Remarque VI. L'exemple que nous venons de construire démontre quelque chose de plus. Pour la fonction $v(t)$ définie ci-dessus on a non seulement la relation (10.2), mais aussi

$$\int_0^\infty \frac{dt}{[a(t)]^{1+a}} = +\infty \qquad (a \geqslant 0).$$

Il en résulte qu'aucune condition de ce type ne peut être suffisante pour que l'équation (1.6) soit du type (Z).

Travaux cités

[1] R. Bellman, *Stability theory of differential equations*, New York 1953.

[2] M. Zlámal, *Über asymptotische Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Tshech. Math. Journal 6 (81) (1956), p. 75-91.

[3] Z. Opial, *Sur l'allure asymptotique des intégrales de l'équation différentielle* $u''+a(t)u'+b(t)u=0$, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 5 (1957), p. 847-853.

[4] G. Sansone, *Equazioni differenziali*, Parte seconda. Bologna 1949,

Reçu par la Rédaction le 16. 4. 1957

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

Sur les valeurs asymptotiques des intégrales des équations différentielles linéaires du second ordre

par Z. Opial (Kraków)

Dans la présente note je m'occupe de l'allure asymptotique des intégrales de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$u''-a(t)u'+b(t)u=0 \tag{1}$$

dans certaines hypothèses sur les coefficients $a(t)$ et $b(t)$ qui vont être précisées dans la suite. Il s'agira, en principe, d'examiner l'allure asymptotique des solutions de cette équation dans le cas où le coefficient $a(t)$ tend vers l'infini lorsque t croît indéfiniment, tandis que $b(t)$ reste borné sur le demi-axe $t \geqslant 0$ tout entier. Les résultats que je vais exposer ici se rattachent aux résultats analogues de Ph. Hartman et A. Wintner publiés dans leur note [1] et à ceux exposés dans mes notes [2] et [3].

1. Notations et définitions. Désignons par $\Delta(t_0)$ l'intervalle infini $\langle t_0, +\infty)$. Nous écrirons tout simplement Δ au lieu de $\Delta(0)$.

Nous dirons que l'équation (1) est *du type* (R), si toute intégrale non triviale de cette équation tend vers l'infini lorsque t croît indéfiniment. Nous dirons pareillement qu'elle est *du type* (M) s'il est possible de choisir deux intégrales linéairement indépendantes de manière que l'une tende vers l'infini et l'autre vers une limite finie, différente de zéro.

Remarquons que si l'équation (1) est du type (M), alors pour tout nombre fini u_0 il existe une et une seule intégrale $u(t)$ de cette équation pour laquelle on a $\lim_{t\to\infty} u(t) = u_0$.

Relativement à l'équation (1) nous admettrons dans la suite l'une des deux hypothèses suivantes:

Hypothèse H. *Les fonctions $a(t)$ et $b(t)$, définies et continues dans l'intervalle Δ, y satisfont aux inégalités*

$$0 < b \leqslant b(t) \leqslant B, \quad 2\sqrt{B} \leqslant a(t) \tag{2}$$

b et B étant des constantes positives[1].

Hypothèse K. *Les fonctions $a(t)$, $b(t)$ définies et continues dans l'intervalle Δ y satisfont aux inégalités*

$$|b(t)| \leqslant B, \quad 0 < a(t), \tag{3}$$

B étant une constante finie.

2. Lemme I. *Si les coefficients $a(t)$ et $b(t)$ satisfont à l'hypothèse H, toute intégrale non triviale $u(t)$ de l'équation (1) devient, pour t suffisamment grands, monotone: croissante si $u(t) > 0$, décroissante si $u(t) < 0$.*

