson-Weierstrass généralisée

par H. Milicer-Grużewska (Warszawa)

Introduction. Soit l'équation aux dérivées partielles du type parabolique:

$$(1)\qquad \psi(u)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}a_{\alpha\beta}(x_1,\dots,x_n,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}+$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{n}b_\alpha(x_1,\dots,x_n,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+c(x_1,\dots,x_n,t)u-\frac{\partial u}{\partial t}=0,$$

où les coefficients $a_{\alpha\beta}$, b_α, c sont des fonctions continues des variables $(x_1,\dots,x_n,t)$ déterminées dans le domaine Ω borné pour $(x_1,\dots,x_n)\in E_n$, $0\leqslant t\leqslant T$. Supposons que la forme quadratique

$$(2)\qquad \sum_{\alpha,\beta=1}^{n}a_{\alpha\beta}X_\alpha X_\beta$$

soit définie positive pour $(x_1,\dots,x_n)\in\Omega$, et $0\leqslant t\leqslant T$. On suppose que les coefficients de l'équation (1) vérifient dans ce domaine les conditions de Hölder par rapport aux variables spatiales $A(x_1,\dots,x_n)$ et à la variable t de la forme

$$(3)\qquad \begin{aligned}|a_{\alpha\beta}(A,t)-a_{\alpha\beta}(A_1,t_1)|&\leqslant k[r_{AA_1}^h+(t-t_1)h'],\\ |b_\alpha(A,t)-b_\alpha(A_1,t)|&\leqslant k'r_{AA_1}^h,\\ |c(A,t)-c(A_1,t)|&\leqslant k''r_{AA_1}^h,\end{aligned}$$
$$\alpha,\beta=1,\dots,n,\qquad 0<h,h'\leqslant 1,$$

où r_{AA_1} désigne la distance des points A et A_1; k, k', k'' sont constants.

En admettant les hypothèses (2) et (3) W. Pogorzelski a prouvé dans son travail [1] que la solution fondamentale de l'équation (1) est une fonction donnée par la formule

$$(4)\quad \Gamma(A,t;B,\tau)=w^{B,\tau}(A,t;B,\tau)+\int_{\tau}^{t}\iiint_{\Omega'(M)} w^{M,\Theta'}(A,t;M,\Theta)\times$$

$$\times\Phi(M,\Theta;B,\tau)dMd\Theta,\text{[1]}\quad A\neq B,\quad A,B\in\Omega',\quad 0\leqslant\tau<t\leqslant T,$$

où

$$(5)\qquad w^{M,\Theta}(A,t;B,\tau)=(t-\tau)^{-n/2}\exp\left[-\frac{\vartheta^{M,\Theta}(A,B)}{4(t-\tau)}\right],$$

$$(6)\qquad \vartheta^{M,\tau}(A,B)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}a^{\alpha\beta}(M,\tau)(x_\alpha-\zeta_\alpha)(x_\beta-\zeta_\beta),$$

$a^{\alpha\beta}(M,\tau)$ sont les éléments de la matrice inverse de la matrice $[a_{\alpha\beta}(M,\tau)]$, $A(x_1,\ldots,x_n)$ et $B(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ sont deux points arbitraires du domaine Ω; Ω' est un domaine arbitraire borné, qui contient Ω avec son bord S. On a prolongé tous les coefficients en dehors du domaine Ω au domaine Ω' de façon que les hypothèses (2) et (3) soient vérifiées. La condition (2) implique l'existence de deux nombres positifs g et G tels que

$$(5')\qquad 4gr_{AB}^2<\vartheta^{M,\tau}(A,B)<4Gr_{AB}^2.$$

La fonction $\Phi(A,t;B,\tau)$ est la solution d'une équation intégrale de Volterra faiblement singulière:

$$(7)\quad \Phi(A,t;B,\tau)$$
$$=f(A,t;B,\tau)+\lambda\int_{\tau}^{t}\iiint_{\Omega'(M)}N(A,t;M,\Theta)\Phi(M,\Theta;B,\tau)dMd\Theta,$$

où

$$(8)\quad N(A,t;M,\Theta)=\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(A,t)|}\,\psi_{A,t}[w^{M,\Theta}(A,t;M,\Theta)],$$

$$(8')\quad f(A,t;B,\tau)=\lambda N(A,t;B,\tau),\qquad \lambda=(2\sqrt{\pi})^{-n},$$

$$(8'')\quad \Phi(A,t;B,\tau)$$
$$=f(A,t;B,\tau)+\lambda\int_{\tau}^{t}\iiint_{\Omega'(M)}\mathfrak{N}(A,t;M,\Theta)f(M,\Theta;B,\tau)dMd\Theta,$$

où

$$(8''')\qquad \mathfrak{N}(A,t;M,\Theta)=N(A,t;M,\Theta)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda^{\nu}N_{\nu}(A,t;M,\Theta)$$

