ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1959)

# Sur la stabilité asymptotique des solutions d'un système d'équations différentielles

par Z. Mikołajska (Kraków)

Le théorème $T$ dont la démonstration est le but de la présente note donne une condition de stabilité asymptotique des solutions du système

$$(1) \qquad dx/dt = F(t, x),$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $F \equiv (f_1, \ldots, f_n)$, $n > 1$. Il constitue une généralisation d'un résultat de Krasovski (dans le cas $n > 1$, cf. [1] et la remarque 3 à la fin de la présente note).

Définition 1. L'intégrale $\varphi(t)$ du système (1) est dite *stable* (au sens de Liapounoff) par rapport à l'ensemble $Z$ des points $x$ de l'espace euclidien $E$ à $n$ dimensions, lorsqu'il existe pour chaque nombre $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ tel que pour chaque point $p \in Z$ satisfaisant à l'inégalité $\|p - \varphi(0)\| \leqslant \delta$ on ait

$$\|\varphi(t) - \varphi(t, p, 0)\| \leqslant \varepsilon, \quad \text{pour} \quad t > 0,$$

où $\varphi(t, p, 0)$ désigne l'intégrale du système (1) qui passe pour $t = 0$ par le point $p$.

Définition 2. L'intégrale $\varphi(t)$ est dite *asymptotiquement stable* par rapport à l'ensemble $Z$, lorsqu'elle est stable par rapport à l'ensemble $Z$ et lorsqu'il existe un entourage du point $q = \varphi(0)$, $\omega\{\|p - q\| \leqslant r\}$ $(r > 0)$, tel que pour chaque $p \in \omega Z$ on ait

$$(2) \qquad \|\varphi(t) - \varphi(t, p, 0)\| \to 0 \quad \text{pour} \quad t \to \infty.$$

Hypothèse H. $F(t, x)$ est une fonction continue dans l'espace à $n+1$ dimensions tout entier des points $(t, x)$. $Z$ est un ensemble compact (fermé) et connexe de l'espace $E$ à $n$ dimensions des points $x$, qui partage l'espace $E$ en parties disjointes $\gamma_i$ ($\gamma_i \gamma_j = 0$ pour $i \neq j$; $E - Z = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i$, $p$ fini ou non). $G$ est la somme des $\gamma_i$ bornées. ($Z$ étant compact, $G$ est aussi borné). Supposons, de plus, l'unicité des solutions du système (1), et la stabilité asymptotique par rapport à l'ensemble $Z$ de la solution $\varphi(t, p, 0)$ du système (1) pour chaque $p \in Z$.

THÉORÈME T. *Dans l'hypothèse H toute intégrale $\varphi(t, q, 0)$ du système* (1) *est équiasymptotiquement stable au sens de Liapounoff* [1] *pour $q$ quelconque appartenant à $G$.*

La démonstration du théorème $T$ peut être partagée en plusieurs étapes.

**1.** LEMME 1. *Supposons que $Z$ soit un ensemble compact (fermé) de l'espace $E$. Désignons par $\varphi(t, p, 0)$ l'intégrale du système* (1) *passant pour $t = 0$ par le point $p$. Supposons que pour chaque $p \in Z$ l'intégrale $\varphi(t, p, 0)$ soit asymptotiquement stable par rapport à l'ensemble $Z$.*

*Ceci admis, il existe pour chaque $\varepsilon > 0$ un $T \geqslant 0$ tel que la convergence*

$$\|\varphi(t, p, 0) - \varphi(t, q, 0)\| \to 0 \quad \textit{pour} \quad t \to \infty, \tag{1.1}$$

*et $p \in Z$, $q \in Z$, implique l'inégalité*

$$\|\varphi(t, p, 0) - \varphi(t, q, 0)\| \leqslant \varepsilon \quad \textit{pour} \quad t \geqslant T. \tag{1.2}$$

