each sequence of $[\boldsymbol{BA}_0]$ be restrictedly B-summable. Then $B..(x) = \lim_{n\to\infty} B_{nn}(x)$ for $x \in [\boldsymbol{BA}_0]$; the functionals $B_{nn}(x)$ are γ-linear since they are limits of γ-linear functionals (the partial sums of the involved series); thus $B..(x)$ is γ-linear on $[\boldsymbol{BA}_0]$. For $x \in \boldsymbol{BC}_0$ we have $B..(x) = 0$, and since the set $\boldsymbol{BC}_0$ is γ-dense in $[\boldsymbol{BA}_0]$, we have $B..(x) = 0$ on $[\boldsymbol{BA}_0]$. Thus we have proved

4.1. THEOREM. *Let the methods A and B be r-permanent for $\boldsymbol{BC}_0$ and let every bounded sequence $x = \{x_{ik}\}$ restrictedly A-summable to zero be restrictedly B-summable. Then B-$[\lim_{i,k\to\infty} x_{ik}] = 0$.*

The methods A and B are called *r-consistent* for the class Z of sequences if each sequence of Z is restrictedly summable by both methods to the same value. It is easily seen that if the methods A and B are r-consistent for bounded sequences, then the constants defined by (b_1) and (c_1) coincide for both methods, whence $\chi(A) = \chi(B)$.

Using the device of [4], p. 140 (concerning our case see also [2], p. 180), one can prove

4.2. THEOREM. *Let the methods A and B be r-consistent for bounded convergent sequences and let $\chi(A) \neq 0$. If each bounded restrictedly A-summable sequence x is restrictedly B-summable, then $[A]..(x) = [B]..(x)$.*

References

[1] A. Alexiewicz, *On the two-norm convergence*, Studia Math. 14 (1954), p. 49-56.

[2] — and W. Orlicz, *On summability of double sequences (I)*, Ann. Polon. Math. 2 (1955), p. 170-181.

[3] S. Mazur, *Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen*, Studia Math. 4 (1933), p. 70-84.

[4] — and W. Orlicz, *On linear methods of summability*, Studia Math. 14 (1954), p. 129-160.

[5] C. N. Moore, *Summable series and convergence factors*, American Mathematical Society Colloquium Publications 22 (1938), p. 1-105.

[6] — *On the summability of the double Fourier series of discontinuous functions*, Math. Annalen 74 (1913), p. 555-572.

Reçu par la Rédaction le 10. 7. 1957

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

Sur l'allure asymptotique des solutions de l'équation différentielle $u''+a(t)u'+b(t)u = 0$

par Z. Opial (Kraków)

§ 1. Dans la monographie sur la théorie de la stabilité des équations différentielles M. R. Bellman consacre un petit paragraphe à l'étude de l'allure asymptotique des intégrales de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$u''+a(t)u'+u = 0, \tag{1.1}$$

dans l'hypothèse que $a(t)$ est une fonction continue tendant vers l'infini lorsque t croît indéfiniment ([1], Ch. V, Sect. 20).

L'auteur remarque que la comparaison de l'équation (1.1) avec une équation de la même forme, mais dont le coefficient $a(t)$ est constant, pourrait nous mener à supposer que toute intégrale de l'équation (1.1) doit tendre vers zéro lorsque $t \to +\infty$, mais qu'en réalité il n'en doit pas être ainsi. Aussi est-il plus raisonnable, remarque-t-il, de comparer l'équation (1.1) avec les équations

$$u''+a(t)u' = 0 \quad \text{et} \quad a(t)u'+u = 0 \tag{1.2}$$

ce qui permet de mieux comprendre le rôle que doit jouer, dans le problème de l'allure asymptotique des solutions de l'équation (1.1), l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{ds}{a(s)}. \tag{1.3}$$

En effet, si elle est finie, les intégrales non banales de la deuxième des équations (1.2) tendent, pour $t \to +\infty$, vers des limites finies, différentes de zéro et, par suite, on peut espérer qu'il existe au moins une intégrale de l'équation (1.1) qui jouit de la même propriété. Et inversement, si l'intégrale (1.3) est égale à ∞, on peut espérer que toute intégrale de l'équation (1.1) tende vers zéro lorsque $t \to +\infty$.

