$$-\iint\limits_{k'}\int\limits_{0}^{r} r_{AB}^{n+1}:(t-\tau_2)^{(n+1)/2}\exp\left[\frac{\vartheta_1^{A,t}(A,B)}{4(t-\tau_2)}r_{AB}^2\right]\times$$

$$\times\cos(r_{AB},x_{\alpha'})\cos(r_{AB},x_{\beta'})\frac{dr_{AB}}{\sqrt{t-\tau_2}}Jd\sigma,$$

où

$$\vartheta_1^{A,t}(A,B)=\sum_{\alpha',\beta'}a^{\alpha'\beta'}(A,t)\cos(r_{AB},x_{\alpha'})\cos(r_{AB},x_{\beta'}),$$

et J est le discriminant, qui ne dépend pas de r_{AB}. On change maintenant les variables dans les deux intégrales en posant

$$r_{AB}=u\sqrt{t-\tau_1},\qquad r_{AB}=u\sqrt{t-\tau_2},$$

d'où:

$$\begin{aligned}(3.4)\qquad &\bar{k}_3(\tau_1)-\bar{k}_3(\tau_2)\\ &=O\Big\{\iint\limits_{k'}\int\limits_{r/\sqrt{t-\tau_2}}^{r/\sqrt{t-\tau_1}}u^{n+1}\exp\left[-\tfrac{1}{4}u^2\vartheta_1^{A,t}(A,B)\right]dud\sigma\Big\}\to 0,\qquad \Delta t\to 0,\end{aligned}$$

à cause de l'hypothèse (2) de l'introduction, c. q. f. d.

Les égalités (5.4), (7.2), (6.2), (5.2) et (1.2), de même que les formules (5.1) et (10) de l'introduction justifient la conclusion (11) de l'introduction.

Travaux cités

[1] W. Pogorzelski, *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique*, Ricerche di Matematica 5 (1956), p. 25-57.

[2] — *Propriétés des intégrales de l'équation parabolique normale*, Ann. Polon. Math. 4 (1957), p. 61-92.

Reçu par la Rédaction le 9. 11. 1957

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1959)

Sur une équation intégro-différentielle de la théorie de la conductibilité

par D. Sadowska (Łódź)

1. Énoncé du problème. Le problème de la répartition de la température en état stationnaire dans un milieu conducteur et rayonnant conduit à la résolution d'une équation intégro-différentielle de la forme

$$(1)\qquad \Delta T=f[A,T(A)]+\iiint\limits_{\Omega}\frac{F[A,B,T(B)]}{r_{AB}^2}d\tau_B\ (^1)$$

avec des conditions aux limites données.

Nous supposons que le domaine ouvert borné Ω est limité par une surface S vérifiant la condition de Liapounoff (²).

La fonction $f(A,u)$ est définie et continue à l'intérieur du domaine fermé

$$A\in\Omega+S,\qquad |u|\leqslant R.$$

Nous supposons, de plus, qu'elle vérifie dans ce domaine la condition de Hölder par rapport au point variable A et la condition de Lipschitz par rapport à la variable u.

La fonction $F(A,B,u)$ est définie et continue dans le domaine fermé

$$(2)\qquad A(x,y,z)\in\Omega+S,\qquad B(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega+S,\qquad |u|\leqslant R.$$

Nous supposons enfin que la fonction $F(A,B,u)$ vérifie la condition de Hölder par rapport au point variable A et la condition de Lipschitz par rapport à la variable u dans le domaine (2).

Nous cherchons une fonction $T(A)$, qui satisfasse à l'équation (1) à l'intérieur du domaine Ω et qui prenne en tout point P de la surface S des valeurs limites données a priori:

$$(3)\qquad T(A)\to 0,\qquad A\to P.$$

(¹) Pour le sens physique de cette équation, voir le travail [2] de W. Pogorzelski.

(²) Condition de Liapounoff: L'angle $\Delta(P,Q)$ entre les plans tangents en deux points quelconques P, Q de la surface S vérifie l'inégalité $\Delta(P,Q)<Cr_{PQ}^{\varkappa}$, $0<\varkappa\leqslant 1$.

