ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
LXI.2 (1995)

Une fonction β-lipschitzienne qui n'est pas une perturbation compacte d'une fonction dissipative

par Roland Uhl (Karlsruhe)

Résumé. On présente une fonction continue $f : c_0 \to c_0$ qui satisfait à une condition lipschitzienne par rapport à la mesure de non-compacité de Hausdorff (ou Kuratowski), mais telle que f n'est pas la somme d'une fonction dissipative et d'une fonction compacte. Cet exemple attache de l'importance au théorème d'existence de Sabina Schmidt (1989) pour des équations différentielles dans les espaces de Banach.

1. Introduction. Soit E un espace de Banach. On considère le problème de Cauchy

$$u(0) = a, \qquad u'(t) = f(t, u(t)) \tag{1}$$

avec $a \in E$ et une fonction continue $f : [0, T] \times G \to E$ $(T > 0)$ où $G \subset E$ est un voisinage de a. Rappelons qu'il existe une solution $u : [0, \tau] \to G$ $(0 < \tau \le T)$ si E a une dimension finie. D'autre part d'après Godunov [1], dans chaque espace de Banach de dimension infinie il y a un problème de Cauchy de la façon présente qui n'admet pas de solutions.

D'après Sabina Schmidt (1989) [3], il existe une solution de (1) si f est la somme de deux fonctions continues où l'une est dissipative et l'autre satisfait à une condition lipschitzienne par rapport à la mesure de non-compacité de Hausdorff (ou Kuratowski). Ce théorème d'existence généralise non seulement des résultats pareils de Szufla et de Martin, mais aussi un théorème de Volkmann [6]. D'après celui-là, le problème (1) a une solution si f est la somme de deux fonctions continues où l'une est dissipative et l'autre compacte. Mais maintenant un problème s'impose : Est-ce que le théorème de Schmidt admet vraiment plus de fonctions f que celui de Volkmann? Par la présente on peut répondre affirmativement à cette question.

1991 *Mathematics Subject Classification*: 34G20, 47H09, 47H06.
Key words and phrases: ordinary differential equations in Banach spaces, existence, measures of noncompactness, dissipative operators.

2. Notations et théorèmes d'existence. Soit E un espace de Banach. Notons

$$S(z,r) := \{x \in E : \|x-z\| \le r\} \quad (z \in E,\ r \ge 0),$$

et

$$[x,y]_- := \lim_{h\to 0-} \frac{\|x+hy\|-\|x\|}{h} \quad (x,y \in E).$$

Pour chaque ensemble borné $A \subset E$, on désigne par $\beta(A)$ sa mesure de non-compacité de Hausdorff, définie comme l'infimum des nombres réels $r \ge 0$ tels que A peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon r. Rappelons que $\beta(A) = 0$ si et seulement si $\overline{A}$ est compact.

Soient $g, h, k : [0,T] \times G \to E$ des fonctions continues où $T > 0$ et $G \subset E$. On suppose que g est *dissipative*, h *β-lipschitzienne*, et k *compacte*. C'est-à-dire :

(i) g satisfait à une condition lipschitzienne d'un seul côté :

$$[x-y,\ g(t,x)-g(t,y)]_- \le L\|x-y\| \quad (0 \le t \le T;\ x,y \in G),$$

(ii) pour tout ensemble borné $A \subset G$, l'ensemble $h([0,T]\times A)$ est borné et vérifie

$$\beta(h([0,T]\times A)) \le M\beta(A), \tag{2}$$

où L et M sont des constantes,

(iii) pour tout ensemble borné $A \subset G$, l'ensemble $\overline{k([0,T]\times A)}$ est compact, ou équivalent, k vérifie une condition correspondant à (2) avec $M = 0$.

Mentionnons que (i) et (ii) contiennent la condition lipschitzienne ordinaire.

