ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
LXIX.2 (1998)

Préparation des fonctions sous-analytiques globales et lieu d'analyticité

par JEAN-MARIE LION (Dijon)

Abstract. We give a new proof of Kurdyka–Tamm's theorem on the analytic locus of a subanalytic function.

0. Introduction. L'objet de ce travail est de donner une nouvelle démonstration du théorème de Tamm–Kurdyka [Ta], [Ku] sur la sous-analyticité du lieu d'analyticité des fonctions sous-analytiques globales (voir aussi [BM] et [DM]). Nous allons déduire élémentairement ce résultat d'un théorème de préparation des fonctions sous-analytiques globales [Par], [LR]. Le lecteur peut très facilement adapter la méthode exposée ici pour retrouver le résultat de van den Dries et Miller [DM] sur le lieu de régularité des x^λ-fonctions. L'ingrédient à ajouter est le théorème de préparation pour les x^λ-fonctions exposé dans [LR].

I. Définitions et résultats. Un sous-ensemble X de $\mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble *semi-analytique* si pour tout point a de $\mathbb{R}^d$ il existe un voisinage ouvert U, un entier p et des fonctions analytiques $(f_{i,j})_{i,j\le p}$ et $(g_{i,j})_{i,j\le p}$ définies sur U tels que

$$X\cap U=\bigcup_{i\le p}\Big(\bigcap_{j\le p}\{x\in U\mid f_{i,j}(x)=0,\ g_{i,j}(x)>0\}.\Big)$$

Un sous-ensemble X d'une variété analytique M de dimension d est un *semi-analytique dans* M si pour tout plongement analytique ϕ de $\mathbb{R}^d$ dans M, l'ensemble $\phi^{-1}(X)$ est un semi-analytique de $\mathbb{R}^d$. Nous renvoyons le lecteur aux travaux de Łojasiewicz [Ło1,2] pour les propriétés des semi-analytiques.

On munit la droite projective réelle $\mathbb{P}_1$ de sa structure algébrique usuelle qui est donnée par l'équivalence "$[x:1]\sim[1:y]$ ssi $xy=1$". La droite réelle

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 32B20.
Key words and phrases: density, subanalytic subsets, pfaffian subsets.

$\mathbb{R}$ est algébriquement plongée dans $\mathbb{P}_1$. Un sous-ensemble X de $\mathbb{R}^d$ est un *sous-analytique global* s'il existe un entier m et un ensemble Y inclus dans $\mathbb{R}^{d+m}$ qui est semi-analytique dans $\mathbb{P}_1^{d+m}$ tel que $X = \pi(Y)$ où π désigne la projection canonique de $\mathbb{R}^{d+m}$ sur $\mathbb{R}^d$.

Gabrielov [Ga] a démontré que les sous-analytiques globaux possèdent la propriété fondamentale suivante : *la différence de deux sous-analytiques globaux est un sous-analytique global.*

Une fonction f définie sur un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^d$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est *sous-analytique globale* si son graphe est un sous-analytique global de $\mathbb{R}^{d+1}$. On déduit du théorème du complémentaire que le domaine de définition d'une fonction sous-analytique globale, son lieu de discontinuité, le lieu où elle n'est pas C^N, $N \in \mathbb{N}$ étant un entier fixé, sont des sous-analytiques globaux. Le résultat de Tamm et Kurdyka dont on va proposer une démonstration élémentaire généralise cette dernière propriété.

Théorème de Tamm–Kurdyka [Ta], [Ku]. *Soit f une fonction sous-analytique globale définie sur un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^d$. Le lieu S_ω des points où f n'est pas analytique est un sous-analytique global. Il existe un entier N tel que S_ω soit égal au lieu S_N des points où f n'est pas de classe C^N.*

Le théorème de préparation des fonctions sous-analytiques globales de [Par] et de [LR] va nous permettre de prouver cet énoncé. Dans le chapitre suivant nous en donnons une version adaptée au problème.

II. Quelques propriétés des objets sous-analytiques. Enonçons deux conséquences immédiates du théorème du complémentaire.