Démonstration. Prenons une intégrale quelconque $u(t)$ de l'équation (1) et posons $v(t) = u'(t)/u(t)$. On obtient ainsi l'intégrale $v(t)$ de l'équation de Riccati

$$v' = -v^2 + a(t)v - b(t). \tag{4}$$

Nous allons démontrer que pour un t_0 suffisamment grand on doit avoir dans l'intervalle $\Delta(t_0)$: $v(t) > 0$. Supposons à cet effet que pour un t_1 on ait $v(t_1) \leqslant 0$. Le second membre de l'équation (4) est égal à $-b(t) < 0$ pour $v = 0$. Par suite, dans un voisinage à droite de t_1 on doit avoir $v(t) \leqslant 0$. Mais, aussi longtemps que $v(t)$ reste non positif, on a l'inégalite (cf. (4))

$$v'(t) \leqslant -v^2(t) - b.$$

On doit donc avoir $v(t) \leqslant \bar{v}(t)$, où $\bar{v}(t)$ désigne l'intégrale de l'équation auxiliaire $v' = -v^2 - b$, issue du point $(t_1, 0)$: $\bar{v}(t) = -\sqrt{b}\,\mathrm{tg}\sqrt{b}\,(t - t_1)$. Par conséquent, pour un $t_2 > t_1$ on a

$$\lim_{t\to t_2-} v(t) = -\infty \qquad \bigl(\lim_{t\to t_2+} v(t) = +\infty\bigr).$$

Mais, pour $v = \sqrt{B}$ le second membre de l'équation (4) est, en vertu de l'hypothèse H, non négatif. En vertu de l'unicité des solutions de l'équation (4) il en résulte que l'on a $v(t) \geqslant \sqrt{B}$ dans l'intervalle $\Delta(t_2)$. Pour en obtenir la conclusion du lemme il suffit de poser $t_0 = t_2$.

3. Posons pour tout $t \geqslant 0$:

$$A(t) = \exp\Bigl(\int_0^t a(s)\,ds\Bigr)$$

et supposons que les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ satisfassent à l'hypothèse H.

[1] Les inégalités (2) ont été choisies de sorte que les racines de l'équation caractéristique $\lambda^2 - a(t)\lambda + b(t) = 0$ soient réelles pour tout t appartenant à l'intervalle Δ.

Du lemme précédent il résulte que toute intégrale $u(t)$ de l'équation (1) tend vers une limite $u(\infty)$ infinie ou finie, mais différente de zéro. Deux cas sont donc possibles. Ou bien $u(\infty)$ est égal à $+\infty$ ou $-\infty$ pour tout $u(t)$ et alors l'équation (1) est du type (R), ou bien pour une intégrale $\varphi(t)$ on a $|\varphi(\infty)| < +\infty$. Dans ce cas une autre intégrale $\psi(t)$ de l'équation (1):

$$\psi(t) = \varphi(t)\int_T^t \frac{A(s)}{\varphi^2(s)}\,ds \qquad (\varphi(t) \neq 0 \text{ pour } t \geqslant T) \tag{5}$$

tend vers l'infini lorsque t croît indéfiniment. Dans ce cas l'équation (1) est du type (M). On a donc:

Lemme II. *Si les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ satisfont à l'hypothèse H, l'équation (1) est ou bien du type (M), ou bien du type (R).*

4. Théorème I. *Supposons que les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ satisfassent à l'hypothèse K. Alors, pour que l'équation (1) soit du type (M), il suffit que l'on ait*

$$\int_0^\infty \Bigl(A(s)\int_s^\infty \frac{d\tau}{A(\tau)}\Bigr)ds < +\infty. \tag{6}$$

Démonstration. Choisissons un t_0 suffisamment grand pour que l'on ait l'inégalité

$$\int_{t_0}^\infty \Bigl(A(s)\int_s^\infty \frac{d\tau}{A(\tau)}\Bigr)ds \leqslant \frac{1}{3B}. \tag{7}$$

