ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1959)

Une remarque sur la méthode des points extrémaux de F. Leja

par J. Górski (Kraków)

Introduction. Dans les travaux [1], [2] et [3] la solution du problème de Dirichlet a été construite au moyen de la méthode des points extrémaux de F. Leja pour un domaine situé dans le plan ou dans l'espace à 3 dimensions. La solution du problème y est obtenue en effectuant deux passages à la limite (voir (2) et (4)). Il est très intéressant de savoir s'il est possible d'obtenir la solution sans avoir recours au second passage à la limite (4). Je vais donner les conditions suffisantes pour que cette question admette une réponse affirmative. D'abord je vais rappeler quelques résultats connus.

Soit E un ensemble borné et fermé de diamètre transfini (capacité) positif situé dans le plan et $f(z)$ une fonction réelle continue, définie sur E. Posons

$$\omega_\lambda(z,\ \zeta) = |z-\zeta|\exp\{-\lambda[f(z)+f(\zeta)]\}, \tag{1}$$

où $z,\ \zeta\in E$ et λ est un paramètre. Un système de points $\{\eta_0^{(n\lambda)}, \eta_1^{(n\lambda)}, \ldots, \eta_n^{(n\lambda)}\} = \eta_\lambda^{(n)}$ sera dit n-ième système de points extrémaux par rapport à la fonction (1) lorsque

$$\prod_{0\leqslant j<k\leqslant n} \omega_\lambda(\eta_j^{(n\lambda)}, \eta_k^{(n\lambda)}) \geqslant \prod_{0\leqslant j<k\leqslant n} \omega_\lambda(\zeta_j, \zeta_k)$$

pour chaque système de $n+1$ points ζ_j, $j = 0, 1, \ldots, n$ de l'ensemble E. Posons

$$\Delta_j^{(n)} = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \omega_\lambda(\eta_j^{(n\lambda)}, \eta_k^{(n\lambda)}), \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

et soit $\Delta_0^{(n)} \leqslant \Delta_j^{(n)}$ pour $j = 0, 1, 2, \ldots, n$. Désignons par $L_n^{(j)}(z; \eta_\lambda^{(n)})$ les polynômes de Lagrange

$$L_n^{(j)}(z; \eta_\lambda^{(n)}) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{z-\eta_k^{(n\lambda)}}{\eta_j^{(n\lambda)}-\eta_k^{(n\lambda)}}$$

et formons les fonctions

$$\Phi_n^{(0)}\big(z;\eta_\lambda^{(n)},\lambda f(z)\big) = L_n^{(0)}(z,\eta_\lambda^{(n\lambda)})\cdot\exp[n\lambda f(\eta_0^{(n\lambda)})].$$

Désignons par E_λ l'ensemble des points d'accumulation de la suite triangulaire [1]

$$\begin{array}{l}\eta_0^{(1\lambda)},\ \eta_1^{(1\lambda)}\\ \eta_0^{(2\lambda)},\ \eta_1^{(2\lambda)},\ \eta_2^{(2\lambda)}\\ \cdots\cdots\cdots\end{array}$$

On sait [1] que la limite

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\Phi_n^{(0)}\big(z;\eta_\lambda^{(n)},\lambda f(z)\big)\right|} = \Phi(z;\lambda f) \tag{2}$$

existe pour chaque point $z\notin E_\lambda$ et que la fonction $\log\Phi(z;\lambda f)$ possède les propriétés suivantes:

1° Elle est harmonique en dehors de l'ensemble E_λ le point $z=\infty$ exclu, où $\log\Phi(z;\lambda f)$ a un pôle logarithmique.

2° Lorsque $z\notin E_\lambda$ et z tend vers un point quelconque $z_0\in E_\lambda$ on a

$$\lim_{z\to z_0}\log\Phi(z;\lambda f) = \lambda f(z_0). \tag{$*$}$$

Pour chaque point $z\in E-E_\lambda$ on a

$$\log\Phi(z;\lambda f)\leqslant\lambda f(z). \tag{3}$$

3° Soit E la frontière commune de deux domaines D et D_∞, où D_∞ contient le point $z=\infty$. Alors pour chaque point $z\in D$ la limite

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\log\Phi(z;\lambda f) = \varphi(z) \tag{4}$$

existe. La fonction $\varphi(z)$ est la solution du problème de Dirichlet pour le domaine D avec la valeur $f(z)$ sur E.

On sait (voir [4] et [5]) qu'il existe des fonctions $f(z)$ pour lesquelles le passage à la limite (4) est inutile, par exemple lorsque $f(z)=\sqrt[k]{|w_r(z)|}$, $w_r(z)$ étant un polynôme de degré r ou $f(z)=\text{const}$ sur chaque composant de la frontière E d'un domaine D_∞ contenant le point $z=\infty$.

