

Sur une algèbre Q -symétrique

par A. GUICHARDET (Palaiseau)

Abstract. We establish several properties of a quadratic algebra over a field k , which is a deformation of the symmetric algebra Sk^3 . In particular, we prove that A is an integral domain, noetherian and Koszul; we compute its first Hochschild cohomology group; we determine the corresponding Poisson structure on k^3 and its symplectic leaves; we define an involution on A and describe the corresponding irreducible involutive representations.

1. Introduction. Ce travail est consacré à une étude (encore partielle) d'une algèbre quadratique sur un corps k ; cette algèbre, notée A ou $A_{q,C}$, est une déformation de l'algèbre symétrique Sk^3 ; elle dépend de deux paramètres q et $C \in k$, $q \neq 0$, et est définie par trois générateurs X, Y, Z , avec les relations

$$(1.1) \quad YX - q^2XY, \quad ZY - q^2YZ, \quad ZX - XZ - CY^2.$$

On supposera toujours q non racine de l'unité.

Expliquons comment cette algèbre s'introduit dans l'étude des groupes quantiques. Les groupes euclidiens E_n , produits semi-directs de $SO(n, k)$ par k^n , jouent un rôle important tant en mathématiques qu'en physique, et il est intéressant de les "quantifier", i.e. d'en construire des déformations. On connaît des déformations de E^2 (voir [4], ainsi que [12] pour le point de vue des C^* -algèbres) et de E_3 (voir [3]). Le point de vue adopté ici est le suivant : on connaît le groupe quantique $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(n, k))$, cas particulier de l'algèbre $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ définie pour toute algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} par Drinfeld et Jimbo; on sait que si q est générique, les représentations irréductibles de dimension finie de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ sont en correspondance bijective avec celles de \mathfrak{g} ; il est donc naturel de procéder comme suit :

(1) remplacer la représentation naturelle π de $\mathfrak{so}(n, k)$ dans k^n par la représentation correspondante π_q de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(n, k))$ dans k^n ; on peut alors considérer la représentation $\otimes^2 \pi$ de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(n, k))$ dans $\otimes^2 k^n$;

1991 *Mathematics Subject Classification*: 16W10, 18G15.

Key words and phrases: deformations, derivations, symplectic leaves, representations.

(2) remplacer l'algèbre symétrique Sk^n par le quotient de l'algèbre tensorielle $\otimes k^n$ par l'idéal bilatère engendré par $\Lambda_q^2 k^n$, sous-module de $\otimes^2 k^n$ correspondant naturellement à $\Lambda^2 k^n$; on obtient une algèbre notée $S_q k^n$;

(3) faire le produit semi-direct (ou smash product) de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(n, k))$ par $S_q k^n$; on sait en effet que l'algèbre enveloppante de E_n est le produit semi-direct de $\mathcal{U}(\mathfrak{so}(n, k))$ par Sk^n (cf. [7]).

Le présent travail est consacré à l'étude de $S_q k^3$; $\mathfrak{so}(3, k)$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, k)$; rappelons que $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2, k))$ admet trois générateurs H, E, F et que sa représentation irréductible de dimension 3 admet une base (v_0, v_1, v_2) dans laquelle l'action de ces générateurs est donnée par

$$\begin{aligned}\pi_q(H) \cdot v_k &= (2 - 2k) \cdot v_k, \\ \pi_q(X) \cdot v_k &= ((q^{3-k} - q^{k-3})/(q - q^{-1})) \cdot v_{k-1}, \\ \pi_q(Y) \cdot v_k &= ((q^{k+1} - q^{-k-1})/(q - q^{-1})) \cdot v_{k+1}.\end{aligned}$$

Le sous-module de $\otimes^2 k^3$ correspondant naturellement à $\Lambda^2 k^3$ admet pour base les tenseurs $v_1 \otimes v_0 - q^2 v_0 \otimes v_1, v_2 \otimes v_1 - q^2 v_1 \otimes v_2, v_2 \otimes v_0 - v_0 \otimes v_2 - C v_1 \otimes v_1$ où $C = (q - q^{-1})/(q + q^{-1})$. Écrivant X, Y, Z au lieu de v_0, v_1, v_2 , on voit que l'algèbre $S_q k^3$ est isomorphe à l'algèbre $A_{q,C}$ où $C = (q - q^{-1})/(q + q^{-1})$; il a paru intéressant d'examiner le cas où C est un paramètre indépendant de k ; en effet les algèbres du type $A_{q,0}$ ont été étudiées par divers auteurs ([11], [1], etc.); de plus, il est clair que les algèbres correspondant à des valeurs non nulles de C sont toutes isomorphes entre elles; par contre, on verra plus loin (proposition 4.7) qu'elles ne sont pas isomorphes à $A_{q,0}$.

Nous démontrerons les résultats suivants :

§2 : base à la Poincaré–Birkhoff–Witt, centre, graduation, noethérianité, intégrité.

