To prove this we observe that

$$m(L_i) = \frac{1}{2}\cdot\frac{h}{n+1}\left[f\left(\frac{ih}{n+1}\right)+f\left(\frac{i+1}{n+1}\,h\right)\right]-\int\limits_{ih/(n+1)}^{(i+1)h/(n+1)} f(x)\,dx,$$

so that

$$\Delta_1^n m(L_0) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}m(L_i)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{h}{n+1}\left[\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f\left(\frac{ih}{n+1}\right)+\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f\left(\frac{i+1}{n+1}\,h\right)\right]-$$
$$-\Delta_{h/(n+1)}^{n+1}F(0)$$

where $F(x)=\int\limits_0^x f(x)\,dx$. Also

$$m(T)=\frac{h}{2}\left[f(h)-\frac{h^n}{n!}f^{(n)}\left(\frac{h}{n+1}\right)\right].$$

Since $f(x)=x^{n+1+a}(g+\varepsilon(x))$, the result of the theorem is easily obtained.

References

[1] S. Gołąb, *Sur quelques propriétés des courbes planes*, Ann. Polon. Math. 1 (1954), p. 91-106.

[2] H. D. Kloosterman, *Derivatives and finite differences*, Duke Math. Journal 17 (1950), p. 169-186.

Reçu par la Rédaction le 30. 10. 1957

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

Sur la limitation des solutions d'un système d'équations intégrales de Volterra

par Z. Butlewski (Poznań)

§ 1. M. T. Sato a publié récemment [1], sous le même titre que plus haut, un intéressant article dans lequel l'auteur considère un système d'équations intégrales linéaires

$$(1.1)\qquad u_j(x)=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_a^x a_{jk}(x,t)u_k(t)\,dt+b_j(x)\qquad (j=1,2,\ldots,n),$$

où les fonctions $a_{jk}(x,t)$ $(j,k=1,2,\ldots,n)$ sont continues dans le domaine D: $a\leqslant t\leqslant x<\infty$ et $b_j(x)$ $(j=1,2,\ldots,n)$ bornées et continues dans J: $a\leqslant x<\infty$. En supposant que

$$(1.2)\qquad \max_{j,k}|a_{jk}(x,t)|\leqslant A(x,t),\qquad \sum_{j=1}^{n}|b_j(x)|\leqslant B,$$

où la fonction $A(x,t)$ et dérivée partielle $A'_x(x,t)$ sont continues et non négatives dans le domaine D, B est une constante dans l'intervalle J, T. Sato a démontré l'inégalité(1)

$$(1.3)\qquad \sum_{j=1}^{n}|u_j(x)|\leqslant B\exp\left(n\int\limits_a^x A(x,t)\,dt\right)\qquad (x\geqslant a)$$

et il a remarqué aussi que l'inégalité

$$(1.4)\qquad \overline{\lim_{x\to\infty}}\int\limits_a^x A(x,t)\,dt<\infty$$

est, entre autres, une condition suffisante pour que la solution $u_1(x),\ldots,u_n(x)$ du système (1.1) soit bornée pour de grandes valeurs de la variable x.

(1) Dans le travail de T. Sato [1] n ne figure pas (voir p. 274, (6)).

Dans les considérations qui suivent, je vais démontrer que le résultat de T. Sato est aussi valable sous d'autres conditions relatives à $A(x,t)$ et $B(x)$.

§ 2. Considérons le système d'équations intégrales (1.1) et supposons dans la suite que l'on ait les inégalités

$$\max_{j,k}|a_{jk}(x,t)| \leqslant A(x,t), \qquad \sum_{j=1}^{n}|b_j(x)| \leqslant B(x), \tag{2.1}$$

où les fonctions $A(x,t)$ et $B(x)$ sont continues dans le domaine D et respectivement dans l'intervalle J.

D'après (1.1), on obtient l'inégalité intégrale

$$\sum_{j=1}^{n}|u_j(x)| \leqslant B(x)+n\int_a^x A(x,t)\Big(\sum_{j=1}^{n}u_j(t)\Big)dt \qquad (x \geqslant a).$$

En posant

$$U(x) = \sum_{j=1}^{n}|u_j(x)|,$$

nous obtenons

$$U(x) \leqslant B(x)+n\int_a^x A(x,t)U(t)dt \qquad (x \geqslant a). \tag{2.2}$$

Supposons que la fonction $A(x,t)$ soit non croissante par rapport à la variable x. Selon (2.2) on a donc

$$U(x) \leqslant B(x)+n\int_a^x A(t,t)U(t)dt \qquad (x \geqslant a). \tag{2.3}$$

Posons

$$V(x) = \int_a^x A(t,t)U(t)dt \qquad (x \geqslant a), \tag{2.4}$$

alors

$$V'(x) = A(x,x)U(x) \tag{2.5}$$

et d'après (2.2) on a

$$U(x) \leqslant B(x)+nV(x) \qquad (x \geqslant a). \tag{2.6}$$

En multipliant l'inégalité intégrale (2.3) par $A(x,x)$, nous obtenons l'inégalité différentielle

$$V'(x) \leqslant A(x,x)B(x)+nA(x,x)V(x) \qquad (x \geqslant a).$$

On en déduit que

$$V(x) \leqslant \int_a^x A(t,t)B(t)\exp\Big(n\int_t^x A(s,s)ds\Big)dt \qquad (x \geqslant a).$$

Soit

$$\beta(x) = \max_{a\leqslant t\leqslant x} B(t).$$

Nous obtenons alors

$$V(x) \leqslant \frac{1}{n}\beta(x)\Big[\exp\Big(n\int_a^x A(t,t)dt\Big)-1\Big] \qquad (x \geqslant a)$$

et d'après (2.6) on a

$$\sum_{j=1}^{n}|u_j(x)| \leqslant \beta(x)\exp\Big(n\int_a^x A(t,t)dt\Big) \tag{2.7}$$

dans l'intervalle J.

