donc du théorème de J. Schauder qu'il existe au moins un point invariant de l'opération (17), c'est-à-dire au moins une solution de l'équation (5) et de même une solution de l'équation (1) satisfaisant aux conditions (3).

### Travaux cités

[1] M. Krzyżański, *Równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu I*, Warszawa 1957.

[2] W. Pogorzelski, *Teoria promieniowania i kwantów energii*, Państwowy Instytut Meteorologiczny (1924), p. 1-20.

[3] — *Les propriétés d'une fonction de Green et ses applications aux équations elliptiques*, Ann. Polon. Math. 3 (1956), p. 46-75.

[4] — *Równania całkowe i ich zastosowania I*, Warszawa 1953.

[5] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math. 2 (1930), p. 171-180.

*Reçu par la Rédaction le 24. 8. 1957*

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1959)

# Sur la résolution du problème aux dérivées tangentielles pour l'équation parabolique par la méthode des approximations successives

par W. Pogorzelski (Warszawa)

**1. Introduction.** Soit l'équation aux dérivées partielles du type parabolique quasilinéaire de la forme

$$(1)\quad \hat{\Psi}(u) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(A,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c(A,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = F\left(A,t,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

dans l'espace euclidien des points $(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$.

Dans le travail [4] nous avons posé et résolu pour l'équation (1) un problème aux limites aux dérivées tangentielles par la méthode topologique du point invariant de J. Schauder. Nous résoudrons maintenant ce problème par la méthode des approximations successives.

Cette méthode est basée sur des hypothèses moins générales que la méthode topologique, mais elle présente l'avantage de fournir le procédé qui permet de calculer la solution et n'exige pas que l'on admette $G(p, 0, u_0, u_1, \ldots, u_q) = 0$ comme dans le travail [4].

Nous admettons pour les coefficients réels de l'équation (1) les mêmes hypothèses que dans les travaux [1], [2], [3], [4], c'est-à-dire que ces coefficients sont des fonctions déterminées dans le domaine fermé

$$(2)\quad A(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega + S, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

et vérifient les conditions de Hölder

$$(3)\quad |a_{\alpha\beta}(A,t) - a_{\alpha\beta}(A_1,t_1)| < \text{const}\cdot[r_{AA_1}^h + |t-t_1|^{h'}] \quad (0 < h, h' \leqslant 1),$$

$$(4)\quad \begin{aligned} |b_\alpha(A,t) - b_\alpha(A_1,t)| &< \text{const}\cdot r_{AA_1}^h \\ |c(A,t) - c(A_1,t)| &< \text{const}\cdot r_{AA_1}^h; \end{aligned} \qquad (0 < h \leqslant 1)$$

en outre, les coefficients $b_\alpha$ et $c$ sont continus par rapport à la variable $t$. $\Omega$ désigne un domaine borné dans l'espace euclidien à $n$ dimensions ($n \geqslant 2$), limité par la surface fermée $S$, $r_{AA_1}$ désigne la distance euclidienne entre deux points $A$ et $A_1$.

On suppose de plus que la forme quadratique

$$(5) \qquad \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A,t) X_\alpha X_\beta$$

est définie-positive dans le domaine fermé (2) et que la surface fermée $S$ vérifie la condition de Liapounoff (voir [3]).

Quant à la fonction réelle $F(A,t,u_0,u_1,\ldots,u_n)$, figurant au second membre de l'équation (1), on admet qu'elle est définie et continue dans le domaine fermé

$$(6) \qquad A \in \Omega+S, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad |u_\alpha| \leqslant R \quad (\alpha = 0,1,\ldots,n)$$

et qu'elle vérifie la condition de Hölder-Lipschitz de la forme

$$(7) \qquad |F(A,t,u_0,u_1,\ldots,u_n)-F(A',t,u_0',u_1',\ldots,u_n')| < \mathrm{const}\cdot\Big[r_{AA_1}^{h_F}+\sum_{\alpha=0}^{n}|u_\alpha-u_\alpha'|\Big].$$

Pour énoncer le problème aux dérivées tangentielles, supposons donnés $q$ champs de directions des tangentes

$$(8) \qquad \{s_P^{(1)}\}, \{s_P^{(2)}\}, \ldots, \{s_P^{(q)}\} \quad (1 \leqslant q \leqslant n-1)$$

définies sur la surface $S$, qui font correspondre à tout point $P$ de cette surface les directions déterminées $s_P^{(1)}, s_P^{(2)}, \ldots, s_P^{(q)}$ des tangentes en ce point à la surface $S$. Nous supposons que l'angle entre deux directions du même champ, correspondant à deux points arbitraires $P$ et $Q$ de la surface $S$, vérifie l'inégalité

$$(9) \qquad (s_P^{(\alpha)}, s_Q^{(\alpha)}) < \mathrm{const}\cdot r_{PQ}^{h_s} \quad (\alpha = 1,2,\ldots,q)$$

$h_s$ étant une constante positive non supérieure à l'unité.

Notre problème aux limites consiste à déterminer une fonction $u(A,t)$ qui: 1. vérifie l'équation (1) en tout point intérieur $(A,t)$ du domaine (2) et est continue dans l'ensemble ($A \in \Omega+S$, $0 < t \leqslant T$), 2. vérifie la condition limite

$$(10) \qquad \frac{du}{dT_P}+g(P,t)u(P,t) = G\big[P,t,u(P,t),u_{s_P^{(1)}}(P,t),\ldots,u_{s_P^{(q)}}(P,t)\big]$$



en tout point $P$ de la surface $S$ pour $t > 0$, 3. vérifie la condition initiale

$$(11) \qquad \lim_{t\to 0} u(A,t) = 0$$

en tout point intérieur $A \in \Omega$.

Nous avons désigné par

$$(12) \qquad u_{s_P^{(\alpha)}}(P,t) = \lim_{A\to P}\frac{d}{ds_P^{(\alpha)}}[u(A,t)] \quad (\alpha = 1,2,\ldots,q)$$

la limite vers laquelle tend la dérivée de la fonction $u(A,t)$ au point intérieur $A$ dans la direction de la tangente $s_P^{(\alpha)}$ au point $P \in S$, si le point intérieur $A$ tend d'une façon arbitraire vers le point $P$. Ensuite nous avons désigné par

$$(13) \qquad \frac{du}{dT_P} = \lim_{A\to P}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A,t)\cos(N_P, x_\beta)\frac{\partial u(A,t)}{\partial x_\alpha}$$

la limite de la dérivée transversale. $G(P,t,u_0,u_1,\ldots,u_q)$ et $g(P,t)$ sont des fonctions réelles continues, définies soit dans la région

$$(14') \qquad P \in S, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad |u_\alpha| \leqslant R \quad (\alpha = 0,1,\ldots,n),$$

soit dans la région

$$(14'') \qquad P \in S, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

La fonction $g(P,t)$ vérifie la condition de Hölder par rapport à la variable $P$ avec l'exposant $h_g$.