2. Résolution du problème par la méthode des approximations successives. Il résulte de la théorie du potentiel [3] que la fonction $T(A)$ qui satisfait à l'équation

$$\Delta T(A) = f^*(A) \tag{4}$$

et à la condition limite (3) est unique et qu'elle est définie par la formule

$$T(A) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} G(A, B) f^*(B)\, d\tau_B,$$

$G(A, B)$ étant la fonction de Green par rapport au domaine Ω. Si donc la fonction $T(A)$ satisfait à l'équation (1) et à la condition limite (3), elle satisfait aussi à l'équation intégrale

$$T(A) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} G(A, B) f[B, T(B)]\, d\tau_B - \tag{5}$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} G(A, C)\iiint\limits_{\Omega}\frac{F[C, B, T(B)]}{r_{CB}^2}\, d\tau_B\, d\tau_C.$$

L'équation (5) peut s'écrire sous la forme

$$T(A) = f_1[A, T(A)] + \iiint\limits_{\Omega}\Phi[A, B, T(B)]\, d\tau_B, \tag{6}$$

où

$$f_1(A, u) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} G(A, B) f(B, u)\, d\tau_B \tag{7}$$

et

$$\Phi(A, B, u) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} G(A, C)\,\frac{F(C, B, u)}{r_{CB}^2}\, d\tau_C \tag{8}$$

est une fonction définie dans le domaine (2), si $A \neq B$.

La fonction de Green pour chaque couple de points différents A et C du domaine Ω satisfait à l'inégalité suivante (voir [1], p. 243):

$$0 < G(A, C) < 1/r_{AC}.$$

La fonction $F(A, B, u)$ satisfait dans le domaine Ω à la condition de Lipschitz par rapport à u, c'est-à-dire

$$|F(A, B, u_1) - F(A, B, u_2)| < k_f|u_1 - u_2|,$$

donc la fonction Φ satisfait à l'inégalité

$$|\Phi(A, B, u_1) - \Phi(A, B, u_2)| \tag{9}$$

$$< k|u_1 - u_2|\iiint\limits_{\Omega}\frac{d\tau_C}{r_{AC} r_{CB}^2} < [k_1' |\log r_{AB}| + k_2']\,|u_1 - u_2|,$$

k_1' et k_2' étant des constantes positives (voir [4]).

La fonction $f(A, u)$ satisfait dans le domaine Ω à la condition de Lipschitz par rapport à u, c'est-à-dire

$$|f(A, u_1) - f(A, u_2)| < k_f|u_1 - u_2|,$$

donc la fonction f_1 satisfait à l'inégalité

$$|f_1(A, u_1) - f_1(A, u_2)| < \frac{1}{4\pi} k_f|u_1 - u_2|\iiint\limits_{\Omega}\frac{d\tau_B}{r_{AB}} \tag{10}$$

$$< \frac{1}{4\pi} k_f|u_1 - u_2|\int\limits_0^L \frac{4\pi r^2 dr}{r} = \frac{k_f}{2} L^2 |u_1 - u_2|,$$

où L désigne le diamètre du domaine Ω.

Nous appliquerons à l'équation (6) la méthode des approximations successives.

Définissons une suite infinie de fonctions $T_0, T_1, T_2, \ldots$ par les relations

$$T_{n+1}(A) = f_1[A, T_n(A)] + \iiint\limits_{\Omega}\Phi[A, B, T_n(B)]\, d\tau_B, \tag{11}$$

où la première approximation $T_0(A)$ est une fonction continue, arbitrairement choisie, vérifiant la condition

$$|T_0(A)| \leqslant R.$$

Cherchons la condition d'existence de la suite $\{T_n(A)\}$. Supposons donc que la fonction continue $T_{n-1}(A)$ vérifie la condition

$$|T_{n-1}(A)| \leqslant R$$

et étudions l'approximation suivante $T_n(A)$.

Remarquons qu'on a

$$|\Phi(A, B, u)| < \frac{M_F}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{d\tau_C}{r_{AC} r_{CB}^2} < \frac{M_F}{4\pi}(k_1 \log r_{AB} + k_2), \tag{12}$$

où M_F est la borne supérieure de la fonction $|F|$ dans le domaine (2).