§3 : calcul du groupe de cohomologie de Hochschild $H^1(A_{q,C}, A_{q,C})$.

§4 : résolutions libres des $A_{q,C}$ -modules de dimension 1; koszulité et algèbre duale de $A_{q,C}$.

§5 : déformation formelle de $k[X, Y, Z]$ correspondant à $A_{q,C}$ et structure de Poisson associée sur k^3 .

§6 : involution sur $A_{q,C}$ et représentations involutives irréductibles correspondantes.

2. Premières propriétés de $A_{q,C}$

2.1. PROPOSITION. *Les éléments $X^m Y^n Z^p$ ($m, n, p \in \mathbb{N}$) forment une base de $A_{q,C}$.*

Démonstration. On applique le lemme diamant de Bergman (cf. par exemple [5], I.2.2) au système de réductions suivant : $YX \rightarrow q^2 XY, ZY \rightarrow q^2 YZ, ZX \rightarrow XZ + CY^2$; on vérifie immédiatement qu'il est confluent;

d'autre part on peut prendre, sur l'ensemble des monômes, la relation d'ordre définie par le nombre d'inversions.

2.2. NOTATIONS. Un élément f de $A_{q,C}$ sera noté

$$(2.1) \quad f = \sum_{m,n,p} f_{m,n,p} X^m Y^n Z^p.$$

On posera

$$(n)_q = (q^{4n} - 1)/(q^4 - 1), \quad (n)_q! = (1)_q(2)_q \dots (n)_q,$$

$$\binom{m}{n}_q = \frac{(m)_q!}{(n)_q!(m-n)_q!}, \quad C_n = C \cdot (n)_q.$$

2.3. LEMME. On a

$$Z^m X - X Z^m = C_m Y^2 Z^{m-1}, \quad Z X^m - X^m Z = C_m X^{m-1} Y^2.$$

Démonstration. Par récurrence sur m .

2.4. COROLLAIRE. L'algèbre $A_{q,C}$ est graduée avec $\text{degré}(X^m Y^n Z^p) = m + n + p$.

2.5. PROPOSITION. Le centre \mathcal{Z} de $A_{q,C}$ est l'ensemble des polynômes par rapport à l'élément $\varphi = (1 - q^4)XZ + CY^2$.

Démonstration. On vérifie immédiatement que $\varphi \in \mathcal{Z}$. Par ailleurs \mathcal{Z} est gradué et on notera \mathcal{Z}_d sa composante homogène de degré d . Soit f un élément de \mathcal{Z}_d ; écrivant que $Yf - fY = 0$, on obtient $f_{m,n,p} = 0$ si $m \neq p$; écrivant que $Xf - fX = 0$, ou que $Zf - fZ = 0$, on voit que

$$f_{m,n,m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ C_{m+1} \dots C_{m+v} ((1 - q^4) \dots (1 - q^{4v}))^{-1} K_d & \text{si } n = 2v, \end{cases}$$

où K_d est fonction de d seulement; ceci montre que \mathcal{Z}_d est nul si d est impair, et de dimension 1 si d est pair; il est donc réduit aux multiples de $\varphi^{d/2}$.

2.6. PROPOSITION. L'algèbre $A_{q,C}$ est noethérienne.

Démonstration. Cas $C \neq 0$. D'après ce qui précède, on peut supposer $C = q^2 - q^{-2}$. Rappelons la définition de l'algèbre $\mathcal{F}_q(M(2, k))$, déformation de l'algèbre $\mathcal{F}(M(2, k))$ des polynômes sur $M(2, k)$; elle est engendrée par 4 éléments a, b, c, d avec les relations suivantes :

$$ba - qab, \quad ca - qac, \quad db - qbd, \quad dc - qcd,$$

$$cb - bc, \quad da - ad - (q - q^{-1})bc;$$

elle est noethérienne (cf. [6], Theorem IV.4.1). Alors $A_{q,C}$ est noethérienne comme quotient de l'algèbre $\mathcal{F}_{q^2}(M(2, k))$ par la relation $b - c$.

Cas $C = 0$. Démonstration analogue à celle de [6], Theorem IV.4.1.

2.7. PROPOSITION. L'algèbre $A_{q,C}$ est intègre.

Démonstration. Notons B le quotient de $A_{q,C}$ par l'idéal bilatère engendré par Y ; B est isomorphe à $k[X,Y]$, donc intègre. Notons Π le morphisme canonique $A_{q,C} \rightarrow B$; pour $f \in A_{q,C}$, on a $\Pi(f) = 0$ si et seulement si f s'écrit Yf' , f' étant alors unique. Ceci étant, soit $f, g \in A_{q,C}$ avec $fg = 0$; comme B est intègre, on a $\Pi(f) = 0$ ou $\Pi(g) = 0$; supposons par exemple $\Pi(f) = 0$; alors $f = Yf'$, $f'g = 0$; de proche en proche on arrive à des relations de la forme $f = Y^m\varphi$, $g = Y^n\psi$, $\varphi\psi = 0$, φ et ψ étant en outre de degré 0 par rapport à Y ; alors φ ou ψ est nul.