La liaison entre la valeur de l'intégrale (1.3) et le problème envisagé se manifeste aussi d'une autre manière. Pour tout t fixe la plus grande des racines de l'équation caractéristique

$$\lambda^2 + a(t)\lambda + 1 = 0$$

est égale à

$$\lambda(t) = \frac{1}{2}\left(-a(t) + \sqrt{a^2(t) - 4}\right) = -\frac{1}{a(t)} + O\left(\frac{1}{a^3(t)}\right)$$

et, par suite, si la fonction $\lambda(t)$ admet une intégrale finie dans l'intervalle $\langle 0, +\infty)$, la fonction $1/a(t)$ jouit de la même propriété, et inversement.

Le problème de l'existence d'une intégrale de l'équation (1.1) qui ne tendrait pas vers zéro lorsque $t \to +\infty$, est d'ailleurs équivalent — comme le montre M. R. Bellman — au problème de l'existence d'une intégrale asymptotique à e^{-t} de l'équation

$$\varepsilon(t)u'' + u' + u = 0 \tag{1.4}$$

dans l'hypothèse que $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0$, puisque par la substitution $v = ue^t$ on en obtient l'équation

$$v'' + \left(\frac{1}{\varepsilon(t)} - 2\right)v' + v = 0. \tag{1.5}$$

Récemment M. M. Zlámal (cf. la première partie de [2]) a établi quelques conditions suffisantes pour que toutes les intégrales de l'équation (1.1) tendent vers zéro ou pour qu'il existe une intégrale de cette équation qui tend vers une limite différente de zéro lorsque t croît indéfiniment. Le but de la présente note est de compléter sous bien des aspects ces études de M. Zlámal. Ainsi, dans le § 6 j'établis un simple critère suffisant et nécessaire pour que toute intégrale de l'équation (1.1) tende vers zéro lorsque $t \to +\infty$ (théorème I). Ensuite, après avoir établi dans le § 9 un théorème de comparaison (théorème III), je donne dans les §§ 10 et 11 certaines généralisations des résultats de M. Zlámal (théorèmes IV-VI). Enfin, dans le § 15 je montre par un exemple approprié que l'intégrale intervenant dans l'énoncé du théorème I ne peut pas être remplacée tout simplement par l'intégrale (1.3). Quelques-uns de ces résultats ont été déjà publiés dans ma note [3].

Quant au problème envisagé, la théorie de l'équation (1.1) ne diffère en rien de celle de l'équation plus générale

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = 0, \tag{1.6}$$

où $b(t)$ est une fonction continue, bornée supérieurement et inférieurement par des constantes positives. C'est pourquoi nous nous occuperons dans la suite justement de l'équation (1.6).

§ 2. Désignons par $\Delta(t_0)$ l'intervalle infini $\langle t_0, +\infty)$; pour $t_0 = 0$ nous écrirons tout simplement Δ au lieu de $\Delta(0)$.

Nous dirons que l'équation (1.6) est du type (Z), si toute intégrale de cette équation tend vers zéro en même temps que t tend vers l'infini. Pareillement nous dirons que l'équation (1.6) est du type (M), s'il est possible de choisir deux intégrales linéairement indépendantes de telle sorte que l'une tende vers zéro et l'autre vers une limite finie, différente de zéro, lorsque $t \to +\infty$. Notons que, dans certaines hypothèses sur les coefficients $a(t)$ et $b(t)$, l'équation (1.6) doit forcément être de l'un de ces deux types (voir [2], Hilfsatz 2, p. 76).

Relativement à l'équation (1.6) nous admettons l'hypothèse suivante:

Hypothèse H. *Les fonctions $a(t)$ et $b(t)$, définies et continues dans l'intervalle Δ, satisfont aux inégalités*

$$0 < c \leqslant b(t) \leqslant C, \qquad 2\sqrt{C} \leqslant a(t), \tag{2.1}$$

c et C étant deux constantes positives.