D'autre part on a

$$(13)\qquad |f_1(A,u)| < \frac{M_f}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{d\tau_B}{r_{AB}} < \frac{M_f}{4\pi}\int\limits_0^L\frac{4\pi r^2dr}{r} = \frac{M_f}{2}L^2,$$

où M_f est la borne supérieure de la fonction $|f|$ dans le domaine $[\Omega+S, |u|\leqslant R]$ et L est le diamètre du domaine Ω.

D'après les inégalités (12) et (13), on a

$$(14)\qquad |T_n(A)| \leqslant |f_1[A, T_{n-1}(A)]| + \iiint\limits_{\Omega}|\Phi[A, B, T_{n-1}(B)]|\,d\tau_B$$

$$< \frac{ML^2}{2} + \frac{M}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}(k_1|\log r_{AB}|+k_2)\,d\tau_B$$

$$< \frac{ML^2}{2} + \frac{M}{4\pi}\int\limits_0^L 4\pi r^2(k_1|\log r|+k_2)\,dr$$

$$< \frac{ML^2}{2} + M\left(\frac{k_1}{3}L^3|\log L| + \frac{k_1}{9}L^3 + \frac{k_2}{3}L^3\right)$$

$$< C_1ML^2(L|\log L|+L+1),$$

où $M = \sup(M_f, M_F)$, $C_1 = \sup[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}k_1, \frac{1}{9}k_1+\frac{1}{3}k_2]$.

Si donc la borne supérieure M et le diamètre L satisfont à l'inégalité

$$(15)\qquad C_1ML^2(L|\log L|+L+1) \leqslant R,$$

on a

$$|T_n| \leqslant R$$

et la suite T_n est définie. L'inégalité (15) joue dans notre preuve un rôle très important.

Pour démontrer la convergence de la suite (11), étudions les différences des termes consécutifs.

D'après les inégalités (9), (10) et (14), on a

$$|T_{n+1}(A)-T_n(A)| \leqslant |f_1[A, T_n(A)]-f_1[A, T_{n-1}(A)]| +$$

$$+\iiint\limits_{\Omega}|\Phi[A, B, T_n(B)]-\Phi[A, B, T_{n-1}(B)]|\,d\tau_B$$

$$< \sup|T_n(A)-T_{n-1}(A)|\left[\tfrac{1}{2}k_fL^2 + \iiint\limits_{\Omega}(k_1'|\log r_{AB}|+k_2')\,d\tau_B\right.$$

$$< \sup|T_n(A)-T_{n-1}(A)|\left[\tfrac{1}{2}k_fL^2+k_3L^3(|\log L|+1)\right]$$

(où k_3 est une constante positive). Finalement on a

$$|T_{n+1}(A)-T_n(A)| < \sup|T_n(A)-T_{n-1}(A)|\,C_2L^2(L|\log L|+L+1),$$

$$C_2 = \sup(\tfrac{1}{2}k_f, k_3).$$

Si donc le diamètre L satisfaità la condition

$$(16)\qquad C_2L^2(L|\log L|+L+1) < 1$$

la série

$$T_0(A) + \sum_{n=0}^{\infty}[T_{n+1}(A)-T_n(A)]$$

converge absolument et uniformément dans le domaine $\Omega+S$, et par suite la suite (11) converge vers une fonction continue $T(A)$ satisfaisant à l'équation (6). De plus, il résulte de la théorie des approximations successives que cette solution est unique.

Il s'agira maintenant de démontrer que la fonction $T(A)$, qui satisfait à l'équation (6) et par conséquent à l'équation (5), satisfait à l'équation (1) et à la condition (3). Dans ce but, nous démontrerons le lemme suivant:

LEMME 1. *Si la fonction $\Psi(A, B)$ satisfait à la condition de Hölder d'ordre $\mu\leqslant 1$ par rapport à A, et si elle est continue dans le domaine $\Omega+S$ par rapport à B, la fonction*

$$J(A) = \iiint\limits_{\Omega}\frac{\Psi(A, B)}{r_{AB}^2}\,d\tau_B$$

satisfait à la condition de Hölder par rapport à A d'ordre μ, si $\mu<1$, ou d'ordre arbitrairement inférieur à l'unité, si $\mu=1$.