Démonstration. Pour la démonstration par l'impossible supposons que l'implication en question ne soit pas vérifiée. Il existerait donc un $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $\{t, p_\nu, q_\nu\}$ telle que $t_\nu \to \infty$, $p_\nu \in Z$, $q_\nu \in Z$ et que l'on aurait

$$\|\varphi(t, p_\nu, 0) - \varphi(t, q_\nu, 0)\| \to 0 \tag{1.3}$$

pour $t \to \infty$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ et

$$\|\varphi(t_\nu, p_\nu, 0) - \varphi(t_\nu, q_\nu, 0)\| \geqslant \varepsilon_0. \tag{1.4}$$

En vertu de la compacité de l'ensemble $Z$ on peut extraire des suites $\{p_\nu\}$, $\{q_\nu\}$ les suites convergentes

$$p_{\alpha_\nu} \to p_0, \quad q_{\alpha_\nu} \to q_0. \tag{1.5}$$

$Z$ étant fermé, on a

$$p_0 \in Z, \quad q_0 \in Z. \tag{1.6}$$

De la stabilité il vient que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\|\varphi(t, p_0, 0) - \varphi(t, p, 0)\| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0, \quad \|p - p_0\| \leqslant \delta, \tag{1.7}$$

$$\|\varphi(t, q_0, 0) - \varphi(t, q, 0)\| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0, \quad \|q - q_0\| \leqslant \delta. \tag{1.8}$$

[1] L'intégrale $\varphi(t)$ est dite *équiasymptotiquement stable* au sens de Liapounoff lorsqu'il existe un entourage $\omega$ du point $\varphi(0)$ tel que $\varphi(t)$ soit asymptotiquement stable par rapport à $\omega$ et que la convergence (2) soit uniforme par rapport à $p$, $p \in \omega$.



Donc, en vertu de (1.5) et de la stabilité asymptotique des intégrales $\varphi(t, p_0, 0)$ et $\varphi(t, q_0, 0)$ pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un $N_\varepsilon$ tel que pour $\nu \geqslant N_\varepsilon$ on a les inégalités

$$\|\varphi(t, p_{\alpha_\nu}, 0) - \varphi(t, p_0, 0)\| \leqslant \varepsilon/4 \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0, \tag{1.9}$$

$$\|\varphi(t, q_{\alpha_\nu}, 0) - \varphi(t, q_0, 0)\| \leqslant \varepsilon/4 \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0. \tag{1.10}$$

Il est évident qu'on a

$$\begin{aligned} &\|\varphi(t, p_0, 0) - \varphi(t, q_0, 0)\| \\ &\quad \leqslant \|\varphi(t, p_0, 0) - \varphi(t, p_{\alpha_\nu}, 0)\| + \|\varphi(t, q_{\alpha_\nu}, 0) - \varphi(t, p_{\alpha_\nu}, 0)\| + \\ &\qquad + \|\varphi(t, q_0, 0) - \varphi(t, q_{\alpha_\nu}, 0)\| \\ &\quad \leqslant \varepsilon/2 + \|\varphi(t, p_{\alpha_\nu}, 0) - \varphi(t, q_{\alpha_\nu}, 0)\| \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0, \quad \nu \geqslant N_\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Fixons un $\nu_0 \geqslant N_\varepsilon$. En vertu de (1.3) pour chaque $\varepsilon > 0$ on peut trouver un $T_0(\varepsilon) \geqslant 0$ tel que

$$\|\varphi(t, p_{\alpha_{\nu_0}}, 0) - \varphi(t, q_{\alpha_{\nu_0}}, 0)\| \leqslant \varepsilon/2 \quad \text{pour} \quad t \geqslant T_0(\varepsilon)$$

d'où, en vertu de (1.11), on a

$$\|\varphi(t, p_0, 0) - \varphi(t, q_0, 0)\| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad t \geqslant T_0(\varepsilon)$$

c'est-à-dire

$$\|\varphi(t, p_0, 0) - \varphi(t, q_0, 0\| \to 0 \quad \text{pour} \quad t \to \infty. \tag{1.12}$$

D'autre part, en vertu de (1.4), (1.9) et (1.10), on a

$$\|\varphi(t_{\alpha_\nu}, p_0, 0) - \varphi(t_{\alpha_\nu}, q_0, 0)\| \geqslant \varepsilon_0$$

ce qui est en contradiction avec (1.12). Le lemme 1 est ainsi démontré.