Nous verrons que le problème posé conduit à la résolution d'un système d'équations intégrales à forte singularité. L'application de la méthode des approximations successives à ce système d'équations exige des considérations plus délicates que pour le système classique d'équations intégrales à faible singularité. Dans ce but, nous supposons que la fonction continue donnée $G(P,t,u_0,u_1,\ldots,u_q)$ *admet des dérivées continues par rapport aux variables numériques* $u_0,u_1,\ldots,u_q$, *qui vérifient la condition de Hölder-Lipschitz* et qu'elle vérifie la condition de Hölder par rapport à la variable $P$ avec l'exposant $h_G$; notamment on admet les inégalités

$$(15) \qquad |G(P,t,u_0,u_1,\ldots,u_q)-G(P_1,t,u_0',u_1',\ldots,u_q')| < k_G\Big[r_{PP_1}^{h_G}+\sum_{\nu=0}^{q}|u_\nu-u_\nu'|\Big],$$

$$(15') \qquad |G'_{u_\alpha}(P,t,u_0,u_1,\ldots,u_q)-G'_{u_\alpha}(P_1,t,u_0',u_1',\ldots,u_q')| < k_G'\Big[r_{PP_1}^{h_G}+\sum_{\nu=0}^{q}|u_\nu-u_\nu'|\Big] \quad (\alpha = 0,1,2,\ldots,q)$$

dans la région (14); $k_G$ et $k'_G$ sont des constantes positives, $h_G$ — une constante positive non supérieure à l'unité.

Nous avons emprunté l'hypothèse précédente à Gusejnoff [5] qui a appliqué, le premier la méthode des approximations successives aux équations intégrales à forte singularité. Cette méthode a été développée et approfondie par Przeworska-Rolewicz [6] pour les équations intégrales dans le plan de la variable complexe à l'aide des moyens de l'analyse fonctionnelle.

Signalons que l'hypothèse (15) est moins générale que dans notre travail [4], basé sur le théorème topologique de Schauder.

**2. Résolution du problème.** Nous cherchons la solution du problème sous la forme d'une somme (1)

$$(16)\quad u(A,t)=\int_0^t\iiint_{\Omega}\Gamma(A,t;B,\tau)F_1\left[B,t,u(B,\tau),\frac{\partial u}{\partial\xi_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial\xi_n}\right]dB\,d\tau+ \\ +\int_0^t\iint_S\Gamma(A,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau$$

d'un potentiel de charge spatiale et d'un potentiel de simple couche de densité inconnue $\varphi(Q,\tau)$. On a posé

$$(17)\quad F_1(B,\tau,u_0,u_1,\ldots,u_n) \\ =-(2\sqrt{\pi})^{-n}\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(B,\tau)|}\,F(B,\tau,u_0,u_1,\ldots,u_n)$$

où $a^{\alpha\beta}(B,\tau)$ désignent les éléments de la matrice inverse de la matrice $[a_{\alpha\beta}(B,\tau)]$. La fonction $\Gamma(A,t;B,\tau)$ est la solution fondamentale de l'équation (1), déterminée par les formules (6), (7), (8), (14) de notre travail [2]. D'après le même travail, la dérivée transversale de la seconde intégrale dans la formule (16) a la propriété limite

$$(18)\quad \lim_{A\to P}\frac{d}{dT_P}\int_0^t\iint_S\Gamma(A,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau \\ =-\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P,t)|}}\varphi(P,t)+\int_0^t\iint_S\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;Q,\tau)]\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau$$

$\varphi$ étant une fonction continue. La dérivée transversale de la solution fondamentale admet une limitation à singularités séparées *faibles* (voir [2], p. 75)

$$(19)\qquad \left|\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;Q,\tau)]\right|<\frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu}}\cdot\frac{1}{r_{PQ}^{n+1-2\mu-\varkappa_1}}.$$

(1) $dB$ désigne l'élément de volume au point $B\epsilon\Omega$ et $dQ$ — élément d'aire au point $Q\epsilon S$.



$\mu$ est une constante choisie arbitrairement à l'intérieur de l'intervalle $(1-\varkappa_1/2,1)$, où $\varkappa_1=\min(h,2h',\varkappa)$, $\varkappa$ désignant l'exposant dans les conditions de Liapounoff. L'intégrale du second membre de (18) est donc absolument convergente.

Si la fonction $\varphi(Q,\tau)$ vérifie la condition de Hölder par rapport à la variable $Q$, la dérivée tangentielle de l'intégrale de surface dans la formule (16) a, d'après le travail [3], la propriété limite suivante

$$(20)\quad \lim_{A\to P}\frac{d}{ds_P^{(\alpha)}}\int_0^t\iint_S\Gamma(A,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau \\ =\int_0^t\iint_S\Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau,$$

où la fonction sous le signe d'intégrale a une singularité forte, mais l'intégrale singulière (20) a un sens, notamment on a inégalité

$$\left|\iint_S\Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,dQ\right|<\frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu_1}}$$

où $1-\bar{h}_\varphi/2<\mu_1<1$, $\bar{h}_\varphi=\min(h_\varphi,h,\varkappa)$. Cette intégrale (20) n'est pas absolument convergente.

En demandant que la fonction (16) vérifie la condition limite (10), nous arrivons, d'après les propriétés citées, à l'équation intégrale singulière suivante

$$(21)\quad -\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P,t)|}}\varphi(P,t)+ \\ +\int_0^t\iint_S\left\{\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;Q,\tau)]+g(P,t,)\Gamma(P,t;Q,\tau)\right\}\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau+ \\ +\int_0^t\iiint_{\Omega}\left\{\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;B,\tau)]+g(P,t)\Gamma(P,t;B,\tau)\right\}\times \\ \times F_1\left[[B,\tau,u(B,\tau),\frac{\partial u}{\partial\xi_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial\xi_n}\right]dB\,d\tau \\ =G[P,t,u(P,t),u_{s_P^{(1)}}(P,t),\ldots,u_{s_P^{(q)}}(P,t)],$$

où l'on a posé

(22) $u_{s_P^{(\alpha)}}(P, t)$

$$= \int_0^t \iiint_\Omega \Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P, t; B, \tau) F_1\left[B, \tau, u(B, \tau), \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n}\right] dB d\tau +$$

$$+ \int_0^t \iint_S \Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P, t; Q, \tau) \varphi(Q, \tau) dQ d\tau \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, q).$$

Notre problème est donc ramené à la résolution du système d'équations intégro-différentielles non linéaires (16) et (21), à singularité forte, avec deux fonctions inconnues: l'une $u(A, t)$ dans la région $[\Omega, (0, T)]$, la seconde $\varphi(Q, \tau)$ dans la région $[S, (0, T)]$.

Pour résoudre le système d'équations (16) et (21), étudions le système suivant d'équations intégrales singulières

(23)

$$u_0(A, t) = \int_0^t \iiint_\Omega \Gamma(A, t; B, \tau) F_1[B, \tau, u_0(B, \tau), u_1(B, \tau), \ldots, u_n(B, \tau)] dB d\tau +$$

$$+ \int_0^t \iint_S \Gamma(A, t; Q, \tau) \varphi(Q, \tau) dQ d\tau,$$

$$u_\nu(A, t) = \int_0^t \iiint_\Omega \Gamma_{x_\nu}(A, t; B, \tau) F_1[B, \tau, u_0(B, \tau), u_1(B, \tau), \ldots, u_n(B, \tau)] dB d\tau +$$

$$+ \int_0^t \iint_S \Gamma_{x_\nu}(A, t; Q, \tau) \varphi(Q, \tau) dQ d\tau \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

(23′)

$$-\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P, t)|}} \varphi(P, t) +$$

$$+ \int_0^t \iint_S \left\{\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P, t; Q, \tau)] + g(P, t)\Gamma(P, t; Q, \tau)\right\} \varphi(Q, \tau) dQ d\tau +$$

$$+ \int_0^t \iiint_\Omega \left\{\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P, t; B, \tau)] + g(P, t)\Gamma(P, t; B, \tau)\right\} \times$$

$$\times F_1[B, \tau, u_0(B, \tau), \ldots, u_n(B, \tau)] dB d\tau$$

$$= G[P, t, u_0(P, t), \overline{u}_{s_P^{(1)}}(P, t), \ldots, \overline{u}_{s_P^{(q)}}(P, t)]$$

à $n+2$ fonctions inconnues $[u_0(A, t), u_1(A, t), \ldots, u_n(A, t), \varphi(P, t)]$.



