and the successive convergents are

$$4,\ \frac{9}{2},\ \frac{13}{3},\ \frac{48}{11},\ \frac{61}{14},\ \frac{170}{39},\ \frac{1421}{326},\ \frac{3012}{691},\ \frac{4433}{1017},\ \frac{16\,311}{3742},\ \frac{20\,744}{4759},\ \ldots$$

Taking $x_0' = \frac{9}{2}$, $x_1' = \frac{13}{3}$, we have $x_2' = \frac{231}{53}$, which lies between $\frac{170}{39}$ and $\frac{1421}{326}$. But on taking $x_0' = \frac{61}{14}$, $x_1' = \frac{170}{39}$, we get $x_2' = \frac{20\,744}{4759}$. In the first case we get what is called by Weber [2] a *Nebenbruch*, and it appears that in order to obtain similar relations between Newton's formula and formula (5) and the successive convergents one must take into consideration the *Nebenbrüche* also. This is clear on examining the example of $\sqrt{89}$ and $\sqrt{13}$ considered by Mikusiński. To this problem we propose to return later.

References

[1] J. Mikusiński, *Sur la méthode d'approximation de Newton*, Ann. Polon. Math. 1 (1954), p. 184-194.

[2] H. Weber, *Lehrbuch der Algebra I*, Braunschweig 1898, p. 404.

Reçu par la Rédaction le 17. 2. 1958

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

Interprétation géométrique des conditions d'intégrabilité d'un système d'équations aux différentielles totales

par J. Szarski et T. Ważewski (Kraków)

Considérons un système d'équations aux différentielles totales

$$(1)\qquad dz^i = P^i(x, y, z^1, \ldots, z^n)\,dx + Q^i(x, y, z^1, \ldots, z^n)\,dy \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les fonctions $P^i(x, y, z^1, \ldots, z^n)$ et $Q^i(x, y, z^1, \ldots, z^n)$ sont de classe C^1 dans un domaine Ω. Le système (1) est dit *complètement intégrable dans* Ω, lorsqu'on a dans Ω

$$(2)\qquad Q_x^i - P_y^i + \sum_{j=1}^{n}(Q_{z^j}^i P^j - P_{z^j}^i Q^j) \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous nous proposons de donner une interprétation géométrique des premiers membres des identités (2). L'idée de cette interprétation est la suivante.

Le système (1) définit en chaque point $(\xi, \eta, \zeta^1, \ldots, \zeta^n)$ du domaine Ω un plan à deux dimensions

$$(3)\qquad z^i - \zeta^i = P^i(\xi, \eta, \zeta^1, \ldots, \zeta^n)(x-\xi) + Q^i(\xi, \eta, \zeta^1, \ldots, \zeta^n)(y-\eta) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Soit $(x_0, y_0, z_0^1, \ldots, z_0^n)$ un point du domaine Ω et considérons la surface cylindrique à $n+1$ dimensions dont les équations paramétriques sont

$$(4)\qquad x = x_0 + r\cos\psi,\quad y = y_0 + r\sin\psi,\quad z^i = h^i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où $r > 0$ est fixé et suffisamment petit et $\psi, h^1, \ldots, h^n$ sont des paramètres. Désignons par Σ_r la partie de la surface (4) contenue dans Ω et soit

$$(5)\qquad \xi = x_0 + r\cos\varphi,\quad \eta = y_0 + r\sin\varphi,\quad \zeta^i = h^i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

un point quelconque appartenant à Σ_r. Le plan (3) passant par le point (5) coupe la surface (4) le long de la courbe dont l'équation paramétrique, avec ψ comme paramètre, a la forme

$$x = x_0 + r\cos\psi, \qquad y = y_0 + r\sin\psi,$$
$$z^i = z_0^i + h^i + P^i(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi, h^1, \ldots, h^n)\, r(\cos\psi - \cos\varphi)$$
$$+ Q^i(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi, h^1, \ldots, h^n)\, r(\sin\psi - \sin\varphi)$$

et dont le vecteur tangent au point (5) a les composantes

$$\left.\frac{dx}{d\psi}\right|_{\psi=\varphi} = -r\cos\varphi, \qquad \left.\frac{dy}{d\psi}\right|_{\psi=\varphi} = r\cos\varphi,$$

$$(6) \qquad \left.\frac{dz^i}{d\psi}\right|_{\psi=\varphi} = r[Q^i(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi, h^1, \ldots, h^n)\cos\varphi -$$
$$- P^i(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi, h^1, \ldots, h^n)\sin\varphi].$$