**2.** LEMME 2. *Supposons que l'ensemble $Z$ soit compact (fermé) et connexe, $Z \subset E$, et que pour chaque $q \in Z$ l'intégrale $\varphi(t, q, 0)$ soit asymptotiquement stable par rapport à l'ensemble $Z$.*

*Dans ces hypothèses a lieu la convergence uniforme*

$$\|\varphi(t, q, 0) - \varphi(t, p, 0)\| \underset{q \in Z,\, p \in Z}{\rightrightarrows} 0 \quad \textit{pour} \quad t \to \infty.$$

Démonstration. En vertu du lemme 1 il suffit, pour chaque $p \in Z$ et $q \in Z$, de prouver que $\|\varphi(t, p, 0) - \varphi(t, q, 0)\| \to 0$ pour $t \to \infty$.

Nous avons supposé que pour chaque $p \in Z$ l'intégrale $\varphi(t, p, 0)$ est asymptotiquement stable par rapport à l'ensemble $Z$. Ceci veut dire que pour chaque $p \in Z$ il existe un voisinage $O_p$ tel que

$$\|\varphi(t, p, 0) - \varphi(t, q, 0)\| \to 0 \quad \text{pour} \quad q \in ZO_p. \tag{2.1}$$

En vertu de la compacité de l'ensemble $Z$, on peut extraire de la famille des voisinages $O_p$ (théorème de Borel-Lebesgue) une suite finie $O_{p_1}, \ldots, O_{p_m}$ telle que

$$Z \subset \sum_{i=1}^{m} O_{p_i}. \tag{2.2}$$

En vertu de la connexité de l'ensemble $Z$ on peut ordonner les points $p_1, \ldots, p_m$ (en répétant, s'il y a lieu, plusieurs fois $p_j$) de telle manière que la suite obtenue $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_r$ $(m \leqslant r < \infty)$ satisfasse à la condition

$$O_{\bar{p}_i} O_{\bar{p}_{i+1}} \neq 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, r-1.$$

Il existe donc une suite de points $w_i$ $(i = 1, \ldots, r-1)$ telle que

$$w_i \in O_{\bar{p}_i} O_{\bar{p}_{i+1}} \quad (i = 1, \ldots, r-1). \tag{2.3}$$

Pour deux points quelconques $p \in Z$ et $q \in Z$, il existe des $j$, $k$ tels que

$$p \in O_{\bar{p}_j}, \quad q \in O_{\bar{p}_k} \tag{2.4}$$

$(1 \leqslant j \leqslant r,\ 1 \leqslant k \leqslant r)$. On peut supposer que $j \leqslant k$. Nous avons

$$\|\varphi(t, p, 0) - \varphi(t, q, 0)\| \leqslant \|\varphi(t, p, 0) - \varphi(t, \bar{p}_j, 0)\| + \\ + \|\varphi(t, q, 0) - \varphi(t, \bar{p}_k, 0)\| + \\ + \sum_{i=j}^{k-1} \|\varphi(t, w_i, 0) - \varphi(t, \bar{p}_i, 0)\| + \sum_{i=j}^{k-1} \|\varphi(t, w_i, 0) - \varphi(t, \bar{p}_{i+1}, 0)\|.$$

En vertu de (2.3), (2.4) et (2.1) nous avons

$$\|\varphi(t, p, 0) - \varphi(t, q, 0)\| \to 0 \quad \text{pour} \quad t \to \infty,$$

quel que soit $p \in Z$ et $q \in Z$. En vertu du lemme 1 la convergence est donc uniforme par rapport à $p, q$, $p \in Z$, $q \in Z$.