On a posé

(24) $\overline{u}_{s_P^{(\alpha)}}(P, t)$

$$= \int_0^t \iiint_\Omega \Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P, t; B, \tau) F_1[B, \tau, u_0(B, \tau), \ldots, u_n(B, \tau)] dB d\tau +$$

$$+ \int_0^t \iint_S \Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P, t; Q, \tau) \varphi(Q, \tau) dQ d\tau \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, q).$$

Nous allons démontrer que le système (23) et (23′) est résoluble par la méthode des approximations successives si l'on admet l'hypothèse (15), (15′)

Considérons $n+2$ suites fonctionnelles

(25) $$\{u_0^{(m)}(A, t)\}, \{u_1^{(m)}(A, t)\}, \ldots, \{u_n^{(m)}(A, t)\}, \{\varphi^{(m)}(P, t)\}$$

déterminées par les relations de récurrence

(26)

$$u_0^{(m+1)}(A, t) = \int_0^t \iiint_\Omega \Gamma(A, t; B, \tau) F_1[B, \tau, u_0^{(m)}(B, \tau), \ldots, u_n^{(m)}(B, \tau)] dB d\tau +$$

$$+ \int_0^t \iint_S \Gamma(A, t; Q, \tau) \varphi^{(m)}(Q, \tau) d\tau,$$

$$u_\nu^{(m+1)}(A, t) = \int_0^t \iiint_\Omega \Gamma_{x_\nu}(A, t; B, \tau) F_1[B, \tau, u_0^{(m)}(B, \tau), \ldots, u_n^{(m)}(B, \tau)] dB d\tau +$$

$$+ \int_0^t \iint_S \Gamma_{x_\nu}(A, t; Q, \tau) \varphi^{(m)}(Q, \tau) dQ d\tau,$$

(26′)

$$-\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P, t)|}} \varphi^{(m+1)}(P, t) +$$

$$+ \int_0^t \iint_S \left\{\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P, t; Q, \tau)] + g(P, t)\Gamma(P, t; Q, \tau)\right\} \varphi^{(m+1)}(Q, \tau) dQ d\tau +$$

$$+ \int_0^t \iiint_\Omega \left\{\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P, t; B, \tau)] + g(P, t)\Gamma(P, t; B, \tau)\right\} \times$$

$$\times F_1[B, \tau, u_0^{(m)}(B, \tau), \ldots, u_n^{(m)}(B, \tau)] dB d\tau$$

$$= G[P, t, u_0^{(m)}(P, t), \overline{u}^{(m)}_{s_P^{(1)}}(P, t), \ldots, \overline{u}^{(m)}_{s_P^{(q)}}(P, t)],$$

où l'on a posé

$$\overline{u}^{(m)}_{s_P^{(\alpha)}}(P,t) \tag{27}$$
$$= \int_0^t \iiint_\Omega \Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P,t;B,\tau)F_1[B,t,u_0^{(m)}(B,\tau),\ldots,u_n^{(m)}(B,\tau)]\,dB\,d\tau +$$
$$+\int_0^t \iint_S \Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P,t;Q,\tau)\varphi^{(m)}(Q,\tau)\,dQ\,d\tau .$$

Les premiers éléments

$$u_0^{(0)}(A,t),\ u_1^{(0)}(A,t),\ \ldots,\ u_n^{(0)}(A,t),\ \varphi^{(0)}(P,t) \tag{28}$$

des suites (25) sont des fonctions continues, arbitrairement choisies parmi les fonctions vérifiant les conditions

$$\begin{aligned} &|u_\nu^{(0)}(A,t)| \leqslant R, \\ &|u_\nu^{(0)}(A,t)-u_\nu^{(0)}(A_1,t)| \leqslant \text{const}\cdot r_{AA_1}^{h_\varphi}, \qquad (\nu=0,1,\ldots,n) \\ &|\varphi^{(0)}(P,t)| \leqslant \varrho, \\ &|\varphi^{(0)}(P,t)-\varphi^{(0)}(P_1,t)| \leqslant k_\varphi r_{PP_1}^{h_\varphi}, \end{aligned} \tag{29}$$

$\varrho$ et $k_\varphi$ étant des constantes fixées arbitrairement, $h_\varphi$ est une constante positive aussi fixée arbitrairement, mais sous la condition que les inégalités suivantes soient vérifiées:

$$0 < h_\varphi \begin{cases} < \min(h_G, h_g) \leqslant 1, \\ < h_s \leqslant 1, \\ < \varkappa_1 = \min(h, 2h', \varkappa). \end{cases} \tag{30}$$

Nous allons chercher les conditions d'existence des suites (25) et de leur convergence.

Supposons que l'approximation $m$-ième vérifie les inégalités de la forme

$$\begin{aligned} &|u_\nu^{(m)}(A,t)| \leqslant R \qquad (\nu=0,1,\ldots,n), \\ &|\varphi^{(m)}(P,t)| \leqslant \varrho, \\ &|\varphi^{(m)}(P,t)-\varphi^{(m)}(P_1,t)| \leqslant k_\varphi r_{PP_1}^{h_\varphi}, \end{aligned} \tag{31}$$

$u_\nu^{(m)}(A,t)$ étant continues dans la région $[\Omega+S; 0<t\leqslant T]$, et cherchons les inégalités pour l'approximation suivante.



Nous analyserons d'abord les relations (26), en nous appuyant sur les limitations

$$\begin{aligned} &|\Gamma(A,t;B,\tau)| < \frac{\text{const}}{(t-\tau)^\mu}\cdot\frac{1}{r_{AB}^{n-2\mu}}, \\ &|\Gamma_{x_\nu}(A,t;B,\tau)| < \frac{\text{const}}{(t-\tau)^\mu}\cdot\frac{1}{r_{AB}^{n+1-2\mu}} \end{aligned} \tag{32}$$

et sur la décomposition

$$\int_0^t \iint_S \Gamma_{x_\nu}(A,t;Q,\tau)\varphi^{(m)}(Q,\tau)\,dQ\,d\tau \tag{33}$$
$$= \int_0^t \varphi^{(m)}(P,\tau)\Big[\iint_S \Gamma_{x_\nu}(A,t;Q,\tau)\,dQ\Big]d\tau +$$
$$+\int_0^t \iint_S \Gamma_{x_\nu}(A,t;Q,\tau)[\varphi^{(m)}(Q,\tau)-\varphi^{(m)}(P,\tau)]\,dQ\,d\tau,$$

$P$ étant le point de la surface $S$ le plus rapproché du pointi ntérieur $A\in\Omega$. Nous en concluons, d'après nos travaux [2] et [3], que les fonctions (26) sont déterminées avec leurs limites, si $A\to P$, et qu'elles vérifient les inégalités

$$\begin{aligned} &|u_0^{(m+1)}(A,t)| < c_1 T^{1-\mu}\sup|F| + c_2 T^{1-\mu}\varrho, \\ &|u_\nu^{(m+1)}(A,t)| < c_1' T^{1-\mu}\sup|F| + c_2'\varrho + c_3' T^{1-\mu}k_\varphi \qquad (\nu=1,2,\ldots,n), \end{aligned} \tag{34}$$

$\mu$ étant fixé à l'intérieur de l'intervalle $(1-h_\varphi/2, 1)$, $c_1, c_2, c_1', c_2', c_3'$ sont des constantes positives, indépendantes des fonctions $F$, $\varphi^{(m)}$ et de $T$.