Démonstration. Par hypothèse $|\Psi(A, B)-\Psi(A_1, B)| < Kr_{AA_1}^{\mu}$. Soient A_1 et A_2 deux points du domaine Ω; on a

$$|J(A)-J(A_1)| \leqslant \iiint\limits_{\Omega}\left|\frac{\Psi(A,B)}{r_{AB}^2} - \frac{\Psi(A_1,B)}{r_{A_1B}^2}\right|d\tau_B$$

$$\leqslant \iiint\limits_{\Omega}\frac{|\Psi(A, B)-\Psi(A_1, B)|}{r_{AB}^2}\,d\tau_B + \iiint\limits_{\Omega}|\Psi(A_1, B)|\left|\frac{1}{r_{AB}^2}-\frac{1}{r_{A_1B}^2}\right|d\tau_B$$

$$< 4\pi LKr_{AA_1}^{\mu} + M_\psi\iiint\limits_{\Omega}\left|\frac{1}{r_{AB}^2}-\frac{1}{r_{A_1B}^2}\right|d\tau_B = K_1r_{AA_1}+M_\psi J^*(A),$$

où $M_\psi = \sup|\Psi|$. Évaluons la dernière intégrale $J^*(A)$.

Soit Γ une sphère de centre A et de rayon $r = 2r_{AA_1}$ et soit Γ' la partie commune du domaine Ω et de la sphère Γ.

Décomposons l'intégrale $J^*(A)$ en deux termes

$$J^*(A) = \iiint_{\Gamma'} \left|\frac{1}{r_{AB}^2} - \frac{1}{r_{A_1B}^2}\right| d\tau_B + \iiint_{\Omega-\Gamma'} \left|\frac{1}{r_{AB}^2} - \frac{1}{r_{A_1B}^2}\right| d\tau_B = J_1^*(A) + J_2^*(A),$$

$$J_1^*(A) \leqslant \iiint_{\Gamma'} \frac{d\tau_B}{r_{AB}^2} + \iiint_{\Gamma'} \frac{d\tau_B}{r_{A_1B}^2},$$

en appliquant une transformatian homothétique, nous aurons

$$\iiint_{\Gamma'} \frac{d\tau_B}{r_{AB}^2} < \iiint_{\Gamma^*} \frac{2^3 r_{AA_1}^3 d\tau_{B^*}}{2^2 r_{AB^*}^2 r_{AA_1}^2} = 2r_{AA_1} \iiint_{\Gamma^*} \frac{d\tau_{B^*}}{r_{AB^*}^2} = 8\pi r_{AA_1}.$$

Par analogie

$$\iiint_{\Gamma'} \frac{d\tau_B}{r_{A_1B}^2} < 8\pi r_{AA_1}$$

on a donc

$$|J_1^*(A)| < 16\pi r_{AA_1}.$$

Nous avons ensuite

$$|J_2^*(A)| = \iiint_{\Omega-\Gamma'} \left|\frac{1}{r_{AB}^2} - \frac{1}{r_{A_1B}^2}\right| d\tau_B \leqslant \iiint_{\Omega-\Gamma'} \frac{|r_{AB} - r_{A_1B}|\,|r_{AB} + r_{A_1B}|}{r_{AB}^2 r_{A_1B}^2} d\tau_B.$$

Mais

$$|r_{AB} - r_{A_1B}| < r_{AA_1}$$

et

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{r_{A_1B}}{r_{AB}} \leqslant \frac{3}{2},$$

d'où

$$|J_2^*(A)| \leqslant r_{AA_1} \iiint_{\Omega-\Gamma'} \frac{\frac{5}{2} r_{AB}}{\frac{1}{4} r_{AB}^2 r_{AB}^2} d\tau_B \leqslant 10 r_{AA_1} \int_{2r_{AA_1}}^{L} \frac{4\pi r^2}{r^3} dr$$

$$< 40\pi r_{AA_1} (|\log L| + |\log 2r_{AA_1}|)$$

$$= 40\pi r_{AA_1}^{1-\varepsilon} (r_{AA_1}^{\varepsilon} |\log L| + r_{AA_1}^{\varepsilon} |\log 2r_{AA_1}|) < K' r_{AA_1}^{1-\varepsilon} = K' r_{AA_1}^{\alpha},$$

α étant une constante positive arbitrairement inférieure à l'unité.