Alors, si a est un point intérieur de G, le problème de Cauchy (1) admet une solution (de classe C^1) $u : [0,\tau] \to G$ $(0 < \tau \le T)$ dans les cas suivants :

$f = h$:	Szufla (1968) [4],
$f = g$:	Martin (1970) [2],
$f = g + k$:	Volkmann (1980) [6],
$f = g + h$:	Schmidt (1989) [3].

Le théorème d'existence de Schmidt généralise les autres. Il admet vraiment plus de fonctions f que celui de Volkmann. En effet, l'exemple suivant montre que la fonction h n'est pas généralement représentable sous la forme $\widetilde{g}+\widetilde{k}$ (même pas localement) où $\widetilde{g}$ est dissipative et $\widetilde{k}$ compacte. On présente l'exemple en version autonome (indépendante de t), mais cela n'est pas une restriction.

3. Exemple. Notons c_0 l'espace de Banach des suites *réelles* convergeant vers 0. On obtient une fonction plus simple $f_0 : c_0 \to c_0$ (déjà notée dans

[5]) de la façon annoncée en prenant la fonction

$$\varphi_0(\xi) := \xi \sin \frac{1}{\xi} \quad (\xi \neq 0), \qquad \varphi_0(0) := 0 \tag{3}$$

dans le

Théorème. *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que*

$$\limsup_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \frac{\varphi(\xi) - \varphi(\eta)}{\xi - \eta} = +\infty \tag{4}$$

et

$$|\varphi(\xi)| \le M|\xi| \quad (\xi \in \mathbb{R}),$$

où M est une constante. Alors, la formule

$$f(x) := (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots) \quad (x = (x_1, x_2, \ldots) \in c_0), \tag{5}$$

définit une fonction $f : c_0 \to c_0$ avec les propriétés suivantes:

(a) *f est continue.*

(b) *Pour tout ensemble borné $A \subset E$, l'ensemble $f(A)$ est borné et vérifie*

$$\beta(f(A)) \le M\beta(A).$$

(c) *Sur aucune boule $S(z,r)$ $(z \in c_0,\ r > 0)$, la fonction f n'est représentable sous la forme*

$$f(x) = g(x) + k(x) \quad (x \in S(z,r)) \tag{6}$$

avec des fonctions $g, k : S(z,r) \to c_0$, où g est dissipative, et k compacte.

Démonstration. (a) est évident, car la continuité uniforme de φ sur des ensembles bornés entraîne celle de f.

Pour (b) il suffit de démontrer que

$$\beta(f(S(z,r))) \le Mr \quad (z \in c_0,\ r \ge 0). \tag{7}$$

Soient $z = (z_n) \in c_0$ et $r \ge 0$ fixés. Étant donné $\varepsilon > 0$, on trouve un indice p tel que $|z_n| \le \varepsilon$ pour tout $n > p$. Muniant $\mathbb{R}^p$ de la norme maximum, on recouvre la boule de centre $0 \in \mathbb{R}^p$ et de rayon $K := M(r + \|z\|)$ par un nombre fini de boules de rayon $M(r + \varepsilon)$:

$$S_{\mathbb{R}^p}(0, K) \subset \bigcup_{i=1}^{k} S_{\mathbb{R}^p}((y_1^i, \ldots, y_p^i), M(r+\varepsilon)).$$

En posant

$$y^i := (y_1^i, \ldots, y_p^i, 0, 0, \ldots) \in c_0 \quad (i = 1, \ldots, k),$$

on obtient

$$f(S(z,r)) \subset \bigcup_{i=1}^{k} S(y^i, M(r+\varepsilon)),$$

car pour tout $x \in S(z,r)$ on a

$$|\varphi(x_n)| \le K \quad (n = 1, \ldots, p),$$

et

$$|\varphi(x_n)| \le M(r + \varepsilon) \quad (n > p).$$

Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, (7) est démontré.