D'après les théorèmes 2 et 3 du travail [2], la fonction $u_0^{(m+1)}$ vérifie la condition de Hölder de la forme

$$|u_0^{(m+1)}(A,t)-u_0^{(m+1)}(A_1,t_1)| < (\bar{c}_1\sup|F|+\bar{c}_2\varrho)[r_{AA_1}^{\theta}+|t-t_1|^{\theta'/2}], \tag{35}$$

$\bar{c}_1$ et $\bar{c}_2$ étant des constantes positives indépendantes des fonctions $F$ et $\varphi^{(m)}$, $\theta$ et $\theta'$ sont deux constantes positives arbitraires inférieures à l'unité.

En outre nous pouvons affirmer que les fonctions $u_\nu^{(m+1)}(A,t)$ sont continues et bornées à l'intérieur de la région $\Omega$, si $0\leqslant t\leqslant T$ et continues et bornées dans $\Omega+S$, si $0<t\leqslant T$, en admettant les limites de ces fonctions, pour $A\to P$, comme leurs valeurs à la surface $S$ même (pour $t>0$).

Remarquons encore qu'on peut fixer les constantes $\bar{c}_1\geqslant c_1'$, $\bar{c}_2\geqslant c_2'$, $\bar{c}_3\geqslant c_3'$ de telle façon que les inégalités de la forme (34) soient vérifiées par les fonctions (27)

$$|\overline{u}^{(m)}_{s_P^{(\alpha)}}(P,t)| < \bar{c}_1 T^{1-\mu}\sup|F| + \bar{c}_2\varrho + \bar{c}_3 T^{1-\mu}k_\varphi . \tag{36}$$

Passons maintenant à l'analyse de la relation (26'). Tout d'abord nous voyons, d'après (36), que le second membre $G$ aura un sens déterminé et sera continu, si les constantes positives arbitraires $\varrho$ et $k_\varphi$ vérifient les inégalités

$$(37)\qquad \begin{aligned} &c_1 T^{1-\mu}\sup|F| + c_2 T^{1-\mu}\varrho \leqslant R,\\ &\bar{c}_1 T^{1-\mu}\sup|F| + \bar{c}_2\varrho + \bar{c}_3 T^{1-\mu}k_\varphi \leqslant R. \end{aligned}$$

D'après le théorème 2 de notre travail [3] et les inégalités (30), (35), le second membre de la relation (26') vérifie l'inégalité de Hölder de la forme

$$(38)\qquad \begin{aligned} &|G[P, t, u_0^{(m)}(P, t), \overline{u}^{(m)}_{s_{(1)}P}, \ldots, \overline{u}^{(m)}_{s_{(q)}P}(P, t)] -\\ &\quad - G[P_1, t, u_0^{(m)}(P_1, t), \overline{u}^{(m)}_{s_{(1)}P}(P_1, t), \ldots, \overline{u}^{(m)}_{s_{(q)}P}(P_1, t)]|\\ &\leqslant k_G[r_{PP_1}^{h_G} + (\bar{c}_1 M_F + \bar{c}_2\varrho)^{h_G} r_{PP_1}^{\theta h_G} + \bar{c}_1'' M_F r_{PP_1}^{\theta h_3} + q(C_1\varrho + C_2 k_\varphi) r_{PP_1}^{h_\varphi}]\\ &\leqslant k_G[a_1 + a_2(M_F+\varrho)^{h_G} + a_3 M_F + a_4\varrho + a_5 k_\varphi] r_{PP_1}^{h_\varphi}, \end{aligned}$$

où $M_F = \sup|F|$, $k_G$ désigne le coefficient de Hölder pour la fonction $G$ et $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ sont des constantes positives, indépendantes des fonctions $F, G$.

La relation (26') définit la fonction $\varphi^{(m+1)}(P, t)$ comme une solution de l'équation de Volterra de la forme

$$(39)\qquad \begin{aligned} &-\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P, t)|}}\varphi^{(m+1)}(P, t) +\\ &+\int_0^t\iint_S\Big\{\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P, t; Q, \tau)] + g(P, t)\Gamma(P, t; Q, \tau)\Big\}\varphi^{(m+1)}(Q, \tau)\,dQ\,d\tau\\ &\qquad = f(P, t) \end{aligned}$$

où $f(P, t)$ est une fonction continue déterminée.

D'après la limitation (19), l'équation (39) admet une solution unique déterminée par la formule

$$(40)\qquad \begin{aligned} \varphi^{(m+1)}(P, t) &= -\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P, t)|}} f(P, t) -\\ &\quad - 2(2\sqrt{\pi})^{-n}\int_0^t\iint_S \mathfrak{N}(P, t; Q, \tau)\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(Q, \tau)|}\, f(Q, \tau)\,dQ\,d\tau, \end{aligned}$$

où $\mathfrak{N}$ désigne le noyau résolvant du noyau de l'équation (39). La fonction $\varphi^{(m+1)}$ vérifie donc l'inégalité

$$(41)\qquad |\varphi^{(m+1)}(P, t)| < (1+K_{\mathfrak{N}})K_a \sup|f(P, t)|,$$



où $K_{\mathfrak{N}}$ et $K_a$ désignent les bornes supérieures des fonctions

$$(42)\qquad \begin{aligned} K_{\mathfrak{N}} &= \sup\Big[\int_0^t\iint_S|\mathfrak{N}(P, t; Q, \tau)|\,dQ\,d\tau\Big],\\ K_a &= \sup[2(2\sqrt{\pi})^{-n}\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(A, t)|}]. \end{aligned}$$

En tenant compte de la limitation

$$(42')\qquad \left|\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P, t; B, \tau)] + g(P, t)\Gamma(P, t; B, \tau)\right| < \frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^\mu}\cdot\frac{1}{r_{PB}^{n+1-2\mu}}$$

nous en concluons que la solution de l'équation (26') vérifie l'inégalité

$$(43)\qquad |\varphi^{(m+1)}(P, t)| < (1+K_{\mathfrak{N}})K_a\Big[\frac{C\bar{C}}{1-\mu}T^{1-\mu}M_F + \sup|G|\Big],$$

où

$$\bar{C} = \sup\Big[\iiint_\Omega\frac{dB}{r_{PB}^{n+1-2\mu}}\Big].$$

Cherchons la condition de Hölder pour la fonction $\varphi^{(m+1)}$. Dans ce but remarquons, en nous appuyant sur la continuité évidente de la fonction $\varphi^{(m+1)}$ et sur les théorèmes 2 et 4 de notre travail [2], que la première des intégrales du premier membre de l'équation (26'), $I_1(P, t)$, vérifie l'inégalité de Hölder

$$(44)\qquad |I_1(P, t) - I_1(P_1, t)| < \mathrm{const}\cdot\sup|\varphi^{(m+1)}|\, r_{PP_1}^{h_\varphi}$$

(en tenant compte des inégalités (30)) et la seconde $I_2(P, t)$ vérifie, d'après le théorème 5 du travail [3], l'inégalité de la même forme:

$$(44')\qquad |I_2(P, t) - I_2(P_1, t)| < \mathrm{const}\cdot\sup|\varphi^{(m+1)}|\, r_{PP_1}^{h_\varphi}.$$

Nous avons vu que le second membre de l'équation (26') vérifie la condition de Hölder (38) aussi avec l'exposant $h_\varphi$; nous en concluons que la solution $\varphi^{(m+1)}$ de l'équation (26') vérifie la condition de Hölder de la forme

$$(45)\qquad \begin{aligned} &|\varphi^{(m+1)}(P, t) - \varphi^{(m+1)}(P_1, t)|\\ &\quad < \{D_1\sup|\varphi^{(m+1)}| + D_2 k_G[a_1 + a_2(M_F+\varrho)^{h_G} + a_3 M_F + a_4\varrho + a_5 k_\varphi]\} r_{PP_1}^{h_\varphi}, \end{aligned}$$

$D_1$ et $D_2$ étant des constantes positives, indépendantes des fonctions $F$ et $G$.