3. Dérivations de $A_{q,C}$. On suppose ici C non nul, et on écrit A au lieu de $A_{q,C}$.

3.1. PROPOSITION. *Le groupe de cohomologie de Hochschild $H^1(A, A)$ admet une base dont les éléments ont des représentants dans $Z^1(A, A)$ de deux types, notés respectivement Φ_k^I et Φ_k^{II} , $k \in \mathbb{N}$.*

Type I :

$$\begin{aligned}\Phi_k^I(X) &= \sum_{p=0}^k \varrho_{k,p} X^{p+1} Y^{2k-2p} Z^p, \\ \Phi_k^I(Y) &= \sum_{p=0}^k \sigma_{k,p} X^p Y^{2k-2p+1} Z^p, \\ \Phi_k^I(Z) &= \sum_{p=0}^k \varrho_{k,p} X^p Y^{2k-2p} Z^{p+1},\end{aligned}$$

où $\varrho_{k,p}$ et $\sigma_{k,p}$ sont donnés par

$$\begin{aligned}\sigma_{k,p} &= \left(\frac{-C}{q^2(q^4-1)} \right)^{k-p} \binom{k}{p}_q, \\ \varrho_{k,p} &= (C_{p+1}^{-1})^{-1} ((q^{4(k-p+1)} - 1)\varrho_{k,p-1} + q^{2p}\sigma_{k,p}), \\ \varrho_{k,0} &= C^{-1}\sigma_{k,0}.\end{aligned}$$

En particulier

$$\Phi_0^I(X) = C^{-1}X, \quad \Phi_0^I(Y) = Y, \quad \Phi_0^I(Z) = C^{-1}Z.$$

Type II :

$$\Phi_k^{II}(X) = X^{k+1}Z^k, \quad \Phi_k^{II}(Y) = 0, \quad \Phi_k^{II}(Z) = -X^kZ^{k+1}.$$

Principe de la démonstration. Un 1-cocycle $\varphi \in Z^1(A, A)$ est entièrement déterminé par la donnée des trois éléments $\varphi(X)$, $\varphi(Y)$, $\varphi(Z)$ soumis aux trois conditions suivantes :

$$\begin{aligned} Y\varphi(X) + \varphi(Y)X - q^2X\varphi(Y) - q^2\varphi(X)Y &= 0, \\ Z\varphi(Y) + \varphi(Z)Y - q^2Y\varphi(Z) - q^2\varphi(Y)Z &= 0, \\ Z\varphi(X) + \varphi(Z)X - X\varphi(Z) - \varphi(X)Z - CY\varphi(Y) - C\varphi(Y)Y &= 0. \end{aligned}$$

Des calculs faciles, mais fastidieux, montrent que φ est entièrement déterminé par la donnée arbitraire des coefficients $\varphi(Y)_{p,1,p}$, $\varphi(Y)_{m,n,p}$ avec $m \neq p$, $\varphi(X)_{p+1,n,p}$, et que φ est un cobord si et seulement si $\varphi(Y)_{p,1,p}$ et $\varphi(Y)_{p+1,0,p}$ sont nuls pour tout p ; on obtient alors Φ_k^I en prenant

$$\begin{aligned} \varphi(Y)_{p,1,p} &= \delta_{k,p}, \\ \varphi(Y)_{m,n,p} &= 0 \quad \text{si } m \neq p, \\ \varphi(X)_{p+1,n,p} &= \begin{cases} \varrho_{k,p} & \text{si } n = 2k - 2p, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

et Φ_k^{II} en prenant

$$\begin{aligned} \varphi(Y)_{m,n,p} &= 0 \quad \forall m, n, p, \\ \varphi(X)_{p+1,n,p} &= \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, p = k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

3.2. Remarque. On déduit de 3.1 que $H^1(A, A)$ admet une autre base avec représentants Φ'_k, Φ''_k définis par

$$\begin{aligned} \Phi'_k(f) &= ((1 - q^4)XZ + CY^2)^k \cdot \Phi_0^I(f), \\ \Phi''_k(f) &= ((1 - q^4)XZ + CY^2)^k \cdot \Phi_0^{II}(f). \end{aligned}$$

4. Représentations de dimension 1 de $A_{q,C}$ et leurs extensions.

On suppose encore C non nul, et on écrit A au lieu de $A_{q,C}$.

4.1. Les représentations en question sont les $\chi_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \in k$, définies par

$$\chi_{\alpha,\beta}(X) = \alpha, \quad \chi_{\alpha,\beta}(Y) = 0, \quad \chi_{\alpha,\beta}(Z) = \beta.$$

On notera $k_{\alpha,\beta}$ le A -module correspondant.