§ 3. Lemme I. *Si les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ satisfont à l'hypothèse* H, *alors pour tout $t_0 \geqslant 0$ et toute intégrale $u(t)$ de l'équation* (1.6) *telle que*

$$u(t_0) = u_0 > 0 \quad \textit{et} \quad -\sqrt{C}\,u_0 \leqslant u'(t_0) \leqslant 0 \tag{3.1}$$

on a dans l'intervalle $\Delta(t_0)$:

$$0 < u(t) \leqslant u_0 \quad \textit{et} \quad u'(t) \leqslant 0.$$

En effet, la fonction $v(t) = u'(t)/u(t)$ est l'intégrale de l'équation de Riccati

$$v' = -v^2 - a(t)v - b(t). \tag{3.2}$$

Envisageons le rectangle infini R: $t_0 \leqslant t$, $-\sqrt{C} \leqslant v \leqslant 0$. Le point initial $(t_0, v(t_0))$ de l'intégrale envisagée $v(t)$ est situé, en vertu des inégalités (3.1), sur le côté gauche du rectangle R. Sur le côté supérieur ($v = 0$, $t_0 \leqslant t$) de R le second membre de l'équation (3.2) est égal à $-b(t) < C$. L'intégrale $v(t)$ ne peut donc pas sortir du rectangle R par le côté supérieur. Elle ne peut pas sortir non plus par le côté inférieur ($v = -\sqrt{C}$, $t_0 \leqslant t$). Envisageons l'équation différentielle

$$v = -v^2 - a(t)v - b(t) + \varepsilon \tag{3.2$_\varepsilon$}$$

où $\varepsilon > 0$ et désignons par $v(t, \varepsilon)$ l'intégrale de l'équation (3.2_ε) qui passe par le point $(t_0, v(t_0))$. Pour $v = -\sqrt{C}$ le second membre de l'équation (3.2_ε) est, en vertu de l'hypothèse H, supérieur ou égal à $\varepsilon > 0$. L'intégrale $v(t, \varepsilon)$ ne peut donc pas sortir du rectangle R par son côté inférieur, de sorte que l'on a pour tout $t \geqslant t_0$: $v(t, \varepsilon) \geqslant -\sqrt{C}$. Remarquons que par tout point du plan (t, v) il ne passe qu'une seule intégrale de l'équation (3.2), car le second membre de cette équation est un polynôme en v. Il en résulte que de la suite, par exemple, $v(t, 1/n)$ on peut extraire ([4], p. 92) une suite partielle $v(t, 1/n_i)$ telle que $v(t) = \lim\limits_{i\to\infty} v(t, 1/n_i)$ pour tout $t \geqslant t_0$. On a donc $v(t) \geqslant -\sqrt{C}$ dans l'intervalle $\Delta(t_0)$ et, par suite

$$-\sqrt{C} \leqslant v(t) \leqslant 0$$

c'est-à-dire, comme les fonctions $u(t)$ et $u'(t)$ ne peuvent pas s'annuler simultanément:

$$-\sqrt{C}\, u(t) \leqslant u'(t) \leqslant 0$$

et par conséquent

$$u(t) \geqslant u_0 \exp \sqrt{C}(t_0 - t) > 0.$$

§ 4. Du lemme I on peut tirer sans difficulté quelques conséquences immédiates.

1° *Si les fonctions* $a(t)$ *et* $b(t)$ *satisfont à l'hypothèse* H, *aucune intégrale non banale de l'équation* (1.6) *ne peut s'annuler qu'une seule fois dans l'intervalle* Δ.

2° *Dans la même hypothèse, toute intégrale de l'équation* (1.6) *devient, pour t suffisamment grands, monotone: décroissante si elle est positive, et croissante si elle est négative.*

En effet, prenons une intégrale arbitraire $u(t)$ de l'équation (1.6) et supposons que pour un $t_0 \geqslant 0$ on ait ou bien $u(t_0) > 0$ et $u'(t_0) > 0$, ou bien $u(t_0) < 0$ et $u'(t_0) < 0$. Il suffit évidemment d'envisager seulement le premier de ces cas, puisque le second s'y ramène par le changement de $u(t)$ en $-u(t)$. Or, en raison de l'équation (1.6):

$$u''(t) = -a(t)u'(t) - b(t)u(t).$$

Donc la fonction $u'(t)$, aussi longtemps qu'elle reste positive, est une fonction décroissante. Bien plus, pour un $t_1 > t_0$ on doit avoir $u'(t_1) = 0$. Evidemment $u(t_1) > u(t_0) > 0$. On peut donc appliquer à l'intégrale $u(t)$ et l'intervalle $\Delta(t_1)$ le lemme I, d'où il résulte que $u'(t) \leqslant 0$ pour tout $t \geqslant t_1$.