• Soient $X_0, \ldots, X_r$ des sous-analytiques globaux de $\mathbb{R}^{n+1}$. Il existe une partition finie $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ en cylindres sous-analytiques globaux adaptée à la famille $X_0, \ldots, X_r$: si $C \in \mathcal{P}$ et si $i = 0, \ldots, r$ alors $C \subset X_i$ ou $C \cap X_i = \emptyset$ et C est de la forme $\{y \in B,\ \phi(y) < z < \psi(z)\}$ ou de la forme $\{(y,\ \phi(y)) \mid y \in B\}$ où B est un sous-analytique global de $\mathbb{R}^n$ et $\phi < \psi$ sont des fonctions sous-analytiques (éventuellement $\phi = -\infty$ ou $\psi = +\infty$).

• Soient $\phi_0, \ldots, \phi_r$ des fonctions sous-analytiques globales définies sur un sous-analytique global U de $\mathbb{R}^n$. Quitte à partitionner finiment U en sous-analytiques globaux et à réindexer la famille, on peut la supposer ordonnée.

Les fonctions sous-analytiques admettent la présentation suivante.

Proposition 1 (d'après [Par] et [LR]). *Soient $\phi_0, \ldots, \phi_r$ des fonctions sous-analytiques globales bornées définies sur un sous-analytique global $Y \times]0,1[$ inclus dans $]0,1[^{n+1}$. Il existe une partition finie $\mathcal{S}$ en sous-analytiques globaux de Y telle que pour chaque sous-analytique global B de $\mathcal{S}$ l'énoncé suivant est vérifié : il existe des entiers $k \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, et $p_0, \ldots, p_r \in$*

$\mathbb{N}$, *des fonctions sous-analytiques globales* $a, \psi_0, \ldots, \psi_k, A_0, \ldots, A_r$ *définies sur* B, *à valeurs dans* $]0,1[$ *et avec* $a < \psi_0$, *des réels* $M_0, \ldots, M_r$, *des séries entières* $U_0, \ldots, U_r$ *définies au voisinage du polydisque* $\Delta_{k+1} = \{|t_0|, \ldots, |t_k| \le 1\}$ *de* $\mathbb{C}^{k+1}$ *et à valeurs dans* $[1/2, 1]$ *tels que*

$$\phi_i(y,z) = M_i \cdot (z/\psi_0)^{p_i/q} \cdot A_i \cdot U_i((z/\psi_0)^{1/q}, \psi_1, \ldots, \psi_k)$$

si $i = 0, \ldots, r$ *et* (y,z) *appartient au cylindre* $\{y \in B, z \in]0, a(y)[\}$.

Cette proposition est voisine de résultats de [Paw] et de [ŁTZ]. Elle permet de comprendre le défaut d'analyticité par rapport à une variable d'une fonction sous-analytique globale. Elle se déduit du théorème 1 de [LR] de la façon suivante.

Préparons simultanément les fonctions $\phi_0, \ldots, \phi_r$ (théorème 1 de [LR] et affirmation 1.1.5 de [LR]). On obtient une partition finie $\mathcal{T}$ en cylindres sous-analytiques globaux de $Y \times]0,1[$. On ne retient que les cylindres de $\mathcal{T}$ de la forme $C = \{(y,z) \mid y \in B,\ z \in]0, a(y)[\}$, où B est un sous-analytique global et a une fonction sous-analytique globale définie sur B et strictement positive. Les bases B de ces cylindres forment la partition $\mathcal{S}$ de Y. En restriction à chacun de ces cylindres les fonctions ϕ_i admettent l'écriture voulue : contrairement à la situation générale de [LR], ici $p_i \notin \mathbb{Z}_-$ et l'unité U_i est indépendante d'un terme de la forme $(\Psi_0/z)^{1/q}$ car sur les cylindres C, la variable z est arbitrairement petite et les fonctions ϕ_i sont bornées.

III. Démonstration du théorème de Tamm–Kurdyka. D'après le théorème du complémentaire, il suffit de traiter le cas d'une fonction sous-analytique globale f définie sur $\mathbb{R}^d$, à support dans $]0,1[^d$ et bornée.