En rapprochant les résultats, nous obtenons

$$|J(A) - J(A_1)| < 4\pi L K r_{AA_1}^{\mu} + M_{\varphi} K' r_{AA_1}^{\alpha}$$

$$= \begin{cases} \varkappa_1 r_{AA_1}^{\mu}, & \text{si} \quad \mu < 1, \\ \varkappa_2 r_{AA_1}^{\alpha}, & \text{si} \quad \mu = 1 \end{cases}$$

et le lemme est ainsi démontré.

En vertu de ce lemme et de l'hypothèse, que la fonction $F(A, B, u)$ satisfait à la condition de Hölder par rapport au point A, on conclut que la fonction

$$\iiint_{\Omega} \frac{F[C, B, T(B)]}{r_{CB}^2} d\tau_B$$

qui figure au second membre de l'équation (5), satisfait à la condition de Hölder par rapport au point C.

D'après la théorie de l'équation de Poisson [3], la fonction $T(A)$ définie par l'équation (5) satisfait à l'équation (1) et à la condition limite (3).

3. Résolution du problème par la méthode topologique. Nous résoudrons maintenant l'équation (1) avec les conditions limites (3) en admettant des hypothèses plus générales.

Supposons que la fonction $F(A, B, u)$ soit définie et continue dans le domaine fermé (2) et qu'elle satisfasse à la condition de Hölder par rapport à A et u dans le domaine (2).

Supposons, de plus, que la fonction $f(A, u)$ satisfasse à la condition de Hölder par rapport à A et u dans le domaine $A \in \Omega + S$, $|u| \leqslant R$.

Dans ces hypothèses il est impossible de résoudre le problème par la méthode des approximations successives. Nous le résoudrons en appliquant le théorème topologique [5] de J. Schauder: „Toute transformation continue d'un ensemble fermé, convexe, et contenu dans un espace de Banach, en un sous-ensemble compact admet au moins un point invariable".

Nous avons démontré que la résolution du problème proposé peut être ramenée à celle de l'équation intégrale (5).

Pour résoudre cette équation nous considérons l'espace linéaire complet E (espace de Banach) de toutes les fonctions $T(A)$ continues dans $\Omega + S$ avec la norme $\|T\| = \sup|T(A)|$ et l'ensemble Z formé de tous les points de l'espace E tels que $\|T\| \leqslant R$, R étant le nombre positif intervenant dans les inégalités (2). L'ensemble Z est évidemment fermé et convexe.

Considérons dans l'espace E la transformation fonctionnelle

$$V(A) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} G(A,B)f[B,T(B)]d\tau_B - \tag{17}$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} G(A,C)\iiint\limits_{\Omega}\frac{F[C,B,T(B)]}{r_{CB}^2}d\tau_B d\tau_C$$

qui fait correspondre à tout point $T(A)$ de l'ensemble Z un point $V(A)$ de l'espace E.

Il résulte des considérations précédentes (p. 84) que l'ensemble Z' des points transformés est une partie de l'ensemble Z, si les bornes supérieures M_f et M_F et le diamètre L du domaine satisfont à l'inégalité (15):

$$C_1 M L^2 (L|\log L| + L + 1) \leqslant R.$$

Nous allons maintenant démontrer que la transformation (17) est continue dans l'espace E. Considérons une suite arbitraire de points $\{T_n(A)\}$ de l'ensemble Z convergente vers un point $T(A)$ de cet ensemble, c'est-à-dire $\|T_n - T\| \to 0$ avec $n\to\infty$.

Nous démontrerons que la suite $V_n(A)$ des points transformés converge vers le point $V(A)$ correspondant à la fonction limite $T(A)$ dans la transformation (17).