§ 5. Supposons que les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ satisfassent à l'hypothèse H et désignons par $u_1(t)$ et $u_2(t)$ deux intégrales indépendantes de l'équation (1.6) telles que

$$u_1(0) = u_2(0) = 1, \quad u_1'(0) = 0, \quad u_2'(0) = -\sqrt{C}. \tag{5.1}$$

En vertu du lemme I, ce sont des fonctions positives et non croissantes dans l'intervalle Δ. On a donc

$$\lim_{t\to\infty} u_1(t) = u_1(\infty) \geqslant 0, \quad \lim_{t\to\infty} u_2(t) = u_2(\infty) \geqslant 0.$$

La différence $z(t) = u_1(t) - u_2(t)$ est aussi l'intégrale de l'équation (1.6). Mais $z(0) = 0$ et $z'(0) = \sqrt{C}$. En s'appuyant sur le lemme I on peut facilement démontrer que dans l'intervalle Δ on a $z(t) \geqslant 0$ et, par conséquent

$$0 < u_2(t) \leqslant u_1(t) \quad (t \geqslant 0).$$

En effet, on a $z'(0) > 0$. Si $z'(t) > 0$ pour $t \geqslant 0$, notre assertion est évidemment vraie. Dans le cas contraire il existe un $t_0 > 0$ tel que $z'(t_0) = 0$ et $z(t_0) > 0$. Alors du lemme I il résulte que $z(t) > 0$ pour $t \geqslant t_0$. Par suite $z(t) \geqslant 0$ pour $t \geqslant 0$.

Trois cas sont donc possibles: 1° $u_1(\infty) = u_2(\infty) = 0$ et alors l'équation (1.6) est du type (Z); 2° $u_1(\infty) > 0$ et $u_2(\infty) = 0$. Dans ce cas l'équation (1.6) est du type (M); 3° $u_1(\infty) > 0$ et $u_2(\infty) > 0$. Alors l'intégrale non banale $u_3(t) = u_1(t)u_2(\infty) - u_2(t)u_1(\infty)$ tend vers zéro lorsque t croît indéfiniment. L'équation (1.6) est donc du type (M).

On obtient ainsi (voir [2]; p. 76):

Lemme II. *Si les fonctions* $a(t)$ *et* $b(t)$ *satisfont à l'hypothèse* H, *l'équation* (1.6) *est ou bien du type* (Z), *ou bien du type* (M). *Elle est du type* (Z), *si* $u_1(\infty) = 0$ *et du type* (M), *si* $u_1(\infty) > 0$.

§ 6. Posons maintenant pour tout $t \geqslant 0$

$$A(t) = \exp\Big(\int_0^t a(s)\,ds\Big). \tag{6.1}$$

Théorème I. *Supposons que les fonctions* $a(t)$ *et* $b(t)$ *satisfassent à l'hypothèse* H. *Alors, pour que l'équation* (1.6) *soit du type* (Z), *il faut et il suffit que l'on ait*

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \Big(\frac{1}{A(s)} \int_0^s A(\tau)\,d\tau\Big)\,ds = +\infty. \tag{6.2}$$

Par conséquent, pour que l'équation (1.6) *soit du type* (M), *il faut et il suffit que l'on ait*

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{A(s)}\int_0^s A(\tau)\,d\tau\right) ds < +\infty. \tag{6.3}$$

Nous avons donné la démonstration de ce théorème dans la note [3].

En modifiant un peu la démonstration du théorème précédent on peut établir un critère plus général, suffisant pour que l'équation (1.6) soit du type (M), à savoir:

THÉORÈME II. *Supposons que le coefficient* $b(t)$ *satisfasse dans l'intervalle* Δ *à l'inégalité*

$$|b(t)| \leqslant B, \tag{6.4}$$

B étant une constante finie. Alors, pour que l'équation (1.6) *soit du type* (M), *il suffit que l'on ait la relation* (6.3).