On note $l_0(x,x')$ la fonction sous-analytique globale définie sur $]0,1[^d \times]-1,1[^d$ par $l_0(x,x') = f(x+x')$. Pour démontrer le théorème on va montrer l'existence d'un entier N et de fonctions sous-analytiques globales $l_1(x,x'), \ldots, l_d(x,x')$ définies sur $]0,1[^d \times]-1,1[^d$ et vérifiant les propriétés suivantes. Soit $i = 1, \ldots, d$ et $(x, x'_1, \ldots, x'_{d-i}) \in]0,1[^d \times]-1,1[^{d-i}$:

• Il existe $\varepsilon > 0$ tel que la fonction

$$(x'_{d-i+1}, \ldots, x'_d) \mapsto l_i(x, x'_1, \ldots, x'_{d-i}, x'_{d-i+1}, \ldots, x'_d)$$

est analytique sur le polydisque $]-\varepsilon, \varepsilon[^i$.

• Si la fonction $(x'_{d-i+1}, \ldots, x'_d) \mapsto l_{i-1}(x, x'_1, \ldots, x'_{d-i}, x'_{d-i+1}, \ldots, x'_d)$ est de classe C^N en $0 \in \mathbb{R}^i$ elle est analytique au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^i$ et elle coïncide avec $(x'_{d-i+1}, \ldots, x'_d) \mapsto l_i(x, x'_1, \ldots, x'_{d-i}, x'_{d-i+1}, \ldots, x'_d)$ sur le polydisque $]-\varepsilon, \varepsilon[^i$.

Supposons avoir prouvé l'existence de l'entier N et des fonctions $l_1, \ldots, l_d$ et finissons la preuve du théorème. Soit $x_0 \in]0,1[^d$. Etant données les propriétés des fonctions sous-analytiques globales l_i, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) La fonction f est de classe C^N en x_0.

(ii) La fonction f est analytique au voisinage de x_0.

(iii) La fonction f coïncide avec la fonction $l_d(x_0, x - x_0)$ au voisinage de x_0.

Puisque les conditions (i) et (iii) sont des conditions sous-analytiques globales, le théorème est démontré. ∎

IV. Existence des fonctions $l_1, \ldots, l_d$ et de l'entier N. Pour démontrer l'existence des fonctions $l_1, \ldots, l_d$ et de l'entier N il suffit d'utiliser d fois les trois lemmes qui vont suivre. On déduit l_i de l_{i-1} en appliquant les trois lemmes avec $\theta = l_{i-1}$, $n = 2d - i$, $n' = i - 1$, $y = (x, x'_1, \ldots, x'_{d-i})$, $z = x'_{d-i+1}$ et $u = (x'_{d-i+2}, \ldots, x'_d)$. La fonction l_i est la fonction l ainsi obtenue. Cette construction est possible car la fonction l_0 vérifie les hypothèses du lemme 1 et si l_{i-1} les vérifie c'est aussi le cas pour l_i. L'entier N est le plus grand des entiers Q_i obtenus dans cette construction.

L'objet des trois lemmes et d'étudier le lieu des points d'analyticité par rapport aux $n'+1$ dernières variables d'une fonction sous-analytique globale qui est analytique par rapport aux n' dernières variables.

Lemme 1. *Soit θ une fonction sous-analytique globale bornée de* $]0,1[^n \times]0,1[\times]0,1[^{n'}$. *On suppose qu'il existe une partition finie $\mathcal{P}$ en sous-analytiques globaux de $]0,1[^n$ telle que sur chaque sous-analytique global Y de $\mathcal{P}$, la fonction θ admet une écriture de la forme suivante : il existe des fonctions sous-analytiques globales α définie sur Y et $\beta, \phi_0, \ldots, \phi_r$ définies sur $Z = \{(y,z) \mid y \in Y,\ z \in]0, \alpha(y)[\}$, toutes à valeurs dans $]0,1[$ et $\beta < \phi_0$, et une série entière g définie au voisinage du polydisque $\Delta_{n'+r} = \{(t_1, \ldots, t_{n'+r}) \mid |t_i| \le 1\}$ tels que*

$$\theta(y,z,u) = g(u_1/\phi_0, \ldots, u_{n'}/\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_r) \quad si\ (y,z) \in Z,\ u \in]0, \beta(y,z)[^{n'}.$$