**3.** Lemme 3. *Admettons l'hypothèse* H, *et supposons en plus que le diamètre de l'ensemble $Z$ ne dépasse pas $A$ ($A$ étant un nombre positif). Dans ces hypothèses le diamètre de l'ensemble $G$ n'est pas plus grand que $A$.*

Le lemme 3 étant presque évident, nous omettons sa démonstration.

**4.** Démonstration du théorème T. Introduisons les notations suivantes:

(ensemble $Z_t$) $\quad q \in Z_t \equiv$ il existe un $p \in Z$ tel que $q = \varphi(t, p, 0)$,

(ensemble $G_t$) $\quad q \in G_t \equiv$ il existe un $p \in G$ tel que $q = \varphi(t, p, 0)$.

Grâce aux lemmes 1 et 2, on voit que le diamètre de l'ensemble $Z_t$ tend vers zéro avec $t \to \infty$, d'où, en vertu du lemme 3, il résulte que le diamètre de l'ensemble $G_t$ tend vers zéro pour $t \to \infty$. C'est-à-dire, pour un $q_0 \in G$ fixé quelconque et pour chaque $p \in G$, on a



$$\|\varphi(t, p, 0) - \varphi(t, q_0, 0)\| \to 0 \quad \text{pour} \quad t \to \infty \tag{4.1}$$

et en plus, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un $T_\varepsilon > 0$ tel que pour $t \geqslant T_\varepsilon$ et $p \in G$ on a

$$\|\varphi(t, p, 0) - \varphi(t, q_0, 0)\| \leqslant \varepsilon. \tag{4.2}$$

Les intégrales du système (1) dépendent d'une manière continue du point initial, on peut donc choisir un $\delta_\varepsilon > 0$ de telle manière qu'on ait (4.2) pour tout $p$ satisfaisant à l'inégalité

$$\|p - q_0\| \leqslant \delta_\varepsilon \quad \text{et} \quad 0 \leqslant t \leqslant T_\varepsilon. \tag{4.3}$$

$G$ étant ouvert, quand $\delta_\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, chaque $p$ satisfaisant à (4.3) appartient à $G$; par suite, pour chaque $p$ satisfaisant à (4.3), l'inégalité (4.2) est satisfaite pour $0 \leqslant t < +\infty$, c'est-à-dire $\varphi(t, q_0, 0)$ est asymptotiquemant stable. $T_\varepsilon$ ne dépend pas de $p$, l'intégrale $\varphi(t, q_0, 0)$ est donc équiasymptotiquement stable.

**5.** Remarque 1. Pour $n = 1$, lorsque l'ensemble $Z$ est connexe et coupe l'espace $E$ ($E$ est une droite $-\infty < x < +\infty$), l'ensemble $G$ est vide.

Remarque 2. La connexité de l'ensemble $Z$ constitue une hypothèse essentielle, comme le montre l'exemple construit pour $n = 1$:

Exemple. Considérons l'équation différentielle

$$x' = f(t, x), \tag{1*}$$

où $f(t, x)$ est donnée par les formules suivantes:

$$f(t, x) = \begin{cases} 1 - x & \text{pour} \quad x \geqslant 1, \\ -1 - x & \text{pour} \quad x \leqslant -1, \\ x(1 - x) & \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x(1 + x) & \text{pour} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$$

On vérifie facilement que la fonction $f(t, x)$ ainsi définie est de classe $C^1$ et, en plus, que chaque intégrale $\varphi(t, p, 0)$ de l'équation (1*), passant par le point $(0, p)$, où $p \in (0, 1\rangle$ ou bien $p \in \langle -1, 0)$, est asymptotiquement stable; néanmoins l'intégrale $x \equiv 0$ n'est pas stable, car chaque intégrale issue du point $x_0 > 0$ pour $t = 0$ tend vers $+1$ pour $t \to \infty$, et l'intégrale issue du point $x_0 < 0$ (pour $t = 0$) tend vers $-1$ pour $t \to \infty$. (2)

Remarque 3. On peut facilement vérifier que du théorème T on obtient immédiatement le théorème K de Krasovski [1] (pour $n > 1$).