Démonstration. Soit $u(t)$ une intégrale de l'équation (1.6) pour laquelle

$$u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = u_0' \quad (t_0 \geqslant 0).$$

On vérifie aisément que la fonction $u(t)$ satisfait à l'équation intégrale

$$u(t) = u_0 + u_0' A(t_0)\int_{t_0}^t \frac{ds}{A(s)} - \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{A(s)}\int_{t_0}^s A(\tau)b(\tau)u(\tau)\,d\tau\right) ds. \tag{6.5}$$

Prenons un t_0 assez grand pour que l'on ait

$$\int_{t_0}^\infty \left(\frac{1}{A(s)}\int_{t_0}^s A(\tau)\,d\tau\right) ds \leqslant \frac{\ln(1+\lambda)}{B}, \tag{6.6}$$

où λ est un nombre positif tel que

$$(1+\lambda)\ln(1+\lambda) \leqslant \tfrac{1}{2}. \tag{6.7}$$

Désignons par $u(t)$ l'intégrale de l'équation (1.6) pour laquelle $u(t_0) = 1$ et $u'(t_0) = 0$. On a alors, en vertu de la formule (6.5):

$$u(t) = 1 - \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{A(s)}\int_{t_0}^s A(\tau)b(\tau)u(\tau)\,d\tau\right) ds. \tag{6.8}$$

Désignons par $U(t)$ la fonction continue $\max\limits_{t_0\leqslant s\leqslant t} u(s)$. De (6.8) et de l'hypothèse (6.4) on tire immédiatement l'inégalité

$$U(t) \leqslant 1 + B\int_{t_0}^t \left(\frac{1}{A(s)}\int_{t_0}^s A(\tau)\,U(\tau)\,d\tau\right) ds.$$

La fonction $U(t)$ étant non décroissante, il en résulte que

$$U(t) \leqslant 1 + B\int_{t_0}^t \left(\frac{1}{A(s)}\int_{t_0}^s A(\tau)\,d\tau\right) U(s)\,ds.$$

De la propriété bien connue de telles inégalités intégrales (v. par exemple [1], p. 35) on obtient pour la fonction $U(t)$ l'évaluation suivante:

$$U(t) \leqslant \exp\left(B\int_{t_0}^t \left(\frac{1}{A(s)}\int_{t_0}^s A(\tau)\,d\tau\right) ds\right) \leqslant 1+\lambda. \tag{6.9}$$

Revenons à la formule (6.8). Dans tout intervalle $\langle t_0, t\rangle$ $(t_0 \leqslant t)$ où la fonction $u(t)$ est positive, on a en vertu de (6.6), (6.7), (6.8) et (6.9):

$$\begin{aligned} u(t) &\geqslant 1 - \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{A(s)}\int_{t_0}^s A(\tau)|b(\tau)|\,U(\tau)\,d\tau\right) ds \\ &\geqslant 1 - B(1+\lambda)\int_{t_0}^t \left(\frac{1}{A(s)}\int_{t_0}^s A(\tau)\,d\tau\right) ds \\ &\geqslant 1-(1+\lambda)\ln(1+\lambda) > \tfrac{1}{2}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

La fonction $u(t)$, évidemment positive dans un voisinage suffisamment petit de t_0, ne peut donc pas changer de signe dans l'intervalle $\Delta(t_0)$. On a donc en vertu de (6.9):

$$0 \leqslant u(t) \leqslant U(t) \leqslant 1+\lambda \quad (t_0 \leqslant t). \tag{6.11}$$

De l'hypothèse (6.3), de l'équation (6.8) et des inégalités (6.11) il résulte que la fonction $u(t)$ tend vers une limite $u(\infty)$ finie lorsque t croît indéfiniment. Cette limite doit être positive en raison de l'inégalité (6.10).