4.2. PROPOSITION. *Le A -module $k_{\alpha,\beta}$ admet la résolution libre suivante :*

$$(4.1) \quad 0 \rightarrow A \xrightarrow{d_2} A^3 \xrightarrow{d_1} A^3 \xrightarrow{d_0} A \xrightarrow{\chi_{\alpha,\beta}} k \rightarrow 0,$$

où

$$\begin{aligned} d_0(f_0, f_1, f_2) &= f_0 \cdot (X - \alpha) + f_1 \cdot Y + f_2 \cdot (Z - \beta), \\ d_1(g_0, g_1, g_2) &= (g_1 \cdot (Z - \beta) - g_2 \cdot Y, g_2 \cdot (q^2X - \alpha) - g_0 \cdot (Z - q^2\beta) - Cg_1Y, \\ &\quad q^2g_0Y - g_1(X - \alpha)), \\ d_2(h) &= (h \cdot (X - q^2\alpha), h \cdot Y, h \cdot (q^{-2}Z - \beta)). \end{aligned}$$

Démonstration. Il est facile de vérifier que l'on a bien un complexe. Pour démontrer l'exactitude, il sera commode de remplacer les développe-

ments (2.1) par des développements de la forme

$$f = \sum_{m,n,p} (f_{m,n,p})^{\sim} (X - \alpha)^m Y^n (Z - \beta)^p.$$

On a $\text{Im } d_0 = \text{Ker } \chi_{\alpha,\beta}$ car si $f \in \text{Ker } \chi_{\alpha,\beta}$ on a $f = d_0(f_0, f_1, f_2)$, avec

$$\begin{aligned} f_0 &= \sum_{m \geq 1} (f_{m,0,0})^{\sim} (X - \alpha)^{m-1}, \\ f_1 &= \sum_m \sum_{n \geq 1} (f_{m,n,0})^{\sim} (X - \alpha)^m Y^{n-1}, \\ f_2 &= \sum_{m,n} \sum_{p \geq 1} (f_{m,n,p})^{\sim} (X - \alpha)^m Y^n (Z - \beta)^{p-1}. \end{aligned}$$

On a $\text{Im } d_1 = \text{Ker } d_0$ car si $d_0(f_0, f_1, f_2) = 0$, on a $(f_0, f_1, f_2) = d_1(g_0, g_1, g_2)$, avec

$$\begin{aligned} g_1 &= \sum_{m,n} \sum_{p \geq 1} (f_{0;m,n,p})^{\sim} (X - \alpha)^m Y^n (Z - \beta)^{p-1}, \\ g_2 &= - \sum_m \sum_{n \geq 1} (f_{0;m,n,0})^{\sim} (X - \alpha)^m Y^{n-1}, \end{aligned}$$

g_0 étant alors caractérisé par

$$q^2 g_0 \cdot Y = f_2 + g_1 \cdot (x - \alpha).$$

Enfin on a $\text{Im } d_2 = \text{Ker } d_1$ car si $d_1(g_0, g_1, g_2) = 0$, on a $(g_0, g_1, g_2) = d_2(h)$, où $h \cdot Y = g_1$.

4.3. COROLLAIRE. *Etant donnés deux couples (α, β) et (α', β') , $\text{Ext}_A(k_{\alpha,\beta}, k_{\alpha',\beta'})$ est la cohomologie du complexe*

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(A, k) \xrightarrow{d^0} \text{Hom}_A(A^3, k) \xrightarrow{d^1} \text{Hom}_A(A^3, k) \xrightarrow{d^2} \text{Hom}_A(A, k) \rightarrow 0.$$

Mais $\text{Hom}_A(A^n, k)$ est isomorphe à k^n et on en déduit ce qui suit :

4.4. PROPOSITION. *$\text{Ext}_A(k_{\alpha,\beta}, k_{\alpha',\beta'})$ est la cohomologie du complexe*

$$0 \rightarrow k \xrightarrow{d^0} k^3 \xrightarrow{d^1} k^3 \xrightarrow{d^2} k \rightarrow 0,$$

où

$$\begin{aligned} d^0(\lambda) &= ((\alpha' - \alpha)\lambda, 0, (\beta' - \beta)\lambda), \\ d^1(\mu_0, \mu_1, \mu_2) &= ((q^2\beta - \beta')\mu_1, (\beta' - \beta)\mu_0 - (\alpha' - \alpha)\mu_2, (q^2\alpha' - \alpha)\mu_1), \\ d^2(\nu_0, \nu_1, \nu_2) &= (\alpha' - q^{-2}\alpha)\nu_0 + (q^{-2}\beta' - \beta)\nu_2. \end{aligned}$$

4.5. PROPOSITION. *L'algèbre A est de Koszul; en particulier l'algèbre de cohomologie $\text{Ext}_A(k_{0,0}, k_{0,0})$ est isomorphe à l'algèbre duale $A^!$, définie par trois générateurs u, v, w avec les relations*

$$u^2, \quad v^2 - Cuv, \quad w^2, \quad vu + q^{-2}uv, \quad wv + q^{-2}vw, \quad wu + uv.$$