En rapprochant les inégalités obtenues (34), (43) et (45), nous pouvons affirmer que les fonctions $u^{(m+1)}(A,t)$ et $\varphi^{(m+1)}(P,t)$ vérifieront les inégalités

$$(46)\qquad \begin{aligned} &|u_\nu^{(m+1)}(A,t)| \leqslant R \qquad (\nu = 0,1,2,\ldots,n),\\ &|\varphi^{(m+1)}(P,t)| \leqslant \varrho,\\ &|\varphi^{(m+1)}(P,t) - \varphi^{(m+1)}(P_1,t)| \leqslant k_\varphi r_{PP_1}^{h_\varphi}\end{aligned}$$

de la même forme que (31), si les constantes du problème vérifient les conditions suivantes:

$$(47)\qquad \begin{aligned} c_1 T^{1-\mu} M_F + c_2 T^{1-\mu}\varrho &\leqslant R,\\ \bar c_1' T^{1-\mu} M_F + \bar c_2'\varrho + \bar c_3' T^{1-\mu} k_\varphi &\leqslant R,\\ (1+K_{\mathfrak{N}})K_a\left(\frac{C\bar C}{1-\mu} T^{1-\mu} M_F + \sup|G|\right) &\leqslant \varrho,\\ D_1\varrho + D_2 k_G[a_1 + a_2(M_F+\varrho)^{h_G} + a_3 M_F + a_4\varrho + a_5 k_\varphi] &\leqslant k_\varphi.\end{aligned}$$

Nous en concluons, par induction, que si les fonctions initiales des suites (25) vérifient les conditions (29) et si les constantes du problème vérifient les inégalités (47), alors les suites (25) existent et vérifient les inégalités (31) quel que soit $m$.

Le choix des constantes positives $\varrho$ et $k_\varphi$ étant arbitraire, les conditions (47) seront toujours satisfaites, si les constantes du problème $M_F$, $k_G$, $\sup|G|$ et $T$ sont suffisamment petites.

Nous démontrerons maintenant la convergence uniforme des suites (25). Dans ce but il suffit de démontrer la convergence absolue et uniforme des séries fonctionnelles

$$(48)\qquad \begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty}[u_\nu^{(m+1)}(A,t) - u_\nu^{(m)}(A,t)] \qquad (\nu = 0,1,2,\ldots,n),\\ &\sum_{m=0}^{\infty}[\varphi^{(m+1)}(P,t) - \varphi^{(m)}(P,t)].\end{aligned}$$

Nous signalons comme point essentiel que les considérations actuelles exigent de plus la mise en jeu de la série des coefficients de Hölder pour les différences $\varphi^{(m+1)} - \varphi^{(m)}$.

D'après les relations de récurrence (26) nous aurons en nous appuyant sur les inégalités (7) et (32), les inégalités suivantes pour les différences des fonctions $u_\nu^{(m)}$:

$$(49)\qquad |u_0^{(m+1)}(A,t) - u_0^{(m)}(A,t)|$$
$$\leqslant \int_0^t \iiint_\Omega \frac{\mathrm{const}\cdot k_F \sum_{\alpha=0}^{n}|u_\alpha^{(m)} - u_\alpha^{(m-1)}|}{(t-\tau)^\mu r_{AB}^{n-2\mu}}\,dB\,d\tau + \int_0^t \iint_S \frac{\mathrm{const}\cdot|\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}|}{(t-\tau)^\mu r_{AQ}^{n-2\mu}}\,dQ\,d\tau,$$



$$(49')\qquad |u_\nu^{(m+1)}(A,t) - u_\nu^{(m)}(A,t)|$$
$$\leqslant \int_0^t \iiint_\Omega \frac{\mathrm{const}\cdot k_F \sum_{\alpha=0}^{n}|u_\alpha^{(m)} - u_\alpha^{(m-1)}|}{(t-\tau)^\mu r_{AB}^{n+1-2\mu}}\,dB\,d\tau +$$
$$+ \int_0^t |\varphi^{(m)}(P,\tau) - \varphi^{(m-1)}(P,\tau)|\left|\iint_S \Gamma_{x_\nu}(A,t;Q,\tau)\,dQ\right|d\tau +$$
$$+ H[\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}]\int_0^t \frac{\mathrm{const}\cdot d\tau}{(t-\tau)^\mu}\iint_S \frac{r_{PQ}^{h_\varphi}\,dQ}{r_{AQ}^{n+1-2\varphi}}$$
$$(\nu = 1,2,\ldots,n;\ 1-h_\varphi/2 < \mu < 1),$$

où $H[\psi(P,t)]$ désigne le plus petit des coefficients de Hölder de la fonction $\psi$, c'est-à-dire la borne supérieure suivante

$$(50)\qquad H[\psi(P,t)] = \sup\frac{|\psi(P,t) - \psi(P_1,t)|}{r_{PP_1}^{h_\varphi}}$$

si $P, P_1 \in S$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

D'après (49) et (49'), nous concluons que les différences des fonctions $u^{(m)}$ vérifient, quel que soit $m$, les inégalités suivantes

$$(51)\qquad |u_0^{(m+1)}(A,t) - u_0^{(m)}(A,t)|$$
$$\leqslant b_0 t^{1-\mu} k_F \sum_{\alpha=0}^{n}\sup|u_\alpha^{(m)} - u_\alpha^{(m-1)}| + b_0' t^{1-\mu}\sup|\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}|,$$

$$(51')\qquad |u_\nu^{(m+1)}(A,t) - u_\nu^{(m)}(A,t)|$$
$$\leqslant b_1 t^{1-\mu} k_F \sum_{\alpha=0}^{n}\sup|u_\alpha^{(m)} - u_\alpha^{(m-1)}| + b_2 t^{1-\mu}\sup|\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}| +$$
$$+ b_3 t^{1-\mu} H[\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}] \qquad (\nu = 1,2,\ldots,n),$$

où $b_0, b_0', b_1, b_2, b_3$ sont des constantes positives déterminées, ne dépendant que de la surface $S$ et des coefficients de l'équation (1).

Passons à l'étude plus difficile des différences $\varphi^{(m)}(P,t) - \varphi^{(m-1)}(P,t)$. Dans ce but nous démontrerons d'abord les lemmes suivants.