En effet, en vertu des propriétés de la fonction de Green ($G(A,B) < 1/r_{AB}$) on a

$$|V_n(A)-V(A)| \leqslant \frac{1}{4\pi}\Bigg\{\iiint\limits_{\Omega} G(A,B)|f[B,T_n(B)]-f[B,T(B)]|d\tau_B +$$

$$+\iiint\limits_{\Omega} G(A,C)\iiint\limits_{\Omega}\frac{|F[C,B,T_n(B)]-F[C,B,T(B)]|}{r_{CB}^2}d\tau_B d\tau_C\Bigg\}$$

$$< \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{|f[B,T_n(B)]-f[B,T(B)]|}{r_{AB}}d\tau_B +$$

$$+\iiint\limits_{\Omega}\Bigg[\iiint\limits_{\Omega}\frac{|F[C,B,T_n(B)]-F[C,B,T(B)]|}{r_{CB}^2 r_{AC}}d\tau_B\Bigg]d\tau_C.$$

Les fonctions f et F étant continues, on peut faire correspondre à chaque nombre positif ε un nombre naturel N_ε tel que $n > N_\varepsilon$ entraîne

$$|f[B,T_n(B)]-f[B,T(B)]| < \lambda_1\frac{\varepsilon}{2} \qquad \left(0<\lambda_1<\frac{2}{k_f L^2}\right),$$

$$|F[C,B,T_n(B)]-F[C,B,T(B)]| < \lambda_2\frac{\varepsilon}{2} \qquad \left(0<\lambda_2<\frac{1}{k_3 L^3(|\log L|+1)}\right),$$

d'où

$$|V_n(A)-V(A)| < \frac{\lambda_1\varepsilon}{8\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{d\tau_B}{r_{AB}} + \frac{\lambda_2\varepsilon}{8\pi}\iiint\limits_{\Omega}\Bigg[\iiint\limits_{\Omega}\frac{d\tau_B}{r_{CB}^2 r_{AC}}\Bigg]d\tau_C$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}\left[\lambda_1\frac{k_f}{2}L^2 + \lambda_2 k_3 L^3(|\log L|+1)\right] < \varepsilon.$$

Nous avons ainsi

$$|V_n(A)-V(A)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n > N_\varepsilon,$$

d'où il résulte que la suite des points transformés $V_n(A)$ converge uniformément vers le point $V(A)$ correspondant au point limite $T(A)$ dans la transformation (17) et que la transformation (17) est continue.

Il nous reste à démontrer que l'ensemble Z des points transformés est compact. Dans ce but il suffit de démontrer que les fonctions $T(A)$ de l'ensemble Z sont équicontinues c'est-à-dire que pour tout nombre positif ε, pour tout couple de points A et A_1 du domaine Ω et pour toutes les fonctions de l'ensemble Z' on a simultanément

$$|V(A)-V(A_1)| < \varepsilon$$

si

$$r_{AA_1} < \eta_\varepsilon.$$

Pour vérifier cette proposition, nous démontrerons le lemme suivant:

LEMME 2. *Si les fonctions $f(A)$ définies et continues dans le domaine fermé $\Omega+S$ sont bornées dans leur ensemble, les fonctions $J(A)$ définies par la formule*

$$J(A) = \iiint\limits_{\Omega} G(A,B)f(B)d\tau_B \tag{18}$$

sont bornées dans leur ensemble et équicontinues dans le domaine $\Omega+S$.

Démonstration. (³)

$$J(A) = \iiint\limits_{\Omega}\frac{f(B)}{r_{AB}}d\tau_B - \iiint\limits_{\Omega} g(A,B)f(B)d\tau_B = J^{\mathrm{I}}(A) - J^{\mathrm{II}}(A).$$

(³) Dans cette démonstration j'utilise un raisonnement analogue à celui du travail [3].

Les fonctions $J^{\mathrm{I}}(A)$ satisfont à la condition de Lipschitz, puisqu'il existe une dérivée

$$[J^{\mathrm{I}}(A)]'_{x_i} = \iiint_{\Omega} \frac{x_i - \xi_i}{r_{AB}^2} f(B)\, d\tau_B$$

bornée au domaine Ω.