Démonstration. Utilisons les notations de [2], §2.4 : V est l'espace vectoriel de base X, Y, Z ; R est le sous-espace de $V^{\otimes 2}$ de base

$$\begin{aligned}\xi_0 &= Y \otimes X - q^2 X \otimes Y, \\ \xi_1 &= Z \otimes Y - q^2 Y \otimes Z, \\ \xi_2 &= Z \otimes X - X \otimes Z - CY \otimes Y.\end{aligned}$$

K_i^j est l'intersection pour $j = 0, \dots, i-2$ des sous-espaces $V^{\otimes j} \otimes R \otimes V^{\otimes i-j-2}$; ensuite

$$K^i = A \otimes K_i^i.$$

Le complexe de Koszul

$$\rightarrow K^1 \rightarrow K^0 \rightarrow k \rightarrow 0$$

s'identifie à la résolution (4.1) dans le cas $\alpha = \beta = 0$ par les isomorphismes

$$\begin{aligned}(f_0, f_1, f_2) &\in A^3 \rightarrow f_0 \otimes X + f_1 \otimes Y + f_2 \otimes Z \in K^1 \\ (g_0, g_1, g_2) &\in A^3 \rightarrow -g_2 \otimes \xi_0 - g_0 \otimes \xi_1 + g_1 \otimes \xi_2 \in K^2 \\ h &\in A \rightarrow h \otimes (-q^{-2}Z \otimes \xi_0 - X \otimes \xi_1 + Y \otimes \xi_2) \in K^3.\end{aligned}$$

Par suite, le complexe de Koszul est exact, et A est de Koszul ([2], Theorem 10).

La présentation de $A^!$ se vérifie sans peine; enfin l'algèbre $\text{Ext}_A(k_{0,0}, k_{0,0})$ est isomorphe à $(A^!)^{\text{opp}}$ ([2], Proposition 11), et donc à $A^!$ puisque $A^!$ et son opposée sont isomorphes par l'application $u \rightarrow w, w \rightarrow u, v \rightarrow v$.

4.6. Remarque. On peut démontrer que, si k est algébriquement clos, toute représentation irréductible de dimension finie de A est de dimension 1.

4.7. PROPOSITION. *Si C est non nul, $A_{q,C}$ n'est pas isomorphe à $A_{q,0}$.*

Démonstration. Utilisant la proposition 4.4, on vérifie que $\text{Ext}_A^1(k_{\alpha,\beta}, k_{\alpha,\beta})$ est de dimension 3 si $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, et 2 sinon. Par ailleurs $A_{q,0}$ admet des représentations de dimension 1 analogues aux $\chi_{\alpha,\beta}$ ainsi que d'autres, soit χ_γ , avec γ non nul dans k , définies par $\chi_\gamma(X) = \chi_\gamma(Z) = 0$, $\chi_\gamma(Y) = \gamma$. Des calculs sans difficultés montrent que $\text{Ext}_{A_{q,0}}^1(k_\gamma, k_\gamma)$ est de dimension 1.

5. L'algèbre $A_{q,C}$ comme déformation formelle de $k[X, Y, Z]$. On suppose ici $C = (q - q^1)/(q + q^{-1})$.

5.1. Déformation formelle de $k[X, Y, Z]$. Pour tout k -espace vectoriel E on désigne par $E[[h]]$ l'espace des séries formelles en h à coefficients dans E et on le munit de la topologie h -adique (voir par exemple [5], chapitre III).

Notons $k\langle X, Y, Z \rangle$ l'algèbre associative libre engendrée par X, Y, Z , et A_h le quotient de l'algèbre $(k\langle X, Y, Z \rangle)[[h]]$ par l'idéal bilatère fermé engendré par les éléments $YX - e^{2h}XY, ZY - e^{2h}YZ, YX - XZ - \text{th}(h)Y^2$. Le lemme

diamant de Bergman permet de démontrer, comme par exemple dans le cas de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2, k))$ (cf. [5], §IV.1.1), que A_h est une déformation formelle de l'algèbre $A_0 = k[X, Y, Z]$, i.e. que A_h est isomorphe à $A_0[[h]]$ en tant que $k[[h]]$ -module.

5.2. Calcul du crochet de Poisson. On va calculer le crochet de Poisson $\{, \}$ sur l'algèbre symétrique Sk^3 associé à cette déformation formelle. Rappelons qu'il est défini par

$$\{f, g\} = \mu_1(f, g) - \mu_1(g, f) \quad \forall f, g \in A_0,$$

où l'on a noté $\mu_n : A_0 \otimes A_0 \rightarrow A_0$ les diverses composantes de la multiplication de A_h (sur tout ceci, voir [5], chapitre III).