Lemme 1. *Si la fonction donnée $G$ vérifie les conditions* (15) *et* (15'), *la différence $\Delta G$ s'exprime par une somme de produits*:

$$(51'')\qquad \begin{aligned}\Delta G &= G(P,t,\bar\xi_0,\bar\xi_1,\ldots,\bar\xi_q) - G(P,t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_q)\\ &= \sum_{\nu=0}^{q} f_\nu(P,t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_\nu,\bar\xi_\nu,\ldots,\bar\xi_q)(\bar\xi_\nu - \xi_\nu),\end{aligned}$$

*où les fonctions $f_\nu$ des arguments $(P, t, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\nu, \bar{\xi}_\nu, \ldots, \bar{\xi}_q)$ vérifient les conditions de Hölder-Lipschitz suivantes*

(52)
$$|f_\nu(P', t, \xi_0', \xi_1', \ldots, \xi_\nu', \bar{\xi}_\nu', \ldots, \bar{\xi}_q') - f_\nu(P'', t, \xi_0'', \xi_1'', \ldots, \xi_\nu'', \bar{\xi}_\nu'', \ldots, \bar{\xi}_q'')|$$
$$< k_G'\Big[r_{P'P''}^{h_G} + \sum_{\alpha=0}^{\nu} |\xi_\alpha' - \xi_\alpha''| + \sum_{\alpha=0}^{q} |\bar{\xi}_\alpha' - \bar{\xi}_\alpha''|\Big].$$

Démonstration. On suppose que $P \epsilon S$, $0 \leqslant t \leqslant T$ et que les variables numériques réelles $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_q, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_q$ ont des valeurs choisies arbitrairement dans l'intervalle fermé $(-R, +R)$. En décomposant la différence (51) en une somme de $q$ différences partielles et en appliquant la représentation intégrale évidente, nous aurons

(53) $\Delta G$
$$= \sum_{\nu=0}^{q} \big[G(P, t, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{\nu-1}, \bar{\xi}_\nu, \ldots, \bar{\xi}_q) - G(P, t, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\nu, \bar{\xi}_{\nu+1}, \ldots, \bar{\xi}_q)\big]$$
$$= \sum_{\nu=0}^{q} f_\nu(P, t, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\nu, \bar{\xi}_\nu, \ldots, \bar{\xi}_q)(\bar{\xi}_\nu - \xi_\nu)$$

où les fonctions $f_\nu$ sont déterminées par les formules

(54)
$$f_\nu(P, t, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\nu, \bar{\xi}_\nu, \ldots, \bar{\xi}_q)$$
$$= \int_0^1 G_{\xi_\nu}'[P, t, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{\nu-1}, \xi_\nu + s(\bar{\xi}_\nu - \xi_\nu), \bar{\xi}_{\nu+1}, \ldots, \bar{\xi}_q]\, ds$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots, q).$$

Les formules précédentes, ainsi que les propriétés admises (15′), entraînent immédiatement la conclusion (52) de notre lemme; $P'$ et $P''$ sont deux points quelconques de la surface $S$ et $(\xi_\alpha', \xi_\alpha'')$, $(\bar{\xi}_\alpha', \bar{\xi}_\alpha'')$ des couples de valeurs arbitraires dans l'intervalle $(-R, +R)$.

LEMME 2. *La différence des valeurs du second membre de la relation* (26′), *correspondant aux indices $m$ et $m-1$:*

(55)
$$\delta_m(P, t) = G[P, t, u_0^{(m)}(P, t), \bar{u}_{s_P^{(1)}}^{(m)}(P, t), \ldots, \bar{u}_{s_P^{(q)}}^{(m)}(P, t)] -$$
$$- G[P, t, u_0^{(m-1)}(P, t), \bar{u}_{s_P^{(1)}}^{(m-1)}(P, t), \ldots, \bar{u}_{s_P^{(q)}}^{(m-1)}(P, t)]$$

*vérifie l'inégalité suivante*

(56)
$$|\delta_m(P, t)| \leqslant k_G \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}| + k_F k_G g_1 t^{1-\mu} \sum_{\alpha=0}^{n} \sup |u_\alpha^{(m)} - u_\alpha^{(m-1)}| +$$
$$+ k_G g_2 t^{1-\mu} \sup |\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}| + k_G g_3 t^{1-\mu} H[\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}],$$

*où $g_1, g_2, g_3$ sont des constantes positives, ne dépendant pas des fonctions $F$ et $G$.*

Démonstration. La conclusion (56) résulte de l'inégalité admise (15), des relations de récurrence (26), (26′), (27), de la décomposition (33) et des limitations (32). Nous aurons en effet

$$|\delta_m(P, t)|$$
$$\leqslant k_G \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}| + k_F k_G \int_0^t \frac{\mathrm{const} \cdot d\tau}{(t-\tau)^\mu} \iiint_\Omega \frac{\sum_{\alpha=0}^{n} |u_\alpha^{(m)} - u_\alpha^{(m-1)}|\, dB}{r_{PB}^{n+1-2}} +$$
$$+ k_G \sum_{\alpha=1}^{q} \int_0^t |\varphi^{(m)}(P, \tau) - \varphi^{(m-1)}(P, \tau)| \Big|\iint_S \Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P, t; Q, \tau)\, dQ\Big|\, d\tau +$$
$$+ k_G H[\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}] \int_0^t \frac{\mathrm{const} \cdot d\tau}{(t-\tau)^\mu} \iint_S \frac{dQ}{r_{PQ}^{n+1-2\mu-h_\varphi}} \qquad (1 - h_\varphi/2 < \mu < 1),$$

d'où nous arrivons à l'inégalité (56).

LEMME 3. *Le coefficient de Hölder $H$, au sens de la formule* (50), *pour la différence* (55) *vérifie l'inégalité suivante*

(57) $H[\delta_m(P, t)]$
$$\leqslant [k_F k_G' T^{1-\mu}(s_1 + s_2 M_F + s_3 \varrho + s_4 k_\varphi) + (l_1 k_F + l_1') k_G] \sum_{\alpha=0}^{n} \sup |u_\alpha^{(m)} - u_\alpha^{(m-1)}| +$$
$$+ [k_G' T^{1-\mu}(s_1 + s_2 M_F + s_3 \varrho + s_4 k_\varphi) + l_2 k_G] \sup |\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}| +$$
$$+ [s_3' T^{1-\mu} k_G'(s_1 + s_2 M_F + s_3 \varrho + s_4 k_\varphi) + s_3'' k_G] H[\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}],$$

*$s_1, s_2, s_3, s_4, s_3', s_3'', l_1, l_1', l_2$ sont des constantes.*

Démonstration. La démonstration de ce lemme sera basée sur le lemme 1. Notamment nous substituons

(58)
$$\bar{\xi}_0 = u_0^{(m)}(P, t), \qquad \bar{\xi}_\nu = \bar{u}_{s_P^{(\nu)}}^{(m)}(P, t),$$
$$\xi_0 = u_0^{(m-1)}(P, t), \qquad \xi_\nu = u_{s_P^{(\nu)}}^{(m-1)}(P, t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, q)$$

et nous aurons, d'après la décomposition (53),

(59)
$$\delta_m(P', t) - \delta_m(P'', t) = \sum_{\nu=0}^{q} [(f_\nu)' - (f_\nu)''][\bar{u}_\nu^{(m)}(P', t) - \bar{u}_\nu^{(m-1)}(P', t)] +$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{q} (f_\nu)'' \big[(\bar{u}_\nu^{(m)}(P', t) - \bar{u}_\nu^{(m-1)}(P'', t)) - (\bar{u}_\nu^{(m)}(P'', t) - \bar{u}_\nu^{(m-1)}(P'', t))\big],$$

où l'on a posé pour abréger

$$\overline{u}^{(m)}_{s^{(\nu)}_P} = \overline{u}^{(m)}_\nu, \qquad \overline{u}^{(m-1)}_{s^{(\nu)}_P} = \overline{u}^{(m-1)}_\nu, \qquad u^{(m)}_0 = \overline{u}^{(m)}_0,$$