Les fonctions $J^{\mathrm{I}}(A)$ satisfont à la condition de Lipschitz avec la même constante, donc les fonctions $J(A)$ sont équicontinues.

Pour étudier le second terme $J^{\mathrm{II}}(A)$, remarquons que la fonction $g(A, B)$ est un potentiel de simple couche de densité $\mu(Q, B)$

$$g(A, B) = \iint_{S} \frac{\mu(Q, B)}{r_{AQ}} d\sigma_Q$$

d'où

$$J^{\mathrm{II}}(A) = \iint_{S} \frac{W(Q)}{r_{AQ}} d\sigma_Q \tag{19}$$

où

$$W(Q) = \iiint_{\Omega} \mu(Q, B) f(B)\, d\tau_B .$$

Soit K_ε une sphère de centre A et de rayon r_ε. Décomposons l'intégrale (19) en deux termes

$$J^{\mathrm{II}}(A) = J^{\mathrm{II}}_{K'_\varepsilon} + J^{\mathrm{II}}_{S-K'_\varepsilon}$$

étendus à la surface K'_ε, qui n'est qu'un ensemble de points de la surface S contenue dans la sphère K_ε, et à la surface $S-K'_\varepsilon$ extérieure par rapport à la surface K'_ε (l'ensemble K'_ε peut être vide).

Soit A_1 un point intérieur de la sphère K'_ε tel que

$$r_{AA_1} < \tfrac{1}{2} r_\varepsilon .$$

Nous avons

$$J^{\mathrm{II}}(A_1) = J^{\mathrm{II}}_{K'_\varepsilon}(A_1) + J^{\mathrm{II}}_{S-K'_\varepsilon}(A_1) .$$

Faisons correspondre à un nombre positif arbitraire ε un nombre r_ε assez petit et indépendant de A pour que

$$|J^{\mathrm{II}}_{K'_\varepsilon}(A)| < \varepsilon/4 \quad \text{et} \quad |J^{\mathrm{II}}_{K'_\varepsilon}(A_1)| < \varepsilon/4 ;$$

r_ε étant donné, nous allons montrer qu'il existe un nombre ne dépendant que de ε tel que

$$|J^{\mathrm{II}}_{S-K'_\varepsilon}(A) - J^{\mathrm{II}}_{S-K'_\varepsilon}(A_1)| < \varepsilon/2 \quad \text{pour} \quad r_{AA_1} < \eta_\varepsilon .$$

Dans ce but, nous écrirons

$$\begin{aligned} |J^{\mathrm{II}}_{S-K'_\varepsilon}(A) - J^{\mathrm{II}}_{S-K'_\varepsilon}(A_1)| &\leqslant \iint_{S-K'_\varepsilon} \left| \frac{1}{r_{AQ}} - \frac{1}{r_{A_1Q}} \right| |W(Q)|\, d\sigma_Q \\ &\leqslant r_{AA_1} \iint_{S-K'_\varepsilon} \frac{|W(Q)|}{r_{AQ} r_{A_1Q}} d\sigma_Q \\ &< 2r_{AA_1} \iint_{S-K'_\varepsilon} \frac{|W(Q)|}{r_{AQ}^2} d\sigma_Q = \frac{2r_{AA_1}}{r_\varepsilon^2} \iint_{S-K'} |W(Q)|\, d\sigma_Q . \end{aligned}$$

Mais $\iint_S |\mu(Q, B)|\, d\sigma_Q = 1$

$$\begin{aligned} \iint_S |W(Q)|\, d\sigma_Q &= \iint_S \left| \iiint_{\Omega} \mu(Q, B) f(B)\, d\tau_B \right| d\sigma_Q \\ &\leqslant \iint_S \iiint_{\Omega} \mu(Q, B) |f(B)|\, d\tau_B\, d\sigma_Q \\ &= \iiint_{\Omega} |f(B)|\, d\tau_B \leqslant M_f D \end{aligned}$$

(D étant le volume du domaine Ω) donc, on a

$$|J^{\mathrm{II}}_{S-K'_\varepsilon}(A) - J^{\mathrm{II}}_{S-K'_\varepsilon}(A_1)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad r_{AA_1} < \frac{r_\varepsilon^2}{4DM_f} = \eta_\varepsilon .$$

Nous avons par conséquent

$$|J^{\mathrm{II}}(A) - J^{\mathrm{II}}(A_1)| < \varepsilon \quad \text{quand} \quad r_{AA_1} < \inf(\eta_\varepsilon, \tfrac{1}{2} r_\varepsilon),$$

où η_ε et r_ε ne dépendent que de la surface S et de la borne M_f.