Calculant dans A_h modulo h^2 on vérifie par récurrence sur m et p que

$$Z^m X^p = X^p Z^m + hmpX^{p-1}Y^2Z^{m-1},$$

d'où résulte facilement que

$$\begin{aligned} \{X^m Y^n Z^p, X^{m'} Y^{n'} Z^{p'}\} &= 2(nm' - mn' + pn' - np')X^{m+m'}Y^{n+n'}Z^{p+p'} \\ &\quad + (pm' - mp')X^{m+m'-1}Y^{n+n'+2}Z^{p+p'-1}. \end{aligned}$$

Posant $f = X^m Y^n Z^p \in Sk^3$, et de même pour f' , cette relation s'écrit

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \{f, f'\} &= 2XY \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \cdot \frac{\partial f'}{\partial X} - \frac{\partial f}{\partial X} \cdot \frac{\partial f'}{\partial Y} \right) \\ &\quad + 2YZ \left(\frac{\partial f}{\partial Z} \cdot \frac{\partial f'}{\partial Y} - \frac{\partial f}{\partial Y} \cdot \frac{\partial f'}{\partial Z} \right) \\ &\quad + Y^2 \left(\frac{\partial f}{\partial Z} \cdot \frac{\partial f'}{\partial X} - \frac{\partial f}{\partial X} \cdot \frac{\partial f'}{\partial Z} \right) \end{aligned}$$

et ceci reste vrai, par linéarité, pour tous $f, f' \in Sk^3$.

On a donc démontré ce qui suit :

5.3. PROPOSITION. *Le crochet de Poisson sur $k[X, Y, Z]$ associé à sa déformation formelle A_h est donné par (5.1).*

5.4. Feuilles symplectiques. On suppose ici $k = \mathbb{C}$. A toute structure de Poisson sur une variété X (ici k^3) correspond un champ de bivecteurs Π tel que

$$\{f, f'\}(x) = \langle \Pi(x), df \otimes df' \rangle = \sum_{i,j} \Pi(x)_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f'}{\partial x_j}$$

et un champ d'applications $\tilde{\Pi}(x) : T_x^* X \rightarrow T_x X$ donné par

$$(\tilde{\Pi}(x) \cdot \xi)_i = \sum_j \Pi(x)_{i,j} \xi_j \quad \forall \xi \in T_x^* X.$$

Les *feuilles symplectiques* sont les sous-variétés intégrales du champ de sous-espaces tangents $x \rightarrow \text{Im } \tilde{\Pi}(x)$.

Dans le cas présent, posant $x_1 = X$, $x_2 = Y$, $x_3 = Z$, (5.1) montre que

$$\tilde{\Pi}(x) = Y \begin{pmatrix} 0 & -2X & -Y \\ 2X & 0 & -2Z \\ Y & 2Z & 0 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace $\text{Im } \tilde{\Pi}(x)$ est nul si $Y = 0$; dans le cas contraire, il est égal à l'ensemble des vecteurs tangents $\sum_i \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ vérifiant

$$2Z\eta_1 - Y\eta_2 + 2X\eta_3 = 0;$$

une courbe $t \rightarrow x(t)$ vérifie $x'(t) \in \tilde{\Pi}(x(t))$ si et seulement si l'on a

$$2ZX' - YY' + 2XZ' = 0,$$

i.e.

$$4XZ - Y^2 = \text{const.}$$

5.5. PROPOSITION. *Les feuilles symplectiques sont*

- les points $(X, 0, Z)$,
- les surfaces définies par les relations

$$4XZ - Y^2 = \text{const}, \quad Y \neq 0.$$

Démonstration. On vérifie sans peine que ces surfaces sont connexes.

6. L'algèbre involutive $A_{q,C}$. Dans ce paragraphe, on suppose $k = \mathbb{C}$, q réel > 1 et on prend $C = 1$; on écrit A au lieu de $A_{q,C}$.

6.1. DÉFINITION. On munit A d'une structure d'algèbre involutive en posant

$$(6.1) \quad X^* = -qZ, \quad Z^* = -q^{-1}X, \quad Y^* = Y.$$

Il est en effet immédiat que cette opération est compatible avec les relations (1.1).

6.2. Remarque. Expliquons le choix de cette involution. Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{C}^3 ; il est bien clair que l'action naturelle de $so(3, \mathbb{R})$ dans \mathbb{C}^3 conserve le sous-espace vectoriel réel engendré par e_1, e_2, e_3 ; celui-ci correspond à l'automorphisme involutif antiholomorphe θ du groupe de Lie \mathbb{C}^3 défini par

$$\theta(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = \bar{x}_1e_1 + \bar{x}_2e_2 + \bar{x}_3e_3.$$