On peut aisément vérifier que toute solution continue et bornée de l'équation intégrale

$$u(t) = 1 + \int_{t_0}^t \Bigl(A(s)\int_s^\infty \frac{b(\tau)}{A(\tau)}u(\tau)\,d\tau\Bigr)ds \tag{8}$$

est aussi l'intégrale de l'équation différentielle (1). Nous allons démontrer que, dans nos hypothèses, l'équation (8) admet une solution unique, continue et bornée dans l'intervalle $\Delta(t_0)$. Prenons à cet effet l'espace E des fonctions continues et bornées dans $\Delta(t_0)$. Pour toute fonction $u(t)$ de cet espace nous posons

$$\|u(t)\| = \sup_{\Delta(t_0)} |u(t)|.$$

Dans l'espace E nous introduisons la transformation continue

$$\tilde{u}(t) = 1 + \int_{t_0}^{t} \left(A(s) \int_{s}^{\infty} \frac{b(\tau)}{A(\tau)} u(\tau) d\tau \right) ds,$$

qui fait correspondre à chaque fonction $u(t)$ de cet espace une fonction $\tilde{u}(t)$ du même espace. On vérifie aisément qu'en vertu de (7) on a pour tout couple $u(t), z(t)$ de fonctions appartenant à E:

$$\|\tilde{u}(t) - \tilde{z}(t)\| \leqslant \tfrac{1}{3} \|u(t) - z(t)\|.$$

Donc, d'après le principe bien connu de Banach, il existe dans l'espace E une fonction unique $\varphi(t)$ qui satisfait à l'équation (8). De la forme de cette équation il résulte que $\varphi(t)$ tend vers une limite finie quand t croît indéfiniment. Cette limite ne peut pas être nulle. On a en effet, en raison de (7):

$$\|\varphi(t)\| \leqslant 1 + \int_{t_0}^{t} \left(A(s) \int_{s}^{\infty} \frac{|b(\tau)|}{A(\tau)} \|\varphi(t)\| d\tau \right) ds \leqslant 1 + \tfrac{1}{3} \|\varphi(t)\|$$

d'où il résulte que $\|\varphi(t)\| \leqslant \frac{3}{2}$. On a donc l'inégalité

$$\varphi(t) \geqslant 1 - \int_{t_0}^{t} \left(A(s) \int_{s}^{\infty} \frac{|b(\tau)|}{A(\tau)} \|\varphi(t)\| d\tau \right) ds \geqslant \tfrac{1}{2}$$

et, par conséquent, $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) > 0$.

Pour achever la démonstration il suffit de remarquer qu'en posant dans la formule (5) $T = t_0$ on en obtient une autre intégrale $\psi(t)$ de l'équation (1) qui tend vers l'infini lorsque $t \to +\infty$.

5. Admettons l'hypothèse (6) et posons pour tout $t \geqslant 0$

$$v(t) = A(t) \int_{t}^{\infty} \frac{ds}{A(s)}.$$

On vérifie sans peine que la fonction $v(t)$ est une intégrale de l'équation différentielle

$$v' = a(t) v - 1.$$

Il en résulte que $v'(t) \geqslant -1$. D'autre part, l'hypothèse (6) veut dire que la fonction $v(t)$ admet une intégrale finie dans l'intervalle $\langle 0, +\infty)$ d'où il résulte que $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$.

Ceci établi, on peut aisément déduire du théorème I le corollaire suivant:

Corollaire. *Si les coefficients $a(t)$, $b(t)$ satisfont à l'hypothèse K et si, de plus, on a l'inégalité* (6), *alors pour toute intégrale $u(t)$ de l'équation* (1) *qui tend vers une limite finie lorsque $t \to +\infty$, on a*

$$\lim_{t\to\infty} u'(t) = 0.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer la conclusion de ce corollaire pour l'intégrale $\varphi(t)$ dont il était question dans la démonstration du théorème I. Or, de l'équation intégrale (8) à laquelle satisfait $\varphi(t)$ on tire

$$|\varphi'(t)| = \left| A(t) \int_{t}^{\infty} \frac{b(s)}{A(s)} \varphi(s) ds \right| \leqslant C \left| A(t) \int_{t}^{\infty} \frac{ds}{A(s)} \right| \leqslant C v(t),$$

C étant une constante choisie de manière que l'on ait $|b(t)\varphi(t)| \leqslant C$ dans l'intervalle $\Delta(t_0)$.