En choisissant un $t_1 > t_0$ de sorte que l'intégrale $u_1(t)$, pour laquelle $u_1(t_1) = 1$ et $u'(t_1) = 0$, soit linéairement indépendante de l'intégrale $u(t)$ envisagée ci-dessus, on trouve pareillement que la limite $u_1(\infty)$ existe et qu'elle est positive. L'intégrale $u_2(t) = u_1(\infty)u(t) - u(\infty)u_1(t)$ tend donc vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Par suite, l'équation (1.6) est du type (M).

§ 7. Il est à souligner que dans les relations (6.2) et (6.3), dont dépend l'allure asymptotique des intégrales de l'équation (1.6), le coefficient $b(t)$ n'intervient pas. Donc, l'hypothèse H sur les coefficients $a(t)$ et $b(t)$ une fois admise, on n'a plus besoin d'envisager l'équation générale (1.6). L'équation (1.6) est du type (Z) ou du type (M) si et seulement si l'équation

$$u''+a(t)u'+Cu = 0$$

est du type (Z) ou (M) respectivement. En introduisant une nouvelle variable indépendante $s = t/\sqrt{C}$ et en posant $a(t) = \sqrt{C}\bar{a}(t/\sqrt{C})$, on obtient de cette dernière équation l'équation encore plus simple

$$u''+\bar{a}(s)u'+u = 0,$$

identique, aux notations près, à l'équation (1.1).

En s'appuyant sur les théorèmes I et II on pourrait établir un certain nombre de conditions suffisantes pour que l'équation (1.6) soit ou bien du type (Z), ou bien du type (M). Il suffirait, à cet effet, de vérifier chaque fois que telle ou telle autre condition imposée à la fonction $a(t)$ assure soit la relation (6.2), soit l'inégalité (6.3). Mais, en réalité, les conditions (6.2) et (6.3) sont assez compliquées et leur vérification directe, loin d'être banale, est souvent très difficile. C'est pourquoi il est préférable pour nos buts de donner aux théorèmes I et II une autre forme équivalente.

Posons à cet effet (cf. la définition (6.1)):

$$v(t) = \frac{1}{A(t)}\int_0^t A(s)\,ds. \tag{7.1}$$

On peut aisément vérifier que la fonction $v(t)$ est l'intégrale de l'équation différentielle

$$v' = 1-a(t)v. \tag{7.2}$$

De plus, on a $v(0) = 0$.

Nous dirons que l'équation (7.2) est du type (M*) si la solution $v(t)$ de cette équation, issue du point $(0, 0)$, admet une intégrale finie dans l'intervalle Δ. Pareillement, nous dirons que l'équation (7.2) est du type (Z*) si la solution envisagée ne jouit pas de cette propriété.

Cela posé, on peut mettre les théorèmes I et II sous la forme suivante:

THÉORÈME Ia. *Supposons que les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ satisfassent à l'hypothèse* H. *Alors, pour que l'équation* (1.6) *soit du type* (Z), *il faut et il suffit que l'équation* (7.2) *soit du type* (Z*). *Pour que l'équation* (1.6) *soit du type* (M), *il faut et il suffit que l'équation* (7.2) *soit du type* (M*).

THÉORÈME IIa. *Supposons que le coefficient $b(t)$ satisfasse à l'inégalité* (6.4). *Alors, pour que l'équation* (1.6) *soit du type* (M), *il suffit que l'équation* (7.2) *soit du type* (M*).

§ 8. De la forme de l'équation (7.2) on peut facilement déduire quelques propriétés importantes de l'intégrale $v(t)$ $(v(0) = 0)$. Le second membre de l'équation (7.2) est égal à 1 pour $v = 0$. On a donc dans l'intervalle Δ tout entier

$$0 \leqslant v(t). \tag{8.1}$$

Dans l'hypothèse que $a(t) \geqslant 0$, la dérivée $v'(t)$ de l'intégrale envisagée est bornée supérieurement par 1. Il en résulte que chaque fois que la solution $v(t)$ admet une intégrale finie dans l'intervalle Δ, on doit avoir

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 0. \tag{8.2}$$

§ 9. Grâce au théorème Ia on peut aisément démontrer un simple théorème de comparaison. Il suffit d'ailleurs, comme nous l'avons remarqué au § 7, d'établir un tel théorème pour l'équation réduite (1.1).