Les fonctions représentées par l'intégrale $J^{\mathrm{II}}(A)$ sont donc équicontinues.

Il en résulte que les fonctions $J(A)$ définies par la formule (19) sont équicontinues et le lemme 2 est démontré.

L'intégrale $\iiint_{\Omega} \frac{F[C, B, T(B)]}{r_{CB}^2} d\tau_B$ satisfait à la condition de Hölder par rapport à C — d'après le lemme 1. Donc, d'après le lemme 2, les fonctions dans l'expression (17) sont équicontinues et bornées dans le domaine Ω; il résulte du théorème d'Arzelà que l'ensemble transformé est compact.

En récapitulant les résultats, nous constatons que dans l'espace E complet, normé et linéaire, l'opération continue (17) transforme l'ensemble fermé et convexe Z en un sous-ensemble compact. Il résulte donc du théorème de J. Schauder qu'il existe au moins un point invariant de l'opération (17), c'est-à-dire au moins une solution de l'équation (5) et de même une solution de l'équation (1) satisfaisant aux conditions (3).

Travaux cités

[1] M. Krzyżański, *Równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu I*, Warszawa 1957.

[2] W. Pogorzelski, *Teoria promieniowania i kwantów energii*, Państwowy Instytut Meteorologiczny (1924), p. 1-20.

[3] — *Les propriétés d'une fonction de Green et ses applications aux équations elliptiques*, Ann. Polon. Math. 3 (1956), p. 46-75.

[4] — *Równania całkowe i ich zastosowania I*, Warszawa 1953.

[5] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math. 2 (1930), p. 171-180.

Reçu par la Rédaction le 24. 8. 1957

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1959)

Sur la résolution du problème aux dérivées tangentielles pour l'équation parabolique par la méthode des approximations successives

par W. Pogorzelski (Warszawa)

1. Introduction. Soit l'équation aux dérivées partielles du type parabolique quasilinéaire de la forme

$$(1)\quad \hat{\Psi}(u) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(A,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c(A,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = F\left(A,t,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

dans l'espace euclidien des points $(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$.

Dans le travail [4] nous avons posé et résolu pour l'équation (1) un problème aux limites aux dérivées tangentielles par la méthode topologique du point invariant de J. Schauder. Nous résoudrons maintenant ce problème par la méthode des approximations successives.

Cette méthode est basée sur des hypothèses moins générales que la méthode topologique, mais elle présente l'avantage de fournir le procédé qui permet de calculer la solution et n'exige pas que l'on admette $G(p, 0, u_0, u_1, \ldots, u_q) = 0$ comme dans le travail [4].

Nous admettons pour les coefficients réels de l'équation (1) les mêmes hypothèses que dans les travaux [1], [2], [3], [4], c'est-à-dire que ces coefficients sont des fonctions déterminées dans le domaine fermé

$$(2)\qquad A(x_1,\ldots,x_n) \in \Omega + S, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

et vérifient les conditions de Hölder

$$(3)\quad |a_{\alpha\beta}(A,t) - a_{\alpha\beta}(A_1,t_1)| < \text{const}\cdot[r^h_{AA_1} + |t-t_1|^{h'}] \quad (0 < h, h' \leqslant 1),$$

$$(4)\quad \begin{aligned} &|b_\alpha(A,t) - b_\alpha(A_1,t)| < \text{const}\cdot r^h_{AA_1} \\ &|c(A,t) - c(A_1,t)| < \text{const}\cdot r^h_{AA_1}; \end{aligned} \qquad (0 < h \leqslant 1)$$