$P'$ et $P''$ désignent deux points arbitraires de la surface $S$; $(f_\nu)'$ et $(f_\nu)''$ sont les valeurs des fonctions (54) aux points $P'$ et $P''$, après y avoir substitué les expressions (58). En nous appuyant sur la décomposition (59), nous pouvons écrire l'inégalité

$$(60)\quad H[\delta_m(P,t)] \leqslant \sum_{\nu=0}^{q} H[f_\nu]\sup|\overline{u}^{(m)}_\nu - \overline{u}^{(m-1)}_\nu| + k_G \sum_{\nu=0}^{q} H[\overline{u}^{(m)}_\nu - \overline{u}^{(m-1)}_\nu].$$

Vu la propriété (52), nous avons

$$H[f_\nu] \leqslant k'_G \sup\Big[r^{h_G-h_\varphi}_{P'P''} + r^{-h_\varphi}_{P'P''} \sum_{\alpha=\nu}^{q} |\overline{u}^{(m)}_\alpha(P',t) - \overline{u}^{(m)}_\alpha(P'',t)| + \\ + r^{-h_\varphi}_{P'P''} \sum_{\alpha=0}^{\nu} |\overline{u}^{(m-1)}_\alpha(P',t) - \overline{u}^{(m-1)}_\alpha(P'',t)|\Big].$$

Mais, d'après nos travaux [2], [3], les fonctions $\overline{u}^{(m)}_\alpha$, données par les formules (27), vérifient la condition de Hölder avec l'exposant $h_\varphi$, le coefficient étant une combinaison linéaire des nombres $M_F$, $k_\varphi$, $\varrho$; par conséquent les coefficients $H[f_\nu]$ vérifient l'inégalité

$$(61)\qquad H[f_\nu] < k'_G(s_1 + s_2 M_F + s_3\varrho + s_4 k_\varphi),$$

$s_1$, $s_2$, $s_3$, $s_4$ étant des constantes positives.

Ensuite, d'après la formule (27), nous avons

$$(62)\quad |\overline{u}^{(m)}_\nu(P,t) - \overline{u}^{(m-1)}_\nu(P,t)| \\ = \int_0^t \iiint_\Omega \Gamma_{s^{(\nu)}_P}(P,t;B,\tau)\{F_1[B,\tau,u^{(m)}_0(B,\tau),\ldots,u^{(m)}_n(B,\tau)] - \\ - F_1[B,\tau,u^{(m-1)}_0(B,\tau),\ldots,u^{(m-1)}_n(B,\tau)]\}\,dB\,d\tau + \\ + \int_0^t \iint_S \Gamma_{s^{(\nu)}_P}(P,t;Q,\tau)[\varphi^{(m)}(Q,\tau) - \varphi^{(m-1)}(Q,\tau)]\,dQ\,d\tau$$

d'où, en appliquant les théorèmes 5, resp. 1 et 2 de nos travaux [2] et [3], nous aurons les limitations

$$(63)\quad \sup|\overline{u}^{(m)}_\nu - \overline{u}^{(m-1)}_\nu| \leqslant k_F s'_1 t^{1-\mu} \sum_{\alpha=0}^{n} \sup|u^{(m)}_\alpha - u^{(m-1)}_\alpha| + \\ + s'_2 t^{1-\mu}\sup|\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}| + s'_3 t^{1-\mu} H[\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}],$$



$$(64)\quad H[\overline{u}^{(m)}_\nu - \overline{u}^{(m-1)}_\nu] \leqslant k_F s''_1 t^{1-\mu} \sum_{\alpha=0}^{n} \sup|\overline{u}^{(m)}_\alpha - \overline{u}^{(m-1)}_\alpha| + \\ + s''_2 t^{1-\mu}\sup|\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}| + s''_3 H[\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}],$$

$s'_1$, $s'_2$, $s'_3$, $s''_1$, $s''_2$, $s''_3$ étant des constantes positives.

En rapprochant les inégalités (60), (61), (63), (64), nous arrivons à la conclusion (57) du lemme 3.

COROLLAIRE. *Les différences* $\varphi^{(m+1)} - \varphi^{(m)}$ *vérifient les inégalités suivantes*

$$(65)\quad |\varphi^{(m+1)}(P,t) - \varphi^{(m)}(P,t)| \leqslant k_G(1 + e_1 t^{1-\mu})\sup|u^{(m)}_0 - u^{(m-1)}_0| + \\ + k_F t^{1-\mu}(e_2 + e_3 k_G) \sum_{\alpha=0}^{n} \sup|u^{(m)}_\alpha - u^{(m-1)}_\alpha| + k_G g'_2 t^{1-\mu}\sup|\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}| + \\ + k_G g'_3 t^{1-\mu} H[\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}],$$

$$(66)\quad H[\varphi^{(m+1)} - \varphi^{(m)}] \leqslant e'_1 T^{1-\mu}\sup|\varphi^{(m+1)} - \varphi^{(m)}| + \\ + e'_2 T^{1-\mu} \sum_{\alpha=0}^{n} \sup|u^{(m)}_\alpha - u^{(m-1)}_\alpha| + e'_3\sup|\delta_m| + e'_4 H[\delta_m],$$

*où il faut remplacer* $\sup|\delta_m|$, $H[\delta_m]$ *et* $\sup|\varphi^{(m+1)} - \varphi^{(m)}|$ *par les premiers membres des inégalités* (56), (60) *et* (65); $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e'_1$, $e'_2$, $e'_3$, $e'_4$ *sont des constantes positives.*

On démontre les propriétés (65) et (66) en remarquant que la différence à étudier vérifie l'équation intégrale (voir (26'))

$$(67)\quad -\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P,t)|}}[\varphi^{(m+1)}(P,t) - \varphi^{(m)}(P,t)] + \\ + \int_0^t \iint_S \Big\{\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;Q,\tau)] + g(P,t)\Gamma(P,t;Q,\tau)\Big\} \times \\ \times [\varphi^{(m+1)}(Q,\tau) - \varphi^{(m)}(Q,\tau)]\,dQ\,d\tau + \\ + \int_0^t \iiint_\Omega \Big\{\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;B,\tau)] + g(P,t)\Gamma(P,t;B,\tau)\Big\} \times \\ \times \{F_1[B,\tau,u^{(m)}_0(B,\tau),\ldots,u^{(m)}_n(B,\tau)] - \\ - F_1[B,\tau,u^{(m-1)}_0(B,\tau),\ldots,u^{(m-1)}_n(B,\tau)]\}\,dB\,d\tau \\ = G[P,t,u^{(m)}_0(P,t),\overline{u}^{(m)}_1(P,t),\ldots,\overline{u}^{(m)}_q(P,t)] - \\ - G[P,t,u^{(m-1)}_0(P,t),\overline{u}^{(m-1)}_1,\ldots,\overline{u}^{(m-1)}_q(P,t)],$$

en appliquant les lemmes précédents et le théorème 4 de notre travail [2].