Alors chaque $Y \in \mathcal{P}$ admet une partition sous-analytique finie $\mathcal{P}_Y$ telle que pour chaque sous-analytique global B de $\mathcal{P}_Y$ l'énoncé suivant est vérifié : il existe des entiers $k' \in \mathbb{N}$, $q, p \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, des fonctions sous-analytiques globales $a, A, \psi_0, \ldots, \psi_{k'}$ définies sur B et à valeurs dans $]0,1[$ avec $a < \psi_0, \alpha$ et $\beta(y,z) < 2A^\varepsilon a^{p/q}$ si $0 < z < a$ et une série entière G définie au voisinage du polydisque $\Delta_{n'+k'+1} = \{(t_0, \ldots, t_{n'+k'}) \mid |t_i| \le 1\}$ tel que

$$\theta(y,z,u) = G((z/\psi_0)^{1/q}, u_1/(A^\varepsilon z^{p/q}), \ldots, u_{n'}/(A^\varepsilon z^{p/q}), \psi_1, \ldots, \psi_{k'})$$

si (y,z) appartient au cylindre $\{y \in B, z \in]0, a(y)[\}$ et $u \in]0, \beta(y,z)/2[^{n'}$.

P r e u v e. Il suffit d'appliquer la proposition 1 aux fonctions $\phi_0, \ldots, \phi_r$: on obtient des fonctions $a, \psi_0, \ldots, \psi_k, A_0, \ldots, A_r$ et des entiers $q, p_0, \ldots, p_r$ et k. On pose $p = p_0$, $k' = k+r+1$ et $\psi_{k+i+1} = A_i$ si $i = 0, \ldots, r$. En raffinant la partition obtenue, on obtient les inégalités voulues. En particulier, on obtient des cylindres sous-analytiques $\{y \in B, z \in]0, a(y)[\}$ sur lesquels ϕ_0 admet l'écriture

$$\phi_0(y,z) = M_0 \cdot (z/\psi_0)^{p/q} \cdot A_0 \cdot U_0((z/\psi_0)^{1/q}, \psi_1, \ldots, \psi_k)$$

avec $M_0A_0/\psi_0^{p/q} \le 1$ ou $\psi_0^{p/q}/(M_0A_0) \le 1$. Dans le premier cas on pose $A = M_0A_0/\psi_0^{p/q}$ et $\varepsilon = 1$. Dans le second cas on pose $A = \psi_0^{p/q}/(M_0A_0)$ et $\varepsilon = -1$. Ceci permet d'écrire θ sous la forme

$$\theta = g \circ L \circ ((z/\psi_0)^{1/q}, u_1/(A^\varepsilon z^{p/q}), \ldots, u_{n'}/(A^\varepsilon z^{p/q}), \psi_1, \ldots, \psi_{k'})$$

où les fonctions coordonnées de l'application $L = (L_1, \ldots, L_{n'+r})$ sont des séries entières définies au voisinage du polydisque $\Delta_{n'+k'+1}$ et les fonctions $a, A, \psi_0, \ldots, \psi_{k'}$ satisfont les conclusions du lemme. La série G est la composée $g \circ L$. ∎

Les notations sont celles du lemme 1. Soit $Y \in \mathcal{P}$. Quitte à raffiner la partition $\mathcal{P}_Y$ on peut supposer que tout sous-analytique global B de $\mathcal{P}_Y$ dont l'adhérence rencontre $]0,1[^{n-1} \times \{0\}$ est un cylindre de la forme

$$\{(y', y_n) \mid y' \in B',\ 0 < y_n < \alpha'(y)\}$$

où B' est un sous-analytique global inclus dans $]0,1[^{n-1}$ et α' est une fonction sous-analytique globale définie sur B' et strictement positive. On note $\mathcal{P}'_Y$ la sous-famille de $\mathcal{P}_Y$ formée par ces cylindres. Les bases de ces cylindres forment une partition de $]0,1[^{n-1}$.

Le lemme suivant reprend les notations du lemme 1. C'est un lemme de scission analogue au lemme du paragraphe 1.6 de [LR].