6. Théorème II. *Supposons que les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ satisfassent á l'hypothèse* H. *Alors, pour que l'équation* (1) *soit du type* (M), *il faut et il suffit que l'on ait*

$$\int_{0}^{\infty} \left(A(s) \int_{s}^{\infty} \frac{d\tau}{A(\tau)} \right) ds < +\infty. \tag{9}$$

Par conséquent, pour que, dans l'hypothèse H, *l'équation* (1) *soit du type* (R), *il faut et il suffit que l'on ait*

$$\int_{0}^{\infty} \left(A(s) \int_{s}^{\infty} \frac{d\tau}{A(\tau)} \right) ds = +\infty. \tag{10}$$

Démonstration. Comme nous l'avons démontré (théorème I), la condition (9) est suffisante pour que l'équation (1) soit du type (M) même dans des hypothèses moins restrictives. Pour achever la démonstration il suffit donc, en vertu du lemme II, de prouver que la condition (10) est suffisante pour que l'équation (1) soit du type (R). Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Il existerait alors une intégrale $\varphi(t)$ de cette équation pour laquelle $0 < \varphi(\infty) < +\infty$. Il en résulte que la fonction $\varphi(t)$ satisfait à l'équation intégrale (pour certaines valeurs des paramètres C et D):

$$\varphi(t) = D + \int_{0}^{t} \left(C + \int_{s}^{\infty} \frac{b(\tau)}{A(\tau)} \varphi(\tau) d\tau \right) A(s) ds,$$

ce qui ne serait possible que pour $C = 0$. Mais dans ce cas particulier, on aurait, en vertu de (2)

$$\varphi(t) \geqslant D^* + b\frac{\varphi(\infty)}{2}\int_T^t \left(A(s)\int_s^\infty \frac{d\tau}{A(\tau)}\right) ds,$$

où T est un nombre suffisamment grand pour que l'on ait dans $\Delta(T)$: $\varphi(t) \geqslant \frac{1}{2}\varphi(\infty)$ et D^* est une constante convenablement choisie. On aurait par suite, en raison de (10): $\varphi(\infty) = +\infty$.

7. Maintenant on peut, en s'appuyant sur les théorèmes I et II, établir quelques simples critères suffisants pour que l'équation (1) soit ou bien du type (M), ou bien du type (R). Remarquons d'abord que l'on a

$$\int_0^\infty \left(A(s)\int_s^\infty \frac{d\tau}{A(\tau)}\right) ds = \int_0^\infty \left(\frac{1}{A(s)}\int_0^s A(\tau)\,d\tau\right) ds. \tag{11}$$

Or, dans ma note [2] j'ai établi quelques critères suffisants pour que la seconde de ces intégrales soit ou bien finie, ou bien infinie. On en tire immédiatement les théorèmes suivants:

Théorème III. *Si les fonctions $a(t)$, $b(t)$ satisfont à l'hypothèse* K *et*

$$\int_0^\infty \frac{ds}{a(s)} < +\infty, \tag{12}$$

l'équation (1) *est du type* (M).

Démonstration. Dans [2] j'ai démontré que la relation (12) est suffisante pour que la seconde intégrale (11) soit finie. Dans l'hypothèse (12) la première intégrale (11) est donc aussi finie et, par suite, en vertu du théorème I, l'équation (1) est du type (M).

De même on peut démontrer les deux théorèmes suivants:

Théorème IV. *Si les fonctions $a(t)$, $b(t)$ satisfont à l'hypothèse* H, *si*

$$\int_0^\infty \frac{ds}{a(s)} = +\infty \tag{13}$$

et

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{a'(t)}{a^2(t)J(t)} < +\infty \qquad \left(J(t) = \int_0^t \frac{ds}{a(s)}\right),$$

l'équation (1) *est du type* (R).

Théorème V. *Si les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ satisfont à l'hypothèse* H *et l'on a la relation* (13) *et si de plus*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{a'(t)}{a^2(t)J(t)} > -\infty,$$

l'équation (1) *est du type* (R).