De cette façon, on a fait correspondre au point $(\varphi, h^1, \ldots, h^n)$ de Σ_r un vecteur (6) et par conséquent on a défini sur Σ_r un système d'équations différentielles ordinaires

$$(7) \qquad \frac{dh^i}{d\varphi} = rH^i(r, \varphi, h^1, \ldots, h^n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où l'on a posé

$$H^i = Q^i(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi, h^1, \ldots, h^n)\cos\varphi -$$
$$- P^i(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi, h^1, \ldots, h^n)\sin\varphi.$$

Désignons par

$$h^i = h^i(r, \varphi) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

l'intégrale du système (7) issue du point $\varphi = 0$, $h^i = z_0^i$, c'est-à-dire telle que

$$(8) \qquad h^i(r, 0) = z_0^i.$$

Pour r suffisamment petit cette intégrale existe dans l'intervalle $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Or, le premier membre de l'identité (2), calculé au point $(x_0, y_0, z_0^1, \ldots, z_0^n)$ est égal à la limite du quotient

$$[h^i(r, 2\pi) - z_0^i]/r^2\pi$$

lorsque r tend vers zéro. Voici le théorème qui justifie cette interprétation.

Théorème. *Si les fonctions $P^i(x, y, z^1, \ldots, z^n)$ et $Q^i(x, y, z^1, \ldots, z^n)$ sont de classe C^1 au voisinage du point $A_0(x_0, y_0, z_0^1, \ldots, z_0^n)$, les fonctions $h^i(r, \varphi)$ sont définies dans l'intervalle $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ pour r positif suffisamment petit et l'on a*

$$(9) \qquad \lim_{r\to 0} \frac{h^i(r, 2\pi) - z_0^i}{r^2\pi}$$
$$= Q_x^i(A_0) - P_y^i(A_0) + \sum_{j=1}^{n} [Q_{z^j}^i(A_0)P^j(A_0) - P_{z^j}^i(A_0)Q^j(A_0)].$$

Démonstration. Les seconds membres du système (7) sont de classe C^1 par rapport aux variables r, φ, h^j pour φ quelcoque, $|r|$ et $|h^j|$ suffisamment petits. D'autre part, pour $r = 0$ le système (7) prend la forme

$$dh^i/d\varphi = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et par conséquent ses intégrales $h^i = \mathrm{const}$ sont définies pour tous les φ. Il s'ensuit que pour $|r|$ suffisamment petit et $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ les fonctions $h^i(r, \varphi)$ sont de classe C^1. Comme

$$h_\varphi^i(0, \varphi) = 0,$$

on a donc, d'après (8)

$$(10) \qquad h^i(0, \varphi) = z_0^i.$$

Avant de passer à la démonstration de la relation (9) nous allons prouver que

$$(11) \qquad h_r^i(0, \varphi) = P^i(A_0)(\cos\varphi - 1) + Q^i(A_0)\sin\varphi.$$

Or, comme les fonctions $h^i(r, \varphi)$ satisfont au système (7), on a

$$\frac{d}{d\varphi} h_r^i(0, \varphi) = \left[\frac{d}{dr} rH^i\big(r, \varphi, h^1(r, \varphi), \ldots, h^n(r, \varphi)\big)\right]_{r=0}$$
$$= Q^i(A_0)\cos\varphi - P^i(A_0)\sin\varphi,$$

d'où

$$h_r^i(0, \varphi) = \int_0^\varphi [Q^i(A_0)\cos\varphi - P^i(A_0)\sin\varphi]\, d\varphi$$
$$= P^i(A_0)(\cos\varphi - 1) + Q^i(A_0)\sin\varphi.$$

Revenons à présent à la démonstration de (9). En vertu de (7) et (8) nous avons

$$(12) \qquad \frac{h^i(r, 2\pi) - z_0^i}{r^2\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} H^i\big(r, \varphi, h^1(r, \varphi), \ldots, h^n(r, \varphi)\big)\, d\varphi.$$