LEMME 2. *Soit $Y \in \mathcal{P}$ et B un cylindre de $\mathcal{P}'_Y$. Il existe des séries entières $L, R_1, \ldots, R_{q-1}$ définies au voisinage de $\Delta_{n'+k'+1}$ et $W_1, \ldots, W_{n'}$ définies au voisinage de $\Delta_{2n'+k'}$ et des fonctions sous-analytiques globales $l_B, r_1, \ldots, r_{q-1}$ et w à support le polycylindre*

$$\{y \in B,\ |z| \le a(y),\ |u_1|, \ldots, |u_{n'}| \le A^\varepsilon \psi_0^{p/q}\}$$

telles que si $y \in B, z \in]0, a(y)[$ et $u \in]0, \beta(y,z)/2[^{n'}$ alors

$$\theta(y,z,u) = l_B(y,z,u) + \sum_{j=1}^{q-1} r_j(y,z,u) + w(y,z,u)$$

avec

$$l_B(y,z,u) = L(z/\psi_0, u_i/(A^\varepsilon \psi_0^{p/q}), \psi_1, \ldots, \psi_{k'})$$
$$r_j(y,z,u) = (z/\psi_0)^{j/q} R_j(z/\psi_0, u_1/(A^\varepsilon \psi_0^{p/q}), \ldots, z/\psi_0, u_{n'}/(A^\varepsilon \psi_0^{p/q}), \psi_1, \ldots, \psi_{k'})$$
$$w(y,z,u) = \sum_{i=1}^{n'} (u_i^{1/p}/(A^{\varepsilon/p} z^{1/q})) w_i(y,z,u)$$
$$w_i(y,z,u) = W_i(u_1^{1/p}/(A^{\varepsilon/p} z^{1/q}), \ldots, u_{n'}^{1/p}/(A^{\varepsilon/p} z^{1/q}), u_1^{1/p}/(A^{\varepsilon/p} \psi_0^{1/q}), \ldots, u_{n'}^{1/p}/(A^{\varepsilon/p}\psi_0^{1/q}), \psi_1, \ldots, \psi_{k'}).$$

De plus à y fixé, la restriction de l_B à $\{|z| \le a(y),\ |u_1|, \ldots, |u_{n'}| \le A^\varepsilon \psi_0^{p/q}\}$ est analytique.

Preuve. Soit $m = (m_0, m_1, \ldots, m_{n'}) \in \mathbb{N}^{n'+1}$. Il suffit de regrouper les termes de la série G pour construire les nouvelles séries en remarquant que le produit

$$(z/\psi_0)^{m_0/q} \prod_{i=1}^{n'} (u_i/A^\varepsilon z^{p/q})^{m_i}$$

peut s'écrire de plusieurs façons. Si $m_0 \ge pm_1 + \ldots + pm_{n'}$, on l'écrit sous la forme

$$(z/\psi_0)^{(m_0 - p\sum_{i\ge 1} m_i)/q} \prod_{i=1}^{n'} (u_i/A^\varepsilon \psi_0^{p/q})^{m_i}.$$

Ce produit est non-ramifié par rapport à z si et seulement si q divise $m_0 - \sum_{i\ge1} m_i$. Ce monôme contribue à l'une des séries $L, R_1, \ldots, R_{q-1}$ suivant la congruence modulo q de $m_0 - \sum_{i\ge1} m_i$. Si $m_0 < pm_1 + \ldots + pm_{n'}$ on l'écrit sous la forme

$$\prod_{i=1}^{n'} (u_i^{1/p}/(A^{\varepsilon/p}\psi_0^{1/q}))^{m'_i} (u_i^{1/p}/(A^{\varepsilon/p} z^{1/q}))^{pm_i - m'_i}$$

ou les $m'_i \in \mathbb{N}$ sont des entiers vérifiant $m'_i \le pm_i$ et $m'_1 + \ldots + m'_n = m_0$. Ce monôme contribue à l'une des séries $W_{i'}$ telles que $m'_{i'} < pm_{i'}$. ∎

Soit y un point fixé de B. On pose $D_y = \{(z,u) \mid z \in]0, a(y)[,\ u \in]0, \beta(x,y)/2[^{n'}\}$. La restriction de la fonction $l_B(y,z,u)$ à D_y s'étend en un germe de fonction analytique de (z,u). A contrario, les restrictions des fonctions $r_j(y,z,u)$ à D_y ne s'étendent en des germes de fonctions analytiques de (z,u) que si elles sont nulles. La restriction de la fonction $w(y,z,u)$ à D_y ne s'étend en un germe de fonction continue de (z,u) que si elle est nulle. De plus le germe en 0 de la restriction de la fonction θ à D_y coïncide avec la restriction d'un germe de fonction analytique si et seulement si la restriction à D_y de la différence $\theta(y,z,u) - l_B(y,z,u)$ est nulle. Ceci est vérifié si et seulement si les restrictions à D_y des fonctions $r_j(y,z,u)$ et $w(y,z,u)$ sont nulles. Or, on déduit de la propriété de noethérianité des fonctions analytiques qu'il existe un entier q' tel que les séries $R_j(t_0,\dots,t_{n'+k'})$ et $W_i(t_1,\dots,t_{2n'+k'})$ sont indépendantes respectivement des $n'+1$ premières variables et des n' premières variables aux points $(0,\dots,0,t_{n'+1},\dots,t_{n'+k'})$ et $(0,\dots,0,t_{2n'+1},\dots,t_{2n'+k'})$ où les dérivées partielles d'ordre inférieur à q' par rapport aux $n'+1$ premières variables (respectivement d'ordre inférieur à $q'-1$ par rapport aux $2n'$ premières variables) sont nulles. Cette affirmation appliquée à la fonction θ et aux fonctions r_j et w permet de conclure à l'énoncé suivant.

Lemme 3. *Il existe une partition de B en deux sous-analytiques globaux R et S vérifiant :*

• *Si $y \in R$, le germe en 0 de la restriction de la fonction θ à D_y coïncide avec la restriction d'un germe de fonction analytique : la restriction à D_y de la différence $\theta(y,z,u) - l_B(y,z,u)$ est nulle.*

• *Si $y \in S$, le germe en 0 de la restriction de la fonction θ à D_y ne peut s'étendre en un germe de fonction de classe $C^{q'+q}$.*

Preuve. Le sous-analytique global R est le lieu d'annulation des fonctions sous-analytiques globales de la forme $c(0,\dots,0,\psi_1,\dots,\psi_{k'})$ où c est une des dérivées partielles indiquées précédemment. ■

On note l la fonction sous-analytique globale suivante : $l(x) = l_B(x)$ s'il existe $Y \in \mathcal{P}$ et $B \in \mathcal{P}'_Y$ tel que $x \in B$, $l(x) = 0$ sinon. On note Q le plus grand des entiers $q'+q$, lorsque $B \in \mathcal{P}'_Y$ et $Y \in \mathcal{P}$. L'affirmation suivante est un corollaire du lemme 3 : *Soit $y \in]0,1[^n$ le germe en 0 de la fonction $(z,v) \mapsto \theta(y,z,v)$ est la restriction d'un germe de fonction analytique ssi la différence $(z,u) \mapsto \theta(y,z,u) - l(y,z,u)$ est nul. Sinon ce n'est pas la restriction d'un germe de fonction de classe C^Q.*

L'auteur remercie Jean-Philippe Rolin sans qui ce travail n'aurait pas existé.

Bibliographie

[BM] E. Bierstone et P. Milman, *Semianalytic and subanalytic sets*, Publ. IHES 67 (1988), 5–42.

[DM] L. van den Dries et C. Miller, *Extending Tamm's theorem*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 44 (1994), 1367–1395.

[Ga] A. Gabrielov, *Projections of semi-analytic sets*, Functional Anal. Appl. 2 (1968), 282–291.

[Ku] K. Kurdyka, *Points réguliers d'un sous-analytique*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 38 (1988), 133–156.

[LR] J.-M. Lion et J.-P. Rolin, *Théorème de préparation pour les fonctions logarithmico-exponentielles*, ibid. 47 (1997), 859–884.

[Ło1] S. Łojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, preprint I.H.E.S., 1965.

[Ło2] —, *Triangulation of semi-analytic sets*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 18 (1964), 449–474.

[ŁTZ] S. Łojasiewicz, J.-C. Tougeron et M.-A. Zurro, *Eclatements des coefficients des séries entières et deux théorèmes de Gabrielov*, Manuscripta Math. 92 (1997), 325–337.

[Par] A. Parusiński, *Lipschitz stratification of subanalytic sets*, Ann. Ecole Norm. Sup. 27 (1994), 661–696.

[Paw] W. Pawłucki, *Le théorème de Puiseux pour une application sous-analytique*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 32 (1984), 555–559.

[Ta] M. Tamm, *Subanalytic sets in the calculus of variation*, Acta Math. 146 (1981), 167–199.

Laboratoire de Topologie
CNRS-UMR 5584
Université de Bourgogne
BP 400
21011 Dijon Cedex, France
E-mail: lion@u-bourgogne.fr

Reçu par la Rédaction le 11.12.1997