8. Revenons à l'équation auxiliaire du premier ordre

$$v' = a(t)v - 1, \tag{14}$$

à laquelle satisfait, comme nous l'avons dit au par. 5, la fonction

$$v(t) = A(t)\int_t^\infty \frac{ds}{A(s)}. \tag{15}$$

Convenons de dire que l'équation (14) est *du type* (M*), si la fonction (15) admet une intégrale finie dans l'intervalle Δ. Remarquons que c'est la seule solution de l'équation (14) qui puisse jouir de cette propriété. En effet, pour toute autre solution $v_1(t)$ on a

$$\big(v_1(t) - v(t)\big)' = a(t)\big(v_1(t) - v(t)\big)$$

et, par suite

$$v_1(t) = CA(t) + A(t)\int_t^\infty \frac{ds}{A(s)} \qquad (C \neq 0).$$

Nous dirons de même que l'équation (14) est *du type* (R*), si

$$\int_0^\infty v(t)\,dt = +\infty. \tag{16}$$

Ceci admis, on peut énoncer les théorèmes I et II sous la forme suivante:

Théorème VI. *Si les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ satisfont à l'hypothèse* K, *alors, pour que l'équation* (1) *soit du type* (M), *il suffit que l'équation* (14) *soit du type* (M*).

Théorème VII. *Supposons que les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ satisfassent à l'hypothèse* H. *Alors, pour que l'équation* (1) *soit du type* (M) *il faut et il suffit que l'équation* (14) *soit du type* (M*). *Par conséquent, pour que l'équation* (1) *soit du type* (R), *il faut et il suffit que l'équation* (14) *soit du type* (R*).

9. Envisageons maintenant, à côté de l'équation (1), l'équation du même type

$$u'' - a^*(t)u' + b^*(t)u = 0 \tag{1*}$$

et supposons que l'on ait

$$(17)\qquad 0 < a(t) \leqslant a^*(t) \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0.$$

Posons ensuite

$$(18)\qquad A^*(t) = \exp\Big(\int_0^t a^*(s)\,ds\Big)$$

et

$$(19)\qquad v^*(t) = A^*(t)\int_0^t \frac{ds}{A^*(s)}.$$

La fonction positive $v^*(t)$ satisfait à l'équation différentielle

$$(20)\qquad v' = a^*(t)v-1.$$

D'autre part, la fonction positive $v(t)$ (cf. la formule (15)) satisfait, en vertu de l'inégalité (17), à l'inégalité différentielle

$$(21)\qquad v'(t) \leqslant a^*(t)v(t)-1 \quad (t \geqslant 0).$$

Il en résulte que l'on a dans l'intervalle Δ:

$$0 \leqslant v^*(t) \leqslant v(t).$$

En effet, de l'inégalité (21) et du fait que pour $v = 0$ le second membre de l'équation (20) est égal à -1, il résulte qu'il existe une intégrale $v_1(t)$ de l'équation (20) pour laquelle

$$0 \leqslant v_1(t) \leqslant v(t) \quad (t \geqslant 0).$$

Mais, de la forme de la solution générale de l'équation (20) il résulte que l'on doit avoir $v_1(t) = v^*(t)$. On a donc:

LEMME III. *Si les fonctions continues $a(t)$ et $a^*(t)$ satisfont à l'inégalité (17) et si l'équation (14) est du type (M*), il en est de même de l'équation (20). Par conséquent, si l'équation (20) est du type (R*), l'équation (14) est du même type.*

10. Grâce au théorème VII, le lemme que nous venons de démontrer nous permet d'établir pour les équations (1) et (1*) le théorème de comparaison suivant:

THÉORÈME VIII. *Supposons que les fonctions $a(t)$, $b(t)$, $a^*(t)$ et $b^*(t)$ satisfassent à l'hypothèse H et que l'on ait l'inégalité (17). Alors, si l'équation (1) est du type (M), il en est de même de l'équation (1*). Par conséquent, si l'équation (1*) est du type (R), l'équation (1) est du même type.*