THÉORÈME K (Krasovski). *Supposons que pour le système d'équations* (1) *l'intégrale* $\varphi(t)$ *soit uniformément stable. Envisageons un domaine* $\Omega$ ($\Omega \subset E$) *qui contient un voisinage* $0 < \|p - p_0\| \leqslant r$ ($r > 0$) *du point* $p_0 = \varphi(0)$ *et supposons que pour chaque* $q \in \Omega$ *l'intégrale* $x = \varphi(t, q, 0)$ *du système* (1) *soit asymptotiquement stable (au sens de Liapounoff).*

*Dans cette hypothèse, l'intégrale* $\varphi(t)$ *est asymptotiquement stable (au sens de Liapounoff) et l'ensemble* $\Omega$ *est contenu dans la région de stabilité asymptotique de* $\varphi(t)$ *(c'est-à-dire pour chaque* $q \in \Omega$ *on a* $\|\varphi(t, q, 0) - \varphi(t)\| \to 0$ *pour* $t \to \infty$*).*

La démonstration de ce théorème s'appuie sur les trois remarques suivantes:

1° Lorsque l'intégrale $\varphi(t, q, 0)$ est asymptotiquement stable (au sens de Liapounoff) et $q \in Z$, l'intégrale est asymptotiquement stable par rapport à $Z$.

2° Dans les conditions du théorème K, il existe un ensemble $Z$ satisfaisant aux hypothèses du théorème T. Il suffit de prendre pour $Z$ l'ensemble $\|p - p_0\| = r$. En vertu du théorème T l'intégrale $\varphi(t)$ est donc équiasymptotiquement stable.

3° Lorsque le point $q_0 \in \Omega$, il existe toujours un ensemble $Z$ compact (fermé) et connexe qui coupe l'espace $E$ de telle sorte que $q_0 \in G$, $p_0 \in G$, où $G$ désigne la somme des parties disjointes bornées de l'ensemble $E - Z$, $Z \subset \Omega$. Comme, en vertu des lemmes 2 et 3, le diamètre de l'ensemble $G_t \to 0$ pour $t \to \infty$, on a $\|\varphi(t, p_0, 0) - \varphi(t, q_0, 0)\| \to 0$ pour $t \to \infty$, ce qui veut dire que $q_0$ appartient au domaine de stabilité asymptotique de l'intégrale $\varphi(t)$.

(2) On vérifie aisément que les intégrales de l'équation (1*) ont la forme

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| pour | $x \geqslant 1$ | $x = ke^{-t} + 1 \to 1$ | pour | $t \to \infty$ | $(k \geqslant 0)$, |
| pour | $0 < x \leqslant 1$ | $x = \dfrac{1}{1 + ke^{-t}} \to 1$ | pour | $t \to \infty$ | $(k \geqslant 0)$, |
| pour | $-1 \leqslant x < 0$ | $x = \dfrac{-1}{1 - ke^{-t}} \to -1$ | pour | $t \to \infty$ | $(k \leqslant 0)$, |
| pour | $x \leqslant -1$ | $x = ke^{-t} - 1 \to -1$ | pour | $t \to \infty$ | $(k \leqslant 0)$. |



L'hypothèse de la stabilité de $\varphi(t)$ n'intervient ni dans la démonstration du théorème T, ni dans celles des lemmes 1-3. En vertu de 1°, 2°, 3° on voit donc qu'elle peut aussi être omise (pour $n > 1$) dans le théorème K.

## Travaux cités

[1] Н. Н. Красовский, *Об устойчивости при больших начальных возмущениях*, Прикладная мат. и мех. 21 (1957), p. 309-319.

*Reçu par la Rédaction le 12. 5. 1958*