Cas d'un domaine plan. Je vais démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Supposons 1° que l'ensemble E soit une courbe régulière de Jordan telle qu'on ait*

$$|\Theta(s')-\Theta(s'')|\leqslant A|s'-s''|,\qquad A=\text{const} \tag{5}$$

(1) Il peut arriver qu'il y ait plusieurs systèmes de points extrémaux pour une valeur fixée de n et λ, mais l'ensemble E_λ est toujours le même.

où $\Theta(s)$ désigne l'angle entre la droite tangente à E et l'axe réel, s — la longueur de E, 2° que la fonction $f(z)$ remplisse sur E la condition de Lipschitz

$$|f(z')-f(z'')|\leqslant M|z'-z''|. \tag{6}$$

Alors il existe un nombre $\lambda_0>0$ tel que la fonction $\frac{1}{\lambda}\log\Phi(z;\lambda f)$ soit, pour chaque λ, $0<\lambda\leqslant\lambda_0$, la solution du problème de Dirichlet pour le domaine D, où D est l'intérieur de la courbe E.

Démonstration. Complétons la définition de la fonction $\frac{1}{\lambda}\log\Phi(z;\lambda f)$ par ses valeurs limites ($*$). La fonction $\frac{1}{\lambda}\log\Phi(z;\lambda f)$ est sousharmonique dans tout le plan ouvert, car elle est égale à la différence d'une constante et d'un potentiel logarithmique (voir [5]). Désignons par $\varphi(z;f)$ la fonction suivante:

$\varphi(z;f)$ est égale à la solution du problème de Dirichlet pour la fonction $f(z)$ et le domaine D lorsque $z\in D$ et elle est égale à la même solution pour le domaine D_∞ lorsque $z\in D_\infty$.

Soit $G(z;\infty)$ la fonction de Green pour le domaine D_∞ avec un pôle à l'infini. Posons $G(z;\infty)\equiv 0$ pour $z\in D$ et considérons la fonction

$$\frac{1}{\lambda}G(z;\infty)+\varphi(z;f). \tag{7}$$

Pour que la fonction (7) soit sousharmonique dans tout le plan pour une valeur $\lambda_0>0$ il suffit qu'on ait

$$\frac{1}{2\pi r}\int_{K(z_0;r)}\left[\frac{1}{\lambda_0}G(z;\infty)+\varphi(z;f)\right]ds\geqslant\varphi(z_0;f), \tag{8}$$

où $K(z_0;r)$ est un cercle de centre au point quelconque $z_0\in E$ et de rayon arbitraire r. L'inégalité (8) peut être représentée sous la forme suivante

$$\frac{1}{\lambda_0}\geqslant\int_{K(z_0;r)}[\varphi(z_0;f)-\varphi(z;f)]ds\Big/\int_{K(z_0;r)}G(z;\infty)ds. \tag{9}$$

Selon les conditions (5), (6) et le théorème bien connu ([6], p. 456), la fonction $\varphi(z;f)$ remplit dans tout le plan la condition de Lipschitz, donc on a

$$\int_{K(z_0;r)}|\varphi(z_0;f)-\varphi(z;f)|ds\leqslant Br^2,\qquad B=\text{const}. \tag{10}$$

D'autre part il résulte de l'hypothèse (5) qu'on a (²) (cf. [8], p. 664)

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}\int\limits_{K(z_0;r)} G(z;\infty)\,ds \geqslant c>0, \qquad C = \text{const.} \tag{11}$$

Pour que l'inégalité (9) ait lieu il suffit qu'on ait

$$\overline{\lim_{r\to 0}}\Big\{\int\limits_{K(z_0;r)}[\varphi(z_0;f)-\varphi(z;f)]\,ds\Big/\int\limits_{K(z_0;r)} G(z;\infty)\,ds\Big\} < \infty. \tag{12}$$

D'après (10), (11) et (12) il résulte qu'il existe un nombre $\lambda_0 > 0$ tel que pour chaque λ, $0<\lambda\leqslant\lambda_0$ la fonction (7) est sousharmonique dans tout le plan ouvert.