Comme

$$H^i\big(0, \varphi, h^1(0, \varphi), \ldots, h^n(0, \varphi)\big) = Q^i(A_0)\cos\varphi - P^i(A_0)\sin\varphi$$

et par conséquent

$$\int_0^{2\pi} H^i\big(0, \varphi, h^1(0, \varphi), \ldots, h^n(0, \varphi)\big)\, d\varphi = 0,$$

nous pouvons écrire (12) sous la forme suivante

$$\frac{h^i(r, 2\pi) - z_0^i}{r^2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\big[H^i\big(r, \varphi, h^1(r, \varphi), \ldots, h^n(r, \varphi)\big) - H^i\big(0, \varphi, h^1(0, \varphi), \ldots, h^n(0, \varphi)\big)\big]\, d\varphi.$$

Lorsque $r \to 0$, le quotient sous le signe d'intégrale tend vers

$$L^i(\varphi) = \left[\frac{d}{dr} H^i\big(r, \varphi, h^1(r, \varphi), \ldots, h^n(r, \varphi)\big)\right]_{r=0}$$

uniformément par rapport à φ dans l'intervalle $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Il s'ensuit que

$$\lim_{r\to 0} \frac{h^i(r, 2\pi) - z_0^i}{r^2\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} L^i(\varphi)\, d\varphi. \tag{13}$$

Mais, d'après (10) et (11), nous avons

$$\begin{aligned} L^i(\varphi) = {} & Q_x^i(A_0)\cos^2\varphi + Q_y^i(A_0)\cos\varphi\sin\varphi + \\ & + \sum_{j=1}^{n} Q_{z^j}^i(A_0)\,[P^j(A_0)(\cos\varphi - 1) + Q^j(A_0)\sin\varphi]\cos\varphi - \\ & - P_x^i(A_0)\cos\varphi\sin\varphi - P_y^i(A_0)\sin^2\varphi - \\ & - \sum_{j=1}^{n} P_{z^j}^i(A_0)\,[P^j(A_0)(\cos\varphi - 1) + Q^j(A_0)\sin\varphi]\sin\varphi. \end{aligned} \tag{14}$$

Les relations (13) et (14) impliquent la conclusion (9) de notre théorème.

Reçu par la Rédaction le 5. 7. 1958

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

Limitations and dependence on parameter of solutions of non-stationary differential operator equations

by W. Mlak (Kraków)

The purpose of the present paper is to discuss some properties of the solutions of the differential equation

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x). \tag{$*$}$$

$A(t)$ is a closed and linear operator defined on a linear subset of the Banach space E. The values of $A(t)$ belong to E. The theory of equation $(*)$ is a continuation of the theory of one-parameter semi-groups of linear and bounded operators founded by Hille and Yosida (see for instance [2]). Kato in [4] investigated the case of the variable "coefficient" $A(t)$. Krasnoselskiĭ, Kreĭn and Sobolevskiĭ presented in [6], [7] many new results and discussed the case of the non-linear member $f(t, x)$. This paper deals with some general theorems concerning the limitations of the solutions of $(*)$. We use the epidermic theorem for ordinary differential inequalities. The epidermic theorems have been introduced by T. Ważewski in [13] (see also [8]). We apply the epidermic theorem for the reason that usually the solutions of $(*)$ do not satisfy the equation at the initial point $t = 0$. The nature of the epidermic effect is explained in [13] and [14]. We present several uniqueness theorems. In § 4 we prove some existence theorems which generalize in a certain sense some results of [6] and [7]. We use the topological method of Leray-Schauder. The a priori limitations needed in this method are ensured by suitable theorems of §§ 2, 3. In the last section we discuss the dependence of the solutions on a real parameter.

§ 1. Notation and definitions. Let E be a real Banach space. The elements of E are denoted by $x, y, z, \ldots$ The functions of the real variable t with values lying in E are denoted by $x(t), y(t), z(t), \ldots$ $|x|$ is the norm of the element x, Θ stands for the zero of E. In the following we investigate the operators which are defined on suitable subsets of E and take on values belonging to E. The operator V is *linear* if it is additive and