ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1959)

Sur une hypothèse de M. Biernacki

par A. ZAJTZ (Kraków)

Dans son travail *Sur une inégalité entre les moyennes des dérivées logarithmiques* (Mathematica, Cluj, 23 (1947-1948), p. 54-59) M. Biernacki a prouvé le théorème suivant:

Soit dans le plan une courbe régulière (analytique) fermée, qui ne passe pas par l'origine O. Alors la variation totale de l'angle formé par le rayon vecteur OM de la courbe avec une direction fixe ne dépasse pas la variation totale de l'angle que fait la tangente avec cette direction, lorsque le point M décrit la courbe entière.

En rapport avec ce théorème M. Biernacki a énoncé l'hypothèse, que ce théorème pourrait être généralisé à l'espace à trois dimensions sous la forme suivante:

Soit une surface fermée et analytique et le point O, qui n'est pas situé sur elle. Les rayons vecteurs des points de la surface décrivent sur la sphère unitaire de centre O une certaine surface. On suppose que l'aire de cette surface (si elle est définie) ne dépasse pas l'aire de la surface décrite par les normales extérieures à la surface considérée. Si une portion de la sphère est recouverte plusieurs fois, son aire est comptée autant de fois.

Je donnerai ci-dessous des exemples qui mettent cette hypothèse en défaut. Je vais considérer deux cas, suivant que le point O se trouve à l'extérieur ou à l'intérieur de la surface.

a. Prenons la surface de révolution engendrée par la rotation d'une courbe plane autour de la droite l (fig. 1). La droite q est tangente à l'arc AE au point C. Aux points A, D et E les normales sont parallèles à l'axe l. Aux points B et C elles forment avec la droite l l'angle $\pi/4$. Après la rotation, les normales à l'arc AE deviendront des normales à la surface de révolution. L'arc BC n'a qu'un point d'inflexion.

Les rayons vecteurs de la surface de révolution décrivent sur la sphère unitaire de centre O une zone dont l'aire est

$$P = 4\pi(1+\sqrt{2}/2).$$

Les normales extérieures à la surface décrivent sur la sphère K une zone dont l'aire est

$$Q = 2\pi(4-\sqrt{2})+\omega,$$

où ω est l'aire de la zone décrite par les normales à la portion de la surface de révolution engendrée par la rotation de l'arc BC autour de la droite l. On a

$$P-Q = 4\pi(\sqrt{2}-1)-\omega.$$

La variation totale de l'angle que fait la normale avec une direction fixe, lorsque le point décrit l'arc BC, peut être rendue suffisamment

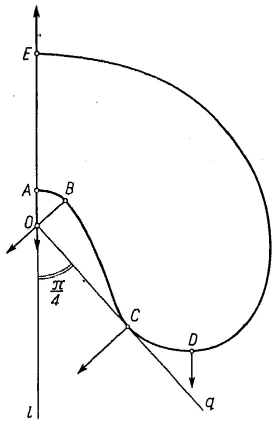

Fig. 1

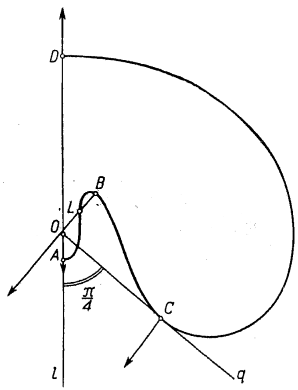

Fig. 2

petite, à condition de prendre l'arc AB suffisamment petit. Alors ω sera petit, en particulier moindre que $4\pi(\sqrt{2}-1)$. Alors on aura

$$P-Q > 0$$

et $P > Q$, en contradiction avec l'hypothèse.

b. Prenons la surface de révolution engendrée par la rotation d'une courbe plane autour de la droite l (fig. 2).

La droite q est tangente à l'arc AD au point C. La tangente au point B est parallèle à la droite q. Chacun des arcs AB et BC n'a qu'un point d'inflexion. Aux points A, D les normales sont parallèles à l'axe l. La droite q fait avec l'axe l l'angle $\pi/4$. Dans ce cas nous avons

$$P^* = 4\pi(1+\sqrt{2})+\eta,$$

où η est l'aire de la surface décrite sur la sphère unitaire de centre O par les rayons vecteurs de la portion de surface de révolution qui est formée par la rotation de l'arc LB.

Cependant l'aire de la surface décrite par les normales est égale à

$$Q^* = 2\pi(6-\sqrt{2})+\omega^*,$$

où ω^* désigne, comme précédemment, l'aire de la surface décrite par les normales après la rotation de l'arc BC. On a

$$P^*-Q^* = 2\pi(3\sqrt{2}-4)+\eta-\omega^*.$$

ω^* peut être suffisamment petit, pourvu que l'arc AB le soit aussi. En particulier il sera plus petit que $2\pi(3\sqrt{2}-4)+\eta$. Alors

$$P^*-Q^* > 0,$$

ou $P^* > Q^*$, ce qui est aussi en contradiction avec l'hypothèse.

Remarquons qu'on peut construire des exemples de surfaces fermées pour lesquelles la différence $P-Q$ est plus grande que M, où M est un nombre positif arbitrairement donné à l'avance.

Reçu par la Rédaction le 1. 3. 1958