Deux cas sont possibles: $E_\lambda = E$ ou $E_\lambda \neq E$. Lorsque $E_\lambda = E$ pour une valeur $\lambda > 0$ la fonction $\frac{1}{\lambda}\log\Phi(z;\lambda f)$ serait la solution cherchée. Soit $E_\lambda \neq E$ et $\lambda<\lambda_0$. Désignons par $D(E_\lambda)$ le domaine dont la frontière est l'ensemble E_λ et formons la différence

$$\frac{1}{\lambda}G(z;\infty)+\varphi(z;f)-\frac{1}{\lambda}\log\Phi(z;\lambda f)$$

pour $z\in D(E_\lambda)$. Les fonctions $\frac{1}{\lambda}\log\Phi(z;\lambda f)$ et (7) sont égales sur E_λ, la fonction $\frac{1}{\lambda}\log\Phi(z;\lambda f)$ est harmonique en dehors de E_λ (le point ∞ exclu), la fonction (7) est sousharmonique en dehors de E_λ. Le différence est donc une fonction sousharmonique en dehors de E_λ, égale à 0 sur E_λ (et harmonique dans le voisinage du point ∞) alors

$$\frac{1}{\lambda}G(z;\infty)+\varphi(z;f)\leqslant\frac{1}{\lambda}\log\Phi(z;\lambda f), \qquad z\in D(E_\lambda).$$

De cette inégalité et de (3) il résulte qu'on a $\frac{1}{\lambda}\log\Phi(z;\lambda f) = f(z)$ pour chaque $z\in E$.

Remarque. 1° Lorsque $0<\lambda\leqslant\lambda_0$ et le point $z\in D_\infty$ tend vers $z_0\in E$, la fonction $\frac{1}{\lambda}\log\Phi(z;\lambda f)$ tend vers $f(z_0)$. 2° Le théorème 1 est vrai dans le cas où l'ensemble $E = \sum_{i=1}^{p}E_i$, $E_jE_k = 0$ pour $j\neq k$, $j,k = 1,\ldots,p$, est la frontière d'un domaine D_∞, E_i, $i=1,\ldots,p$, étant la courbe de Jordan remplissant la condition (5).

(²) En chaque point $z\in E$ il existe une dérivée $dG/dn\geqslant c_1>0$, où n désigne la normale.

Cas d'un domaine dans l'espace. Soit E un ensemble borné et fermé dans l'espace dont la capacité newtonienne $d(E)$ est positive. Posons

$$\omega_\lambda(P,Q) = \exp\Big\{\lambda[f(P)+f(Q)]-\frac{1}{PQ}\Big\}, \qquad P,Q\in E, \tag{13}$$

où $f(P)$ est la fonction continue sur E et PQ désigne la distance des points P et Q. Un système de n points

$$P_\lambda^{(n)} = \{P_1^{(n\lambda)}, P_2^{(n\lambda)},\ldots,P_n^{(n\lambda)}\}$$

de la frontière E sera dit n-ième système de points extrémaux par rapport à la fonction (13) lorsqu'on a

$$\prod_{1\leqslant i<k\leqslant n}\omega_\lambda(P_i^{(n\lambda)},P_k^{(n\lambda)})\geqslant\prod_{1\leqslant i<k\leqslant n}\omega_\lambda(Q_i,Q_k)$$

pour chaque système de n points $Q^{(n)}\in E$.

Dans le travail [3] j'ai prouvé: 1° Pour chaque point $P\notin E$ il existe une limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{PP_k^{(n\lambda)}} = v_\lambda(P).$$

On peut représenter la fonction $v_\lambda(P)$ par l'intégrale

$$v_\lambda(P) = \int\limits_E\frac{d\mu_\lambda(Q)}{PQ}, \tag{14}$$

où μ_λ désigne la répartition limite de la masse unité sur E. Cette répartition est définie par les points extrémaux $P_\lambda^{(n)}$. 2° Pour chaque point $P\in E$, à l'exception d'un ensemble de capacité 0, on a

$$\int\limits_E\frac{d\mu_\lambda(Q)}{PQ}\geqslant\lambda f(P)+\gamma_\lambda, \tag{15}$$

où

$$\gamma_\lambda = \frac{1}{d(E_\lambda)}-\lambda\int\limits_{E_\lambda}f(Q)\,d\mu_\lambda(Q).$$

E_λ est le noyau de la masse relatif à la distribution μ_λ, $d(E_\lambda)$ est la capacité de l'ensemble E_λ et μ_λ la distribution d'équilibre de la masse unité sur E_λ. 3° La fonction $\frac{1}{\lambda}v_\lambda(P)$ est la solution du problème de Dirichlet pour la fonction $f(P)+\gamma_\lambda/\lambda$ et le domaine D_λ dont la frontière est l'ensemble E_λ. À l'infini on a $\frac{1}{\lambda}v_\lambda(\infty) = 0$.