Supposons maintenant le contraire de (c). Alors il existe une boule $S(z,r)$ $(z \in c_0,\ r > 0)$ et une représentation (6) telles que

$$[x - y,\ g(x) - g(y)]_- \le L\|x - y\| \quad (x, y \in S(z,r)) \tag{8}$$

où L est une constante, et telles que $\overline{k(S(z,r))}$ est compact. D'après (4), il y a des nombres réels ξ, η vérifiant

$$-r/2 \le \eta < \xi \le r/2$$

et

$$\varphi(\xi) - \varphi(\eta) > L(\xi - \eta). \tag{9}$$

Comme $z = (z_n) \in c_0$, il existe un indice p tel que $|z_m| \le r/2$ pour $m > p$. Fixons ξ, η et p. Dans c_0 on considère les éléments $\overline{z} := (z_1, \ldots, z_p, 0, 0, \ldots)$ et, pour chaque $m > p$,

$$e^m := (\delta_n^m) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots), \quad x^m := \overline{z} + \xi e^m, \quad y^m := \overline{z} + \eta e^m,$$
$$u^m = (u_n^m) := g(x^m) - g(y^m), \quad v^m = (v_n^m) := k(x^m) - k(y^m),$$

sachant que $x^m, y^m \in S(z,r)$. En fixant $m > p$ pour le moment, on a pour $|h|$ suffisamment petit,

$$\|x^m - y^m + hu^m\| = \|(\xi - \eta)e^m + hu^m\| = \xi - \eta + hu_m^m,$$

d'où $[x^m - y^m, u^m]_- = u_m^m$. D'après (6) et (8) on obtient

$$\varphi(\xi) - \varphi(\eta) = u_m^m + v_m^m \le L(\xi - \eta) + v_m^m \quad (m > p).$$

Enfin, comme $\overline{k(S(z,r))}$ est compact, la suite v^m a une sous-suite convergente : $v^{m_i} \to w$ dans c_0. En notant $w = (w_n) \in c_0$, on a

$$|v_{m_i}^{m_i}| \le \|v^{m_i} - w\| + |w_{m_i}| \to 0 \quad (i \to \infty),$$

et donc $\varphi(\xi) - \varphi(\eta) \le L(\xi - \eta)$. Mais cela contredit (9). ■

4. Remarque. Mentionnons que non seulement le théorème d'existence de Schmidt admet les fonctions f du théorème ci-dessus, mais aussi celui de Szufla. Mais, en prenant la fonction $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi_1(\xi) := 0 \quad (\xi \le 0), \qquad \varphi_1(\xi) := -\sqrt{\xi} \quad (\xi \ge 0),$$

dans (5), on obtient une fonction continue $f_1 : c_0 \to c_0$ qui n'est pas localement β-lipschitzienne mais dissipative (avec $L = 0$). Enfin, prenant $\varphi_2 := \varphi_1 + \varphi_0$ avec φ_0 de (3), on a la fonction $f_2 = f_1 + f_0$. Donc f_2 satisfait aux conditions du théorème de Schmidt. D'autre part, ni le théorème de Szufla ni celui de Volkmann (ou Martin) n'admettent cette fonction, car f_2 n'est pas localement β-lipschitzienne et vérifie (c). (Voir [5] pour les détails.)

Références

[1] A. N. Godunov, *Peano's theorem in Banach spaces*, Functional Anal. Appl. 9 (1975), 53–55.

[2] R. H. Martin, Jr., *A global existence theorem for autonomous differential equations in a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970), 307–314.

[3] S. Schmidt, *Existenzsätze für gewöhnliche Differentialgleichungen in Banachräumen*, thèse, Karlsruhe, 1989; aussi paru dans Funkcial. Ekvac. 35 (1992), 199–222.

[4] S. Szufla, *Some remarks on ordinary differential equations in Banach spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 16 (1968), 795–800.

[5] R. Uhl, *Beiträge zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen in Banachräumen*, thèse, Karlsruhe, 1993.

[6] P. Volkmann, *Ein Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen in Banachräumen*, Proc. Amer. Math. Soc. 80 (1980), 297–300.

MATHEMATISCHES INSTITUT II
UNIVERSITÄT KARLSRUHE
76128 KARLSRUHE, ALLEMAGNE

Reçu par la Rédaction le 11.4.1994