THÉORÈME III. *Si dans l'intervalle Δ on a $2 \leqslant a(t) \leqslant a_1(t)$ et si l'équation* (1.1) *est du type* (M), *l'équation*

$$u''+a_1(t)u'+u = 0 \tag{9.1}$$

est du même type. Par conséquent, si l'équation (9.1) *est du type* (Z), *l'équation* (1.1) *l'est aussi.*

Démonstration. Supposons que l'équation (1.1) soit du type (M). En vertu du théorème Ia cela veut dire que l'équation (7.2) est du type (M*), c'est-à-dire que la solution $v(t)$ de cette équation, pour laquelle $v(0) = 0$, admet une intégrale finie dans l'intervalle Δ. Mais la fonction $v(t)$ est non négative (cf. (8.1)), on a donc

$$v'(t) = 1-a(t)v(t) \geqslant 1-a_1(t)v(t).$$

De cette inégalité différentielle il résulte que $v(t) \geqslant v_1(t)$, où $v_1(t)$ désigne l'intégrale de l'équation

$$v' = 1-a_1(t)v \tag{9.2}$$

issue du point (0,0). On a donc l'inégalité

$$\int_0^\infty v_1(t)\,dt < +\infty.$$

L'équation (9.2) est donc du type (M*). En vertu du théorème Ia, il en résulte que l'équation (9.1) est du type (M).

Le théorème III se trouve ainsi démontré.

En tenant compte du fait que pour $a(t) \equiv a \geqslant 2$ l'équation (1.1) est du type (Z), on obtient immédiatement du théorème III:

Corollaire 1. *Si $2 \leqslant a(t) \leqslant a$, où a est un nombre constant, l'équation* (1.1) *est du type* (Z).

§ 10. Les théorèmes I et Ia nous permettent d'établir facilement deux critères suffisants pour que l'équation (1.6) soit du type (Z). Pour cela désignons par $J(t)$ la fonction

$$J(t) = \int_0^t \frac{ds}{a(s)}. \tag{10.1}$$

Théorème IV. *Supposons que les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ satisfassent à l'hypothèse* H. *Alors, pour que l'équation* (1.6) *soit du type* (Z), *il suffit que l'on ait*

$$J(\infty) = \int_0^\infty \frac{ds}{a(s)} = +\infty \tag{10.2}$$

et

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{a'(t)}{a^2(t)J(t)} > -\infty. \tag{10.3}$$

Théorème V. *Supposons que les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ satisfassent à l'hypothèse* H. *Alors, pour que l'équation* (1.6) *soit du type* (Z), *il suffit que l'on ait la relation* (10.2) *et*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{a'(t)}{a^2(t)J(t)} < +\infty. \tag{10.3'}$$

Les démonstrations de ces deux théorèmes ont été données dans la note déjà citée [3].

Remarque I. Le théorème IV constitue la généralisation d'un théorème analogue de M. Zlámal, établi pour l'équation (1.1) (v. [2], Satz 2), en ce qu'il permet de remplacer l'inégalité de Zlámal

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{a'(t)}{a^2(t)J(t)} > -1$$

par l'inégalité (10.3).

Remarque II. Supposons que la dérivée $a'(t)$ de la fonction $a(t)$ soit bornée supérieurement par un nombre positif K. On a alors l'inégalité $a(t) \leqslant L+Kt$, où L est une constante positive. Mais pour la fonction croissante $L+Kt$ on a évidemment

$$\int_0^\infty \frac{dt}{L+Kt} = +\infty$$

ainsi que la relation (10.3). En vertu du théorème IV, l'équation $u''+(L+Kt)u'+Cu = 0$ est du type (Z). Par suite, du théorème III on obtient (voir [2], Satz 1, p. 78):

Corollaire II. *Supposons que les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ satisfassent à l'hypothèse* H. *Alors, si la dérivée de la fonction $a(t)$ est bornée supérieurement par une constante positive, l'équation* (1.6) *est du type* (Z).