A l'isomorphisme $so(3, \mathbb{C}) \rightarrow sl(2, \mathbb{C})$ mentionné au §1, correspond un isomorphisme entre la représentation naturelle de $so(3, \mathbb{C})$ dans \mathbb{C}^3 et la repré-

sentation de dimension 3 de $sl(2, \mathbb{C})$; cet isomorphisme est donné par $e_1 \rightarrow v_2 - v_0$, $e_2 \rightarrow -i(v_2 + v_0)$, $e_3 \rightarrow v_1$; il transforme θ en l'automorphisme τ suivant :

$$\tau(x_0v_0 + x_1v_1 + x_2v_2) = -\bar{x}_2v_0 + \bar{x}_1v_1 - \bar{x}_0v_2.$$

A cet automorphisme τ correspond l'involution $*$ sur l'algèbre des fonctions polynômiales sur \mathbb{C}^3 donnée par $f^*(v) = \overline{f(\tau(v))}$, soit encore

$$X^* = -Z, \quad Z^* = -X, \quad Y^* = Y,$$

et ceci explique le choix de (6.1).

6.3. Représentations involutives irréductibles de A . On appelle *représentation involutive* de A tout morphisme d'algèbres involutives de A dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ des opérateurs bornés d'un espace hilbertien complexe E .

Nous poserons, pour tout entier positif k ,

$$\alpha_k = \left(\frac{1 - q^{-4k-4}}{1 - q^{-4}} \right)^{1/2}.$$

PROPOSITION. (i) *La représentation $\chi_{\alpha, \beta}$ de dimension 1 (cf. §4) est involutive si et seulement si l'on a $\beta = -q^{-1}\bar{\alpha}$.*

(ii) *Soit λ un nombre réel non nul; soit E un espace hilbertien muni d'une base orthonormée (e_0, e_1, \dots) . On définit une représentation involutive irréductible π_λ de A dans E en posant*

$$\begin{aligned} \pi_\lambda(Y) \cdot e_k &= \lambda q^{-2k} \cdot e_k, \\ \pi_\lambda(X) \cdot e_k &= \lambda q^{1/2} \alpha_{k-1} \cdot e_{k-1} \quad \text{pour } k > 0, \\ \pi_\lambda(X) \cdot e_0 &= 0, \\ \pi_\lambda(Z) \cdot e_k &= \lambda q^{-1/2} \alpha_k \cdot e_{k+1}. \end{aligned}$$

(iii) *Les représentations ci-dessus sont deux à deux inéquivalentes, et toute représentation involutive irréductible de A est équivalente à l'une d'entre elles.*

Démonstration. (a) (i) est trivial.

(b) On vérifie immédiatement que les formules données sont compatibles avec les relations (1.1) et (6.1). De plus, $\pi_\lambda(Y)$ étant diagonal avec coefficients deux à deux distincts, tout opérateur commutant avec π_λ est diagonal; commutant avec $\pi_\lambda(X)$, il est scalaire.

(c) Les représentations correspondant à des valeurs distinctes de λ sont inéquivalentes parce que λ est l'unique valeur propre de plus grande valeur absolue de $\pi_\lambda(Y)$.

(d) Soit ϱ une représentation involutive irréductible de A dans un espace F de dimension > 1 . Comme $\text{Ker } \varrho(Y)$ est stable par $\varrho(A)$ et que toute représentation irréductible annihilant Y est de dimension 1, on voit que $\text{Ker } \varrho(Y)$ est nul.

Montrons d'abord qu'il existe un réel non nul λ_0 tel que le spectre de $\varrho(Y)$ soit contenu dans l'ensemble des $q^{2k}\lambda_0$, $k \in \mathbb{Z}$. On peut reprendre la démonstration de [9], Proposition 3.1; supposons le contraire; il existe alors λ_1 et $\lambda_2 \in \text{sp}\varrho(Y)$ et un ouvert U contenant λ_1 , ne contenant pas λ_2 , et stable par multiplication par q^2 . Le projecteur spectral de $\varrho(Y)$ correspondant à U commute à $\varrho(A)$ et est distinct de 0 et de 1. Contradiction.

(e) Il résulte de (d) que $\text{sp}\varrho(Y)$ est formé de valeurs propres, toutes de même signe, plus éventuellement 0; soient λ la valeur propre de plus grande valeur absolue, e_0 un vecteur propre correspondant; posons, pour $k > 0$,

$$e_k = (-\lambda q^{-1/2})^{-k} (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})^{-1} \cdot \varrho(Z)^k \cdot e_0.$$

On a trivialement

$$\varrho(Z) \cdot e_k = -\lambda q^{-1/2} \alpha_k \cdot e_{k+1};$$

utilisant la relation $ZY - q^2YZ = 0$, on voit par récurrence que

$$\varrho(Y) \cdot e_k = \lambda q^{-2k} \cdot e_k.$$

La relation $YX - q^2XY = 0$ entraîne $\varrho(X) \cdot e_0 = 0$; enfin, la relation $ZX - XZ - Y^2 = 0$ implique par récurrence que tous les e_k sont non nuls, et que l'on a

$$\varrho(X) \cdot e_k = \lambda q^{1/2} \alpha_{k-1} \cdot e_{k-1} \quad \text{pour } k > 0.$$

Le sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs est stable par $\varrho(A)$, donc égal à E , et ϱ est équivalente à π_λ .