La fonction (14) est surharmonique dans tout l'espace. *Désignons* par $\psi(P;f)$ la fonction suivante:

$\psi(P;f)$ est la solution du problème de Dirichlet pour la domaine borné D (dont la frontière est l'ensemble E) avec la valeur $f(P)$ sur E lorsque $P \in D$ et

$\psi(P;f)$ est égale à la même solution avec la valeur 0 à l'infini lorsque $P \in D_\infty$, où D_∞ est le domaine non borné dont la frontière est l'ensemble E.

Soit de même $\varphi_\lambda(P)$ la solution du problème de Dirichlet pour le domaine D_∞, avec la valeur 0 à l'infini et γ_λ/λ sur E. Pour $P \in D$ posons $\varphi_\lambda(P) \equiv \gamma_\lambda/\lambda$.

Pour que la fonction $\psi(P;f)+\varphi_\lambda(P)$ soit surharmonique dans tout l'espace, il suffit qu'on ait

$$(16) \qquad \frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{K(Q;r)} [\psi(P;f)+\varphi_\lambda(P)]\,d\sigma_p \leqslant f(Q)+\frac{\gamma_\lambda}{\lambda}$$

pour chaque point $Q \in E$ et chaque sphère $K(Q;r)$ de centre Q et de rayon r.

Lorsqu'il existe un nombre $\lambda_0 > 0$ tel que l'inégalité (16) soit satisfaite, on a $E_\lambda = E$ pour $0 < \lambda \leqslant \lambda_0$, car dans le cas contraire la fonction $\frac{1}{\lambda}v_\lambda(P)$ serait harmonique en dehors de l'ensemble E_λ, donc (cf. la démonstration du théorème 1)

$$\frac{1}{\lambda}v_\lambda(P_0) \leqslant \psi(P_0;f)+\varphi_\lambda(P_0) = f(P_0)+\frac{\gamma_\lambda}{\lambda}, \qquad P_0 \in E-E_\lambda.$$

De cette inégalité et de (15) on tire $\frac{1}{\lambda}v_\lambda(P) = f(P)+\frac{\gamma_\lambda}{\lambda}$ pour $P \in E$. Alors la fonction $\frac{1}{\lambda}v_\lambda(P)$ est la solution du problème de Dirichlet pour le domaine D (et D_∞) avec la valeur $f(P)+\gamma_\lambda/\lambda$ sur E (et 0 à l'infini).

THÉORÈME 2. *Soit E la frontière commune de deux domaines D et D_∞. Supposons 1° que E soit la surface de Liapounoff, 2° que la fonction $f(P)$ remplisse la condition de Lipschitz. Alors il existe un nombre $\lambda_0 > 0$ tel que la condition* (16) *soit satisfaite.*

Démonstration. D'après 1°, 2° et un théorème connu (voir [7], p. 213) on a

$$(17) \qquad |\psi(P;f)-f(Q)| \leqslant B|PQ|$$

dans tout l'espace. D'autre part pour $\lambda \to 0$ on a $\gamma_\lambda/\lambda \to \infty$ car $d(E_\lambda) \to d(E) > 0$ (voir [3]). Il suffit de prouver l'inégalité (16) pour de petites valeurs du rayon r. Mais, pour r suffisamment petit, on a (³)

$$(18) \qquad \frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{K(Q;r)} \varphi_\lambda(P)\,d\sigma_p < \frac{\gamma_\lambda}{\lambda} - A_\lambda\cdot r,$$

où la constante A_λ dependant de λ est $> B$ pour $\lambda \leqslant \lambda_0$; donc (17) et (18) entraînent l'inégalité (16).

Travaux cités

[1] F. Leja, *Une méthode élémentaire de résolution du problème de Dirichlet dans le plan*, Ann. de la Soc. Polon. de Math. 23 (1950), p. 230-245.

[2] M. Inoue, *Sur un procédé pour construire la solution du problème de Dirichlet*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 14 (1936), p. 368-372.

[3] J. Górski, *Méthode des points extrémaux de résolution du problème de Dirichlet dans l'espace*, Ann. Pol. Math. 1 (1955), p. 218-229.

[4] — *Sur certaines fonctions harmoniques jouissant des propriétés extrémales par rapport à un ensemble*, Ann. de la Soc. Polon. de Math. 23 (1950), p. 259-271.

[5] — *Sur certaines propriétés des points extrémaux liés à un domaine plan*, Ann. Pol. Math. 3 (1956), p. 32-36.

[6] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Москва 1952.

[7] N. M. Giunter, Teoria potencjału, Warszawa 1957, str. 328.

[8] В. И. Смирнов, *Курс высшей математики IV*, Москва 1949.

Reçu par la Rédaction le 11. 4. 1958

(³) En chaque point $Q \in E$ il existe une dérivée normale $d\varphi_\lambda(P)/dn \leqslant -A_\lambda^*$, $A_\lambda^* > 0$.