Nous avons donc:

THÉORÈME I. *Soient vérifiées les hypothèses suivantes:*

1° $\max_{j,k}|a_{jk}(x,t)| \leqslant A(x,t)$ *pour* D: $a \leqslant t \leqslant x < \infty$,

2° $\sum_{j=1}^{n}|b_j(x)| \leqslant B(x)$ *pour* J: $a \leqslant x < \infty$, *où* $A(x,t)$ *et* $B(x)$ *sont des fonctions continues et non négatives dans le domaine* D *et respectivement dans l'intervalle* J,

3° *la fonction* $A(x,t)$ *est non croissante par rapport à la variable* x.

Alors nous avons l'inégalité

$$\sum_{j=1}^{n}|u_j(x)| \leqslant \beta(x)\exp\Big(n\int_a^x A(t,t)dt\Big)$$

pour $a \leqslant x < \infty$ *où* $u_j = u_j(x)$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ *désignent la solution du système d'équations intégrales linéaires* (1.1), $\beta(x) = \max_{a\leqslant t\leqslant x} B(t)$.

Supposons maintenant que les hypothèses du théorème I soient remplies et de plus soit

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\beta(x) < \infty, \qquad \overline{\lim_{x\to\infty}}\int_a^x A(t,t)dt < \infty;$$

alors *la solution* $u_j(x)$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ *du système* (1.1) *est bornée lorsque* $x \to \infty$.

Remarque. Si, en particulier, la fonction $B(x)$ est non décroissante on pose $\beta(x) \equiv B(x)$ pour $x \geqslant a$, si au contraire la fonction $B(x)$ est non croissante, on a $\beta(x) \equiv B(a)$ pour $x \geqslant a$.

§ 3. Supposons maintenant que la fonction $A(x, t)$ soit non décroissante par rapport à t pour $a \leqslant t \leqslant x < \infty$. On a donc $0 \leqslant A(x, t) \leqslant A(x, x)$ pour $a \leqslant t \leqslant x < \infty$ et selon (2.2) on a l'inégalité

$$U(x) \leqslant B(x) + nA(x, x) \int_a^x U(t)\,dt \quad (x \geqslant a) \tag{3.1}$$

et par conséquent nous obtenons

$$U(x) = \sum_{j=1}^{n} |u_j(x)| \leqslant B(x) + nA(x, x)\,\Phi(x) \quad (x \geqslant a), \tag{3.2}$$

où

$$\Phi(x) = \int_a^x U(t)\,dt \leqslant \int_a^x B(t) \exp\Big(n \int_t^x A(s, s)\,ds\Big)\,dt \quad (x \geqslant a).$$

Soit ensuite $B(x) \leqslant A(x, x)$ pour $x \geqslant a$, on a donc d'après (3.2)

$$\sum_{j=1}^{n} |u_j(x)| \leqslant A(x, x) \exp\Big(n \int_a^x A(t, t)\,dt\Big) \quad (x \geqslant a). \tag{3.3}$$

Nous obtenons ainsi:

THÉORÈME II. *Si les hypothèses 1° et 2° du théorème* I *sont satisfaites et si de plus*

3° *la fonction* $A(x, t)$ *est non décroissante par rapport à* t *pour* $a \leqslant t \leqslant x < \infty$, $B(x) \leqslant A(x, x)$ *pour* $x \geqslant a$,

nous obtenons l'inégalité

$$\sum_{j=1}^{n} |u_j(x)| \leqslant A(x, x) \exp\Big(n \int_a^x A(t, t)\,dt\Big) \quad (x \geqslant a).$$

On voit immédiatement de ce théorème que si

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} A(x, x) < \infty, \qquad \overline{\lim_{x\to\infty}} \int_a^x A(t, t)\,dt < \infty$$

la solution $u_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *du système* (1.1) *est bornée lorsque* $x \to \infty$.

§ 4. Supposons que $A(x, t) \equiv A_1(x) \cdot A_2(t)$ pour $a \leqslant t \leqslant x < \infty$. Nous avons donc l'inégalité

$$U(x) \leqslant B(x) + nA_1(x) \int_a^x A_2(t)\,U(t)\,dt \quad (x \geqslant a), \tag{4.1}$$

et par conséquent nous obtenons

$$U(x) \leqslant B(x) + nA_1(x) \int_a^x A_2(t) B(t) \exp\Big(n \int_t^x A_1(s) A_2(s)\,ds\Big)\,dt \quad (x \geqslant a). \tag{4.2}$$

Si $B(x) \leqslant A_1(x)$ pour $x \geqslant a$ nous avons l'inégalité

$$U(x) = \sum_{j=1}^{n} |u_j(x)| \leqslant A_1(x) \exp\Big(n \int_a^x A_1(s) A_2(s)\,ds\Big) \quad (x \geqslant a). \tag{4.3}$$

D'après (4.3) on voit que si

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} A_1(x) < \infty, \qquad \overline{\lim_{x\to\infty}} \int_a^x A_1(s) A_2(s)\,ds < \infty,$$

la solution $u_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ du système (4.1) est bornée lorsque $x \to \infty$.

Travaux cités

[1] T. Sato, *Sur la limitation des solutions d'un système d'équations intégrales de Volterra*, Tôhoku Mathematical Journal 4 (1952), p. 272-274.

Reçu par la Rédaction le 29. 11. 1957