11. Remarques finales. I. Comme nous l'avons vu (cf. lemme II), dans le cas où les coefficients $a(t)$ et $b(t)$ de l'équation (1) satisfont à l'hypothèse H, l'allure asymptotique des solutions de cette équation est bien simple: ou bien toutes ces solutions (non banales) tendent vers l'infini lorsque $t\to\infty$ (l'équation (1) est alors du type (R)), ou bien il existe une solution tendant vers une limite finie, différente de zéro, tandis que toutes les autres solutions qui en sont linéairement indépendantes tendent vers l'infini lorsque $t\to\infty$ (l'équation (1) est alors du type (M)). Or, dans la note [2] j'ai démontré qu'il en est de même si l'on prend, au lieu de l'équation (1), l'équation suivante:

$$(22)\qquad u''+a(t)u'+b(t)u = 0.$$

Alors, dans l'hypothèse H, deux cas seulement sont possibles: ou bien toutes les solutions de l'équation (22) tendent vers zéro lorsque $t\to\infty$ (nous disons dans ce cas que l'équation envisagée est du type (Z)), ou bien il existe une solution de cette équation tendant vers zéro, tandis que toutes les autres solutions qui en sont linéairement indépendantes tendent vers des limites finies, différentes de zéro, lorsque $t\to\infty$ (nous disons alors que l'équation (22) est du type (N)). Bien plus, si l'on demande à quel type appartient l'équation (22), la réponse ne dépend que de la valeur de la seconde des intégrales intervenant dans la formule (11) (cf. [2], théorème I). Notamment, *pour que l'équation* (22) (*dans l'hypothèse* H) *soit du type* (N), *il faut et il suffit que l'intégrale*

$$(23)\qquad \int_0^\infty \Big(\frac{1}{A(s)}\int_0^s A(\tau)\,d\tau\Big)\,ds$$

soit finie; pour que l'équation (22) *soit du type* (Z) *il faut et il suffit que l'intégrale* (23) *soit égale à* $+\infty$.

La liaison entre les divers types de l'allure asymptotique des intégrales des équations (1) et (22) est donc bien simple et on peut l'exprimer sous forme du théorème suivant:

THÉORÈME IX. *Si les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ satisfont à l'hypothèse H, l'équation (1) est du type (M) seulement dans le cas où l'équation (22) est du type (N) et inversement. Par conséquent, pour que l'équation (1) soit du type (R), il faut et il suffit que l'équation (22) soit du type (Z).*

II. De la formule (11) résulte aussi une liaison étroite entre l'allure asymptotique des intégrales de l'équation du premier ordre (14) (cf. le par. 5) à laquelle satisfait la fonction (15) et l'équation analogue

$$(24)\qquad v' = 1-a(t)v,$$

à laquelle satisfait la fonction

$$w(t) = \frac{1}{A(t)} \int_0^t A(s)\,ds. \tag{25}$$

Convenons de dire que l'équation (24) est du type (N^*), si toute solution de cette équation admet une intégrale finie dans l'intervalle Δ (pour cela, il faut et il suffit d'ailleurs qu'une solution au moins jouisse de cette propriété). Ceci admis, de la formule (11) résulte le théorème suivant:

THÉORÈME X. *Si $a(t) \geqslant 0$ dans l'intervalle Δ, alors, pour que l'équation* (14) *soit du type* (M^*), *il faut et il suffit que l'équation* (24) *soit du type* (N^*).

Travaux cités

[1] Ph. Hartman and A. Wintner, *On the assignment of asymptotic values for the solutions of linear differential equations of second order*, Am. Journal of Math. 77 (1955), p. 475-483.

[2] Z. Opial, *Sur l'allure asymptotique des intégrales de l'équation différentielle $u''+a(t)u'+b(t)u=0$*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 5 (1957), p. 847-853.

[3] — *Sur l'allure asymptotique des solutions de l'équation différentielle $u''+a(t)u'+b(t)u=0$*, ce volume, p. 181-200.

Reçu par la Rédaction le 10. 10. 1957