6.4. Remarque. Divers auteurs ont étudié des algèbres involutives A qui sont des déformations d'algèbres de fonctions sur des variétés M (voir par exemple [8] et [9]); on dispose alors, comme dans le cas présent, d'un automorphisme involutif τ et d'une structure de Poisson sur M , et l'on constate qu'il existe une correspondance bijective entre les représentations involutives irréductibles de A , et certaines feuilles symplectiques. La situation présente semble moins agréable; en effet, parmi les feuilles symplectiques décrites à la proposition 5.5, sont invariantes par l'automorphisme τ :

- les points $(X, 0, Z)$ avec $Z = -\bar{X}$, qu'on peut évidemment mettre en correspondance avec les représentations involutives de dimension 1;
- les surfaces S_k définies par $Y \neq 0, 4XZ - Y^2 = K$, où K est un nombre réel; mais alors la feuille S_0 ne semble correspondre à aucune représentation.

Par ailleurs, l'ensemble des points τ -invariants de S_k n'est non vide que si $K < 0$, et on n'obtiendrait de cette façon que la moitié des représentations $\pi_\lambda \dots$

Addenda. 1) L'algèbre $A_{q,C}$ est isomorphe à une des q -oscillator algebras étudiées dans la littérature physique; voir, par exemple, l'article de Burban et Klimyk, Lett. Math. Phys. 29 (1993), 13–18, et sa bibliographie.

2) (Complément à la proposition 4.5). On démontre (communication écrite de M. Van den Bergh) que toute déformation plate d'une algèbre de Koszul est encore de Koszul pour toute valeur générique du paramètre de déformation.

3) N°5.4; on peut simplifier le calcul de $\tilde{\Pi}(x)$ en remarquant que l'on a

$$\tilde{\Pi}(x)_{i,j} = \{x_i, x_j\} = \mu_1(x_i, x_j) - \mu_1(x_j, x_i).$$

4) (Complément à la proposition 5.3). On peut calculer explicitement les applications μ_n et constater que ce sont des opérateurs bidifférentiels; en fait, on démontre (communication écrite de G. Pinczon) que c'est un phénomène général; toute déformation formelle d'une algèbre de polynômes est équivalente à un $*$ -produit, i.e. à une déformation formelle telle que tous les μ_n soient des opérateurs bidifférentiels.

5) N°6.4; en fait, on obtient quand même une correspondance bijective si l'on observe que l'ensemble des points τ -invariants de S_K , pour $K < 0$, est une sphère privée d'un grand cercle, et, par suite, admet deux composantes connexes.

Bibliographie

- [1] J. Alev et M. Chamarie, *Dérivations et automorphismes de quelques algèbres quantiques*, Comm. Algebra 20 (1992), 1787–1802.
- [2] A. Beilinson, V. Ginzburg and W. Soergel, *Koszul duality patterns in representation theory*, J. Amer. Math. Soc. 9 (1996), 473–527.
- [3] E. Celeghini, R. Giachetti, E. Sorace and M. Tarlini, *The 3-dimensional Euclidean quantum group $E(3)_q$ and its R-matrix*, J. Math. Phys. 32 (1991), 1159–1165.
- [4] V. Chari and A. Pressley, *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge Univ. Press, 1994.
- [5] A. Guichardet, *Groupes quantiques*, InterEditions, 1995.
- [6] C. Kassel, *Quantum Groups*, Springer, 1995.
- [7] R. K. Molnar, *Semi-direct products of Hopf algebras*, J. Algebra 47 (1977), 29–51.
- [8] Ya. S. Soïbel'man, *The algebra of functions on a compact quantum group and its representations*, Algebra i Analiz 2 (1) (1990), 190–212 (in Russian); English transl.: Leningrad Math. J. 2 (1) (1991), 161–178.
- [9] L. L. Vaksman and Y. S. Soïbel'man, *An algebra of functions on the quantum group $SU(2)$* , Funktsional. Anal. i Prilozhen. 22 (3) (1988), 1–14 (in Russian); English transl.: Funct. Anal. Appl. 22 (3) (1988), 170–181.
- [10] M. Van den Bergh, *Noncommutative homology of some 3-dimensional quantum spaces*, K-Theory 8 (1994), 213–230.

- [11] M. Wambst, *Complexes de Koszul quantiques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 43 (1993), 1089–1156.
- [12] S. L. Woronowicz, *Quantum $E(2)$ group and its Pontryagin dual*, Lett. Math. Phys. 23 (1991), 251–263.

Centre de Mathématiques
École Polytechnique
91128 Palaiseau, France
E-mail: guich@orphee.polytechnique.fr

Reçu par la Rédaction le 1.9.1995