Les limitations obtenues (51), (51′), (65), (66) nous permettent de résoudre la question de la convergence des séries (48). Dans ce but, il suffit de démontrer la convergence de la série numérique

$$\sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \tag{68}$$

où

$$\theta_m = \sum_{\nu=0}^{n} \sup |u_\nu^{(m+1)}(A, t) - u_\nu^{(m)}(A, t)| + \tag{69}$$
$$+ \sup |\varphi^{(m+1)}(P, t) - \varphi^{(m)}(P, t)| + H[\varphi^{(m+1)}(P, t) - \varphi^{(m)}(P, t)].$$

D'après la forme des inégalités (51), (51′), (65), (66), nous voyons qu'il existe des constantes positives $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$, indépendantes des fonctions $F$ et $G$, telles qu'on ait

$$\theta_m < [A_1 k_G + A_2 k_F + A_3 k'_G + A_4 k_F k'_G + A_5 (M_F + \varrho + k_\varphi)(k_F + 1) k'_G] \theta_{m-1} \tag{70}$$

quel que soit $m$.

Si les constantes caractéristiques du problème $k_F, k'_F, k_G, k'_G$ sont suffisamment petites pour que l'on ait

$$A_1 k_G + A_2 k_F + A_3 k'_G + A_4 k_F k'_G + A_5 (M_F + \varrho + k_\varphi)(k_F + 1) k'_G < 1, \tag{71}$$

il en résulte que la série (68), et par conséquent les séries (48) et les suites (25), seront uniformément convergentes.

En somme, si les constantes du problème

$$M_F,\ k_F,\ \sup|G|,\ k_G,\ k'_G,\ T$$

sont assez petites pour que les inégalités (47) et (71) soient vérifiées, il existe des fonctions limites des suites (25)

$$\begin{aligned} &\lim_{m\to\infty} u_\nu^{(m)}(A, t) = u_\nu^*(A, t) \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n) \\ &\lim_{m\to\infty} \varphi^{(m)}(P, t) = \varphi^*(P, t) \end{aligned} \tag{72}$$

qui constituent une solution du système d'équations intégrales singulières (23), (23′). On peut démontrer par une méthode classique connue que cette solution est unique dans la classe des fonctions $u_\nu$ continues et des fonctions $\varphi$ vérifiant la condition de Hölder (46).



En s'appuyant sur les propriétés des intégrales de l'équation parabolique (voir [1], théorème 7) on déduit les relations

$$u_\nu^*(A, t) = \frac{\partial u_0^*(A, t)}{\partial x_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{73}$$

en tout point intérieur $A \in \Omega$, pour $0 < t \leqslant T$.

Par conséquent les fonctions $u_0^*(A, t)$, $\varphi^*(P, t)$ constituent la solution du système d'équations intégro-différentielles (16), (21) qui est unique dans les classes des fonctions précisées plus haut.

Nous allons prouver que la fonction déterminée $u_0^*(A, t)$ représente une solution du problème aux limites proposé. En effet, d'après les propriétés des dérivées du potentiel de charge spatiale relatif à l'équation parabolique (voir [2], page 88), les dérivées (73) données par les intégrales (23) vérifient la condition de Hölder (par rapport aux variables spatiales) avec un exposant arbitrairement inférieur à l'unité dans tout domaine fermé $\Omega^* \subset \Omega$, donc la fonction

$$F_1\left[B, \tau, u_0^*(B, \tau), \frac{\partial}{\partial \xi_1} u_0^*(B, \tau), \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_n} u_0^*(B, \tau)\right]$$

vérifie aussi dans tout domaine $\Omega^*$ la condition de Hölder par rapport à la variable $B$. Il en résulte (voir [1], page 52) que la fonction $u_0^*(A, t)$ admet des dérivées secondes qui vérifient l'équation parabolique donnée (1) en tout point intérieur $A \in \Omega$ pour $0 < t < T$. La fonction limite $\varphi^*(P, t)$ vérifie la condition de Hölder (46), donc les valeurs limites des dérivées tangentielles de la fonction $u^*(A, t)$ existent en tout point $P \in S$ pour $0 < t \leqslant T$ et, d'après l'équation intégrale (21), la fonction $u^*(A, t)$ vérifie la condition limite (10). Elle vérifie évidemment aussi la condition initiale (11). Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME. *Si les coefficients de l'équation parabolique* (1) *vérifient les conditions* (3), (4) *et la surface $S$, limitant le domaine $\Omega$, vérifie les conditions de Liapounoff, si en outre les fonctions données $F(A, t, u_0, u_1, \ldots, \ldots, u_n)$ et $G(P, t, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ vérifient les conditions* (7), (15), (15′) *et les inégalités* (47), (71), *alors il existe une fonction $u_0(A, t)$, limite d'une des suites* (25), *qui vérifie: l'équation* (1) *en tout point intérieur $A \in \Omega$ pour $0 < t < T$, la condition limite aux dérivées tangentielles* (10) *en tout point $P \in S$ pour $0 < t \leqslant T$ et la condition initiale* (11) *en tout point intérieur $A \in \Omega$.*

Remarquons encore pour terminer que, le choix des constantes positives $\varrho$ et $k_\varphi$ dans les conditions d'existence (47) et (71) étant arbitraire, il est avantageux de choisir les valeurs des ces constantes de telle manière que les intervalles de variation permise des constantes caractéristiques $M_F$, $k_F$, $\sup|G|$, $k_G$, $k'_G$, $T$ soient aussi grands que possible.

### Travaux cités

[1] W. Pogorzelski, *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique*, Ricerche di Matematica 5 (1956), p. 25-57.

[2] — *Propriétés des intégrales de l'équation parabolique normale*, Ann. Polon. Math. 4 (1957), p. 61-92.

[3] — *Propriétés des dérivées tangentielles d'une intégrale de l'équation parabolique*, Ricerche di Matematica 6 (1957), p. 162-194.

[4] — *Problème aux limites aux dérivées tangentielles pour l'équation parabolique*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, troisième série, 75 (1958), p. 19-35.

[5] А. И. Гусейнов, *Об одном классе нелинейных сингулярных интегральных уравнений*, Изв. Акад. Наук СССР 12 (1948), p. 193-212.

[6] D. Przeworska-Rolewicz, *Sur l'application de la méthode des approximations successives à une équation intégrale à forte singularité*, Ann. Polon. Math. (1959), p. 161-170.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

*Reçu par la Rédaction le 5. 5. 1958*

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1959)

# The operational solution of linear differential equations with constant coefficients

by W. A. Coppel (London)

**1.** The operational calculus was developed by Heaviside [4] for the solution of initial value problems arising in the theory of electrical communication. He used the calculus in a formal way and occasionally was led to false results. „Shall I refuse my dinner", he said, „because I do not fully understand the process of digestion?". Several methods have since been proposed to put the operational calculus on a firm logical basis, the best known using contour integration [1] or Laplace transforms [3](1).

The drawbacks of these methods have often been remarked. They have no immediate connection with the problem in hand and they impose restrictions which are by no means necessary, although they may be satisfied in the majority of applications. Moreover one still has to verify that the proposed solution satisfies all the requirements of the problem. In many cases also the results they depend on lie deeper than those one is trying to establish. Thus the complex variable method is based on Cauchy's theorem and the Laplace transform method on Lerch's uniqueness theorem. This is particularly true of initial value problems for ordinary linear differential equations with constant coefficients, for which such paraphernalia seem quite out of place. The object of the present work is to give, for this case, a justification of Heaviside's calculus which is as simple and direct as possible.

The method is founded on the following theorem:

*If $f(t)$ is any function which is continuous in the interval $0 \leqslant t < T$ and if*

$$P(D) = p_0 D^n + p_1 D^{n-1} + \ldots + p_n \qquad (p_0 \neq 0)$$

*is any polynomial in $D = d/dt$ with constant, real or complex, coefficients then the differential equation*

$$P(D)x = f(t) \tag{1}$$

(1) Other methods are given in [2] and [6].