[1] dM désigne ici l'élément de volume au point M.

est le noyau résolvant de l'équation (8). Les éléments de la série (8''') sont des noyaux itérés du noyau $N(A,t;M,\Theta)$.

L'intégrale de volume

$$(9)\qquad J(A,t,\tau)=\iiint_{\Omega}\Gamma(A,t;B,\tau)\varrho(B,\tau)dB,\text{[2]}$$

sera dite *intégrale de Poisson-Weierstrass généralisée*, $\varrho(B,\tau)$ est une fonction bornée et continue pour $B\in\Omega$, $0<\tau\leqslant T$. W. Pogorzelski a prouvé dans son article [2] que

$$(10)\quad \lim_{\tau\to t}J(A,t,\tau)=(2\sqrt{\pi})^n\varrho(A,t)\big(\det|a^{\alpha\beta}(A,t)|\big)^{-1/2},\qquad A\in\Omega,$$

si l'on admet (2), (3) et (9).

Dans ce travail, je démontre le théorème limite suivant rélatif à la dérivée de l'intégrale (9):

$$(11)\quad \lim_{\tau\to t}J'_{x_\alpha}(A,t,\tau)=\big[(2\sqrt{\pi})^n\varrho(A,t)\big(\det|a^{\alpha\beta}(A,t)|\big)^{-1/2}\big]'_{x_\alpha},\qquad A\in\Omega.$$

Il m'a été suggéré par W. Pogorzelski. Dans la démonstration de la propriété (11) j'ai supposé que les fonctions $a_{\alpha\beta}(A,t)$, $\varrho(A,t)$ admettent des dérivées premières spatiales continues.

L'énoncé de ce théorème a été publié dans le Bull. Acad. Polon. Sci., Série des Sci. Math., Astr. et Phys. 6 (1958), p. 131-133.

1.A. En s'appuyant sur les formules [3] de l'article [1] on peut écrire que les fonctions de (7)-(8) de l'introduction sont

$$O[(t-\tau)^{-\mu}r_{AB}^{\varepsilon-n}],\text{[4]}$$

où $\varepsilon=2\mu+h_1-2$, $h_1=\min(h,2h')$ et μ est un nombre arbitraire dans l'intervalle $(1-\frac{1}{2}h_1,1)$ c'est-à-dire $1-\frac{1}{2}h_1<\mu<1$. De même, la différence des dérivées secondes spatiales des quasi-solutions (5) à coefficients $a^{\alpha\beta}(B,\Theta)$ resp. $a^{\alpha\beta}(A,\Theta)$ est

$$w^{B,\Theta}_{x_\alpha x_\beta}(A,t;B,\tau)-[w^{M,\Theta}_{x_\alpha x_\beta}(A,t;B,\tau)]_{M=A}=O[(t-\tau)^{-\mu_1}r_{AB}^{\varepsilon_1-n}],$$
$$\varepsilon_1=2\mu_1-1\quad\text{et}\quad \mu_1>\tfrac{1}{2},\qquad \alpha,\beta=1,2,\ldots,n.$$

On démontre pareillement que la différence des quasi-solutions à coefficients $a^{\alpha\beta}(B,\Theta)$ resp. $a^{\alpha\beta}(A,\Theta)$ est

$$w^{B,\Theta}(A,t;B,\tau)-w^{A,\Theta}(A,t;B,\tau)=O\big[(t-\tau)^{1/4}r_{AB}^{-n+1/2}\exp\big(-gr_{AB}^2/(t-\tau)\big)\big],$$

[2] dB désigne ici l'élément de volume au point B.

[3] formules (20), (21) et (23), p. 7; (30), p. 9; (38), p. 12; (40), p. 13; (63) et (64) p. 19-20.

[4] $Y=O(X)$ ou $Y=o(X)$ suivant que $|Y|:|X|\leqslant$ const, ou $|Y|:|X|$ est aussi petit que l'on veut.

tandis que celle de leurs dérivées premières spatiales est de l'ordre:

$$w^{B,\Theta}_{x_\alpha}(A,t;\ B,\tau)-[w^{M,\Theta}_{x_\alpha}(A,t;B,\tau)]_{M=A}$$
$$=O[(t-\tau)^{-\mu}r_{AB}^{-n+2\mu}\exp(-gr_{AB}^2/(t-\tau))], \qquad \alpha=1,2,\dots,n.$$

1.B. Soit $K(A,r)$ une sphère de centre A et de rayon r, assez petit pour qu'on ait

(1.1) $$K(A,3r)\in\Omega$$

et que

(2.1) dans la sphère fermée $K(A,3r)$ et pour $t-\Delta t<\tau<t$, $\Delta t>0$ les fonctions $\varrho'_{x_\gamma}(A,t)$ et $\partial a_{\alpha\beta}(A,t)/\partial x_\gamma$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,\dots,n)$ soient continues et bornées.

Nous supposerons toujours que

(3.1) $$t-\Delta t<\tau<t,\qquad \Delta t>0.$$

Je désigne par Ω_1 le complément de la sphère $K(A,r)$ dans le domaine Ω, c'est-à-dire $\Omega_1=\Omega-K(A,r)$.

Rappelons que l'intégrale de la fonction $w^{B\tau}(A,t;B,\tau)$ ainsi que les intégrales des modules de ses dérivées, étendues au domaine Ω_1, convergent vers zéro, si $\tau\to t$, plus rapidement que n'importe quelle puissance de la différence $t-\tau$. C'est une conséquence de la définition de la fonction $w^{B,\tau}(A,t;B,\tau)$ et de l'hypothèse (2) de l'introduction. Chacune de ces intégrales sera appelée $E(t-\tau)$ et son estimation sera dite estimation E. On la négligera toutes les fois que l'estimation sera de l'ordre d'une puissance positive de la différence $t-\tau$.

Il en est de même de l'intégrale

(4.1) $$\iiint_{\Omega'}|\Phi(A,t;B,\tau)|\,dB,$$

à cause des formules (5') et (7)-(8''') de l'introduction. Il suffira de représenter l'intégrale intérieure de l'intégrale de volume comme une somme de deux intégrales, dont l'une sera étendue au domaine où $AM>\frac{1}{2}AB>\frac{1}{2}r$ et l'autre, au domaine où $AM\leqslant\frac{1}{2}AB$, donc $MB\geqslant\frac{1}{2}AB>\frac{1}{2}r$.

2. Nous démontrerons d'abord l'existence de la limite

(1.2) $$\lim_{\tau\to t}\iiint_{\Omega}\Gamma'_{x_\alpha}(A,t;B,\tau)[\varrho(B,\tau)-\varrho(A,\tau)]\,dB.$$

Dans ce but, nous étudierons séparément les intégrales

(2.2) $$P_\alpha=\iiint_{\Omega}w^{B,\tau}_{x_\alpha}(A,t;B,\tau)[\varrho(B,\tau)-\varrho(A,\tau)]\,dB,$$

(3.2) $$Q_\alpha=\iiint_{\Omega}[\varrho(B,\tau)-\varrho(A,\tau)]\times$$
$$\times\int_\tau^t\iiint_{\Omega'}w^{M,\Theta}_{x_\alpha}(A,t;M,\Theta)\,\Phi(M,\Theta;B,\tau)\,dB\,d\Theta\,dM.$$

D'après les résultats du § 1.A,B et en vertu de la propriété

$$\varrho(B,\tau)-\varrho(A,\tau)=O(r_{AB})$$

on obtient l'égalité suivante:

(4.2) $$P_\alpha=E(t-\tau)+O[(t-\tau)^{1/2-\mu}]+$$
$$+\iiint_{K(A,r)}w^{B,\tau}(A,t;B,\tau)\,\varrho'_{\xi_\alpha}(B,\tau)\,dB,\qquad \tfrac14<\mu<\tfrac12.$$

Donc

(5.2) $$\lim_{\tau\to t}P_\alpha=(2\sqrt{\pi})^n\,\varrho'_{x_\alpha}(A,t)/\sqrt{|a^{\alpha\beta}(A,t)|},\qquad A\subset\Omega^*\subset\Omega\ (^5).$$

Pour évaluer l'intégrale Q_α nous écrirons

$$\varrho(B,\tau)-\varrho(A,\tau)=[\varrho(B,\tau)-\varrho(M,\tau)]+[\varrho(M,\tau)-\varrho(A,\tau)]$$

et appliquerons les résultats des §§ 1.B. et 1.A:

(6.2) $$Q_\alpha=O\Big\{\int_\tau^t\iiint_{K(A,r)}(t-\Theta)^{-\mu_1}r_{AM}^{-(n+1-2\mu_1)}\times$$
$$\times\Big[\iiint_{K(A,2r)}(\Theta-\tau)^{-\mu}r_{MB}r_{MB}^{\varepsilon-n}\,dB+E(\Theta-\tau)\Big]\,dM\,d\Theta+$$
$$+\int_\tau^t\iiint_{K(A,r)}(t-\Theta)^{-\mu'}r_{AM}^{-(n+1-2\mu')}r_{AM}\times$$
$$\times\iiint_{\Omega}(\Theta-\tau)^{-\mu_1'}r_{MB}^{\varepsilon'-n}\,dB\,dM\,d\Theta+E(t-\tau)\Big\}$$

où $\varepsilon=2\mu+h_1-2$, $\varepsilon'=2\mu_1'+h_1-2$.

Nous supposons ici que dans la première intégrale on a $2\mu_1+h_1>1$, $\mu_1>\frac12$ et dans la seconde $2\mu_1'+h_1>2$ et $\mu'>0$, ce qui n'est nullement en contradiction avec le fait qu'on doit avoir en même temps $\mu+\mu_1<1$, $\mu'+\mu_1'<1$. L'égalité (6.2) prouve que $\lim Q_\alpha=0$, si $\tau\to t$, ce qui démontre, d'après l'égalité (5.2), la conclusion (1.2).

La question de l'existence de la limite $J'_{x_\alpha}(A,t,\tau)$, si $\tau\to t$, est ainsi ramenée à celle de l'existence d'une limite de l'expression suivante:

(7.2) $$\varrho(A,\tau)\iiint_{\Omega}\Gamma'_{x_\alpha}(A,t;B,\tau)\,dB.$$

---

(5) Cf. [1], p. 3, formules (8) et (9).

3.A. Étude de la fonction

$$P(A,t,\tau)=\iiint_{\Omega}\Gamma'_{x_\alpha}(A,t;B,\tau)\,dB. \tag{1.3}$$

On représentera l'intégrale $P(A,t,\tau)$, conformément à la formule (4), comme une somme de deux intégrales:

$$P(A,t,\tau)=P_1(A,t,\tau)+P_2(A,t,\tau), \tag{2.3}$$

où nous pouvons écrire, en profitant de l'estimation E du § 1.B,

$$P_1(A,t,\tau)=\iiint_{K(A,r)} w_{x_\alpha}^{B,\tau}(A,t;B,\tau)\,dB+E(t-\tau), \tag{3.3}$$

(dorénavant les coordonnées du point M seront désignées par $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$) et

$$\begin{aligned}P_2(A,t,\tau)\\ =\iiint_{K(A,r)}\int_{\tau}^{t}\iiint_{K(A,2r)} w_{x_\alpha}^{M,\Theta}(A,t;M,\Theta)\,\Phi(M,\Theta;B,\tau)\,dB\,dM\,d\Theta+E(t-\tau).\end{aligned} \tag{4.3}$$

3.B. Évaluation de l'intégrale $P_2(A,t,\tau)$. On voit, d'après l'expression (8') de l'introduction, que l'intégrale de la formule (4.3) est la somme de deux termes: $S_1(A,t,\tau)$ — qui est une intégrale triple, et $S_2(A,t,\tau)$ — qui est une intégrale du cinquième ordre. Ainsi on a

$$P_2(A,t,\tau)=S_1(A,t,\tau)+S_2(A,t,\tau)+E(t-\tau). \tag{5.3}$$

Posons, pour simplifier

$$\lambda\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(A,t)|}=a(A,t), \tag{6.3}$$

on a alors

$$\begin{aligned}S_1(A,t,\tau)=&\sum_{\alpha',\beta'=1}^{n}\int_{\tau}^{t}\iiint_{K(A,r)} w_{x_\alpha}^{M,\Theta}(A,t;M,\Theta)\,a(M,\Theta)\times\\ &\times\iiint_{K(A,2r)}[a_{\alpha'\beta'}(M,\tau)-a_{\alpha'\beta'}(B,\tau)]\,w_{\eta_\alpha\eta_{\beta'}}^{B,\tau}(M,\Theta;B,\tau)\,dB\,dM\,d\Theta+\\ &+\sum_{\alpha',\beta'=1}^{n}\int_{\tau}^{t}\iiint_{K(A,r)} w_{x_\alpha}^{M,\Theta}(A,t;M,\Theta)\,a(M,\Theta)\times\\ &\times\iiint_{K(A,2r)}[a_{\alpha'\beta'}(M,\Theta)-a_{\alpha'\beta'}(M,\tau)]\,w_{\eta_\alpha\eta_{\beta'}}^{B,\tau}(M,\Theta;B,\tau)\,dB\,dM\,d\Theta+\end{aligned} \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned}&+\sum_{\alpha'=1}^{n}\int_{\tau}^{t}\iiint_{K(A,r)} b_{\alpha'}(M,\Theta)\,a(M,\Theta)\,w_{x_\alpha}^{M,\Theta}(A,t;M,\Theta)\times\\ &\times\iiint_{K(A,2r)} w_{\eta_\alpha}^{B,\Theta}(M,\Theta;B,\tau)\,dB\,dM\,d\Theta+\\ &+\int_{\tau}^{t}\iiint_{K(A,r)} c(M,\Theta)\,a(M,\Theta)\,w_{x_\alpha}^{M,\Theta}(A,t;M,\Theta)\times\\ &\times\iiint_{K(A,2r)} w^{B,\Theta}(M,\Theta;B,\tau)\,dB\,dM\,d\Theta.\end{aligned}$$

Désignons les termes de la somme $S_1(A,t,\tau)$ par i_1, i_2, i_3 et i_4 respectivement. Pour les évaluer on appliquera les évaluations des §§ 1.A et 1.B. De cette manière on aura

$$i_4=O\Big[\int_{\tau}^{t}(t-\Theta)^{-\mu_1}(\Theta-\tau)^{-\mu}d\Theta\Big]=O[(t-\tau)^{1-\mu-\mu_1}]\to 0,\quad \tau\to t, \tag{8.3}$$

$$\text{pour}\quad \tfrac12<\mu_1<1,\quad 0<\mu,\ \mu+\mu_1<1,$$

$$i_3=E(t-\tau)+O\Big[\int_{\tau}^{t}(t-\Theta)^{-\mu_1}(\Theta-\tau)^{-\mu}d\Theta\Big]=O[(t-\tau)^{1-\mu-\mu_1}]\to 0, \tag{8'.3}$$

$$\tau\to t,\quad \text{pour}\quad \tfrac12<\mu_1<1,\quad 0<\mu,\ \mu+\mu_1<1,$$

$$\begin{aligned}i_2&=E(t-\tau)+O\Big[\int_{\tau}^{t}(t-\Theta)^{-\mu''}(\Theta-\tau)^{h'-\mu'_1}d\Theta\Big]\\ &=O[(t-\Theta)^{1+h'-\mu'_1-\mu''_1}]\to 0,\quad \tau\to t,\end{aligned} \tag{8''.3}$$

$$\text{pour}\quad \mu'_1,\mu''_1>\tfrac12,\quad \mu'_1+\mu''_1<1+h',$$

$$\begin{aligned}i_1&=E(t-\tau)+\mathcal{E}_1 O\Big[\int_{\tau}^{t}(t-\Theta)^{-1/2}(\Theta-\tau)^{-1/2}d\Theta\Big]+\\ &+O\Big[\int_{\tau}^{t}(t-\Theta)^{-\mu_1}(\Theta-\tau)^{-\mu}d\Theta=\mathcal{E}_1 O(1)+O[(t-\tau)^{1-\mu-\mu_1}]\ (^6),\end{aligned} \tag{8'''.3}$$

où $0<\mu$, $\frac12<\mu_1$, $\mu+\mu_1<1$ et

$$\mathcal{E}_{\alpha'\beta'}=\max\left|\left(\frac{\partial a_{\alpha'\beta'}(B,\tau)}{\partial\xi_{\beta'}}\right)_{(M',\tau)}-\left(\frac{\partial a_{\alpha'\beta'}(B,\tau)}{\partial\xi_{\beta'}}\right)_{(M,\tau)}\right|\leqslant\mathcal{E}_1, \tag{8$^{\mathrm{IV}}$.3}$$

$$\alpha',\beta'=1,2,\ldots,n,\quad \mathcal{E}_1>0,\quad t-\Delta t<\tau<t,\quad M',M\in K(A,3r).$$

---

(6) La preuve est assez compliquée: on applique plusieurs fois les évaluations des §§ 1.A et 1.B, et on intègre par changement de variables, à savoir $r_{AM}/\sqrt{t-\Theta}=u$ et $r_{BM}/\sqrt{\Theta-\tau}=v$.

Ces expressions donnent

$$(9.3)\qquad S_1(A,t,\tau) = i_1+i_2+i_3+i_4 = O(\mathcal{E}_1)+O[(t-\tau)^{1-\mu-\mu_1}]+ \\ +O[(t-\tau)^{1+h'-\mu_1'-\mu_1''}],$$

où $\mu+\mu_1<1$, $\mu_1'+\mu_1''<1+h'$.

Il résulte maintenant des égalités (8.3)-(8^{IV}.3) que

$$(10.3)\qquad \iiint\limits_{K(A,2r)} f(M',\Theta';B,\tau)dB = O[3(\Theta'-\tau)^{-\mu}+(\Theta'-\tau)^{h'-\mu_1'}+ \\ +o(1)(\Theta'-\tau)^{-1/2}] = O[(\Theta'-\tau)^{h'-\mu_1'}]+o(1)(\Theta'-\tau)^{-1/2},\quad \mu>0,\quad \mu_1'>\tfrac{1}{2}.$$

On trouve, d'après le § 1.A et les égalités (5.3), (10,3), que

$$S_2(A,t,\tau) = O\Big\{\int\limits_\tau^t (t-\Theta)^{-\mu_1}\iiint\limits_{K(A,r)} r^{\varepsilon_1-n}dM\int\limits_\tau^\Theta(\Theta-\Theta')^{-\mu_2}\times \\ \times[(\Theta'-\tau)^{h'-\mu_1'}+o(1)(\Theta'-\tau)^{-1/2}]\iiint\limits_{K(A,2r)} r^{\varepsilon_2-n}dM'd\Theta'd\Theta\Big\},$$

où $\varepsilon_1=2\mu_1-1$, $\varepsilon_2=2\mu_2+h_1-2$, $\mu_1>\frac{1}{2}$, $\mu_2>1-\frac{1}{2}h_1$, $h_1=\min(1,2h')$, $\mu_1'>\frac{1}{2}$, c'est-à-dire on a, pour $\mu_1'=\mu_1$

$$S_2(A,t,\tau) = O[(t-\tau)^{2+h'-\mu_2-2\mu_1}]+o(1)(t-\tau)^{3/2-\mu_1-\mu_2},$$

donc

$$(11.3)\qquad S_2(A,t,\tau) = O[(t-\tau)^{h_3}]\to 0,\quad \tau\to t,$$

où $h_3=\min(\frac{1}{2}h',\frac{1}{8})$.

Il résulte des formules (11.3), (9.3) et (5.3) que l'on a la propriété limite:

$$(12.3)\qquad \lim_{\tau\to t}P_2(A,t,\tau) = 0.$$

3.C. L'égalité (12.3) prouve, en raison de l'égalité (3.3), que la limite de l'expression (2.3), $P(A,t,\tau)$ dépend uniquement de l'intégrale

$$(13.3)\qquad \iiint\limits_{K(A,r)} w^{B,\tau}_{x_\alpha}(A,t;B,\tau)dB.$$

Mais on vérifie facilement que

$$(13'.3)\qquad w^{B,\tau}_{x_\alpha}(A,t;B,\tau) = -w^{B,\tau}_{\xi_\alpha}(A,t;B,\tau)-\tfrac{1}{4}(t-\tau)^{-n/2-1}\times \\ \times\exp\Big[-\frac{\vartheta^{B,\tau}(A,B)}{4(t-\tau)}\Big]\sum_{\alpha',\beta'=1}^{n} a^{\alpha'\beta'}_{\xi_\alpha}(B,\tau)(x_{\alpha'}-\xi_{\alpha'})(x_{\beta'}-\xi_{\beta'}),$$

d'où on obtient

$$(13''.3)\qquad \iiint\limits_{K(A,r)} w^{B,\tau}_{x_\alpha}(A,t;B,\tau)dB = E(t-\tau)-\tfrac{1}{4}\sum_{\alpha',\beta'=1}^{n} j_{\alpha'\beta'},$$

où $j_{\alpha'\beta'}$ désignent les résultats de la substitution du second terme (13'.3) dans l'intégrale (13.3). Pour évaluer les termes $j_{\alpha'\beta'}$, écrivons

$$(14.3)\qquad j_{\alpha'\beta'} = (t-\tau)^{-1}\iiint\limits_{K(A,r)}[a^{\alpha'\beta'}_{\xi_\alpha}(B,\tau)-a^{\alpha'\beta'}_{\xi_\alpha}(A,t)]\times \\ \times(x_{\alpha'}-\xi_{\alpha'})(x_{\beta'}-\xi_{\beta'})w^{B,\tau}(A,t;B,\tau)dB+a^{\alpha'\beta'}_{\xi_\alpha}(A,t)(t-\tau)^{-1}\times \\ \times\iiint\limits_{K(A,r)}(x_{\alpha'}-\xi_{\alpha'})(x_{\beta'}-\xi_{\beta'})[w^{B,\tau}(A,t;B,\tau)-w^{A,t}(A,t;B,\tau)]dB+ \\ +a^{\alpha'\beta'}_{\xi_\alpha}(A,t)(t-\tau)^{-1}\iiint\limits_{K(A,r)} w^{A,t}(A,t;B,\tau)(x_{\alpha'}-\xi_{\alpha'})(x_{\beta'}-\xi_{\beta'})dB.$$

Désignons les termes de l'expression (14.3) par k_1, k_2 et k_3; on a donc

$$(14'.3)\qquad j_{\alpha'\beta'} = k_1+k_2+k_3.$$

On applique de nouveau les évaluations du § 1.A, en posant

$$\mathcal{E}' = \max|a^{\alpha'\beta'}_{\xi_\alpha}(B,\tau)-a^{\alpha'\beta'}_{\xi_\alpha}(A',\tau)|<\mathcal{E}_2,$$
$$\mathcal{E}_2>0,\quad t-\Delta t<\tau<t,\quad A',B\in K(A,3r)$$

et on obtient

$$k_1 = O(\mathcal{E}_2),\quad k_2 = O[(t-\tau)^{h_1/4}]\to 0,\quad \tau\to t.$$

4. Convergence de la fonction

$$(1.4)\qquad \bar{k}_3(\tau) = (t-\tau)^{-1}\iiint\limits_{K(A,r)} w^{A,t}(A,t;B,\tau)(x_{\alpha'}-\xi_{\alpha'})(x_{\beta'}-\xi_{\beta'})dB.$$

Nous allons prouver que l'expression

$$|\bar{k}_3(\tau_1)-\bar{k}_3(\tau_2)|,\quad t-\Delta t<\tau_1<t,\quad t-\Delta t<\tau_2<t$$

est aussi petite que l'on veut, dès que l'accroissement Δt est suffisamment petit.

On obtient, en introduisant dans les intégrales $k_3(\tau_1)$ et $k_3(\tau_2)$ les coordonnées sphériques, la différence que voici:

$$(2.4)\qquad \bar{k}_3(\tau_1)-\bar{k}_3(\tau_2) = \iint\limits_{k'}\int\limits_0^r \frac{r_{AB}^{n+1}}{(t-\tau_1)^{(n+1)/2}}\times \\ \times\exp\Big[-\frac{\vartheta_1^{A,t}(A,B)}{4(t-\tau_1)}r_{AB}^2\Big]\cos(r_{AB},x_{\alpha'})\cos(r_{AB},x_{\beta'})\frac{dr_{AB}}{\sqrt{t-\tau_1}}Jd\sigma-$$

$$-\iint\limits_{k'}\int\limits_0^r r_{AB}^{n+1}:(t-\tau_2)^{(n+1)/2}\exp\left[\frac{\vartheta_1^{A,t}(A,B)}{4(t-\tau_2)}r_{AB}^2\right]\times$$

$$\times\cos(r_{AB},x_{\alpha'})\cos(r_{AB},x_{\beta'})\frac{dr_{AB}}{\sqrt{t-\tau_2}}Jd\sigma,$$

où

$$\vartheta_1^{A,t}(A,B)=\sum_{\alpha',\beta'}a^{\alpha'\beta'}(A,t)\cos(r_{AB},x_{\alpha'})\cos(r_{AB},x_{\beta'}),$$

et J est le discriminant, qui ne dépend pas de r_{AB}. On change maintenant les variables dans les deux intégrales en posant

$$r_{AB}=u\sqrt{t-\tau_1},\qquad r_{AB}=u\sqrt{t-\tau_2},$$

d'où:

$$(3.4)\qquad \bar{k}_3(\tau_1)-\bar{k}_3(\tau_2)$$

$$=O\Big\{\iint\limits_{k'}\int\limits_{r/\sqrt{t-\tau_2}}^{r/\sqrt{t-\tau_1}}u^{n+1}\exp[-\tfrac{1}{4}u^2\vartheta_1^{A,t}(A,B)]dud\sigma\Big\}\to 0,\qquad \Delta t\to 0,$$

à cause de l'hypothèse (2) de l'introduction, c. q. f. d.

Les égalités (5.4), (7.2), (6.2), (5.2) et (1.2), de même que les formules (5.1) et (10) de l'introduction justifient la conclusion (11) de l'introduction.

Travaux cités

[1] W. Pogorzelski, *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique*, Ricerche di Matematica 5 (1956), p. 25-57.

[2] — *Propriétés des intégrales de l'équation parabolique normale*, Ann. Polon. Math. 4 (1957), p. 61-92.

Reçu par la Rédaction le 9. 11. 1957

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1959)

Sur une équation intégro-différentielle de la théorie de la conductibilité

par D. Sadowska (Łódź)

1. Énoncé du problème. Le problème de la répartition de la température en état stationnaire dans un milieu conducteur et rayonnant conduit à la résolution d'une équation intégro-différentielle de la forme

$$(1)\qquad \Delta T=f[A,T(A)]+\iiint\limits_{\Omega}\frac{F[A,B,T(B)]}{r_{AB}^2}d\tau_B\ (^1)$$

avec des conditions aux limites données.

Nous supposons que le domaine ouvert borné Ω est limité par une surface S vérifiant la condition de Liapounoff (2).

La fonction $f(A,u)$ est définie et continue à l'intérieur du domaine fermé

$$A\in\Omega+S,\qquad |u|\leqslant R.$$

Nous supposons, de plus, qu'elle vérifie dans ce domaine la condition de Hölder par rapport au point variable A et la condition de Lipschitz par rapport à la variable u.

La fonction $F(A,B,u)$ est définie et continue dans le domaine fermé

$$(2)\qquad A(x,y,z)\in\Omega+S,\qquad B(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega+S,\qquad |u|\leqslant R.$$

Nous supposons enfin que la fonction $F(A,B,u)$ vérifie la condition de Hölder par rapport au point variable A et la condition de Lipschitz par rapport à la variable u dans le domaine (2).

Nous cherchons une fonction $T(A)$, qui satisfasse à l'équation (1) à l'intérieur du domaine Ω et qui prenne en tout point P de la surface S des valeurs limites données a priori:

$$(3)\qquad T(A)\to 0,\qquad A\to P.$$

(1) Pour le sens physique de cette équation, voir le travail [2] de W. Pogorzelski.

(2) Condition de Liapounoff: L'angle $\Delta(P,Q)$ entre les plans tangents en deux points quelconques P, Q de la surface S vérifie l'inégalité $\Delta(P,Q)<Cr_{PQ}^{\varkappa}$, $0<\varkappa\leqslant 1$.