§ 11. On peut aussi donner un simple critère suffisant pour que l'équation (1.6) soit du type (M), à savoir:

Théorème VI. *Supposons que les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ satisfassent dans l'intervalle Δ aux inégalités*

$$|b(t)| \leqslant B, \quad 0 < a(t), \tag{11.1}$$

B étant une constante finie. Alors, pour que l'équation (1.6) *soit du type* (M), *il suffit que l'on ait*

$$J(\infty) = \int_0^\infty \frac{ds}{a(s)} < +\infty. \tag{11.2}$$

Démonstration. En vertu du théorème IIa il suffit de démontrer que de l'inégalité (11.2) il résulte que l'équation (7.2) est du type (M*). Prenons à cet effet l'intégrale $v(t)$ de l'équation (7.2) pour laquelle on a $v(0) = 0$. On a évidemment, en vertu de l'équation (7.2):

$$\frac{1}{a(t)} = \frac{v(t)}{1-v'(t)}.$$

Nous allons montrer que l'on a

$$\int_0^\infty v(t)\,dt \leqslant \int_0^\infty \frac{v(t)}{1-v'(t)}\,dt = \int_0^\infty \frac{dt}{a(t)} < +\infty. \tag{11.3}$$

En effet, pour $t \geqslant 0$ on a

$$\int_0^t v(s)\,ds - \int_0^t \frac{v(s)}{1-v'(s)}\,ds = -\int_0^t \frac{v(s)v'(s)}{1-v'(s)}\,ds. \tag{11.4}$$

La fonction $1-v'(t)$ est toujours positive, plus grande que l'unité, si $v'(t) < 0$ et moindre que l'unité, si $v'(t) > 0$. On a donc

$$\frac{v(t)v'(t)}{1-v'(t)} \geqslant v(t)v'(t).$$

Donc, en vertu de (11.4):

$$\int_0^t v(s)ds - \int_0^t \frac{v(s)}{1-v'(s)}ds \leqslant -\int_0^t v(s)v'(s)ds = -\tfrac{1}{2}v^2(t) \leqslant 0.$$

En passant à la limite pour $t\to\infty$, on en tire immédiatement l'inégalité (11.3).

Le théorème VI se trouve ainsi démontré.

Remarque III. Dans la note [3] nous avons déjà démontré que si la seconde des intégrales (11.3) est finie, la première l'est aussi, mais cette démonstration était assez compliquée. C'est pourquoi nous donnons ici une autre démonstration de ce fait.

Remarque IV. Le théorème VI constitue la généralisation de deux théorèmes analogues établis par M. Zlámal dans le cas de l'équation (1.1). Ce théorème montre notamment que les hypothèses supplémentaires de Zlámal suivant lesquelles ou bien

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{a'(t)}{a^2(t)} < 1$$

(v. [2], Satz 3), ou bien $a'(t)\geqslant 1$ (Satz 4) sont bien superflues.

§ 12. THÉORÈME VII. *Si les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ satisfont à l'hypothèse* H, *pour toute intégrale $u(t)$ de l'équation* (1.6) *on a*

(12.1) $$\lim_{t\to\infty}u'(t) = 0.$$

Démonstration. Nous démontrerons d'abord que chaque fois que l'on a

(12.2) $$\lim_{t\to\infty}u(t) = 0$$

on a aussi (12.1) En effet, on a en tout cas $\liminf_{t\to\infty}|u'(t)| = 0$. Pour la démonstration par l'absurde supposons que l'on ait $\limsup_{t\to\infty}|u'(t)| > 0$ et, par suite ou bien $\limsup_{t\to\infty}u'(t) > 0$, ou bien $\liminf_{t\to\infty}u'(t) < 0$. Il suffit d'ailleurs de nous occuper seulement du premier de ces cas. La fonction $u'(t)$ aurait alors une infinité de maxima aux points $t_1, t_2, \ldots$ tels que

$$u''(t_i) = 0,\quad u'(t_i)\geqslant c > 0,\quad \lim_{t\to\infty} t_i = +\infty\quad (i=1,2,\ldots)$$

ce qui est incompatible, en vertu de l'hypothèse H et de (12.2), avec la relation

$$a(t_i)u'(t_i)+b(t_i)u(t_i) = 0,$$

obtenue de l'équation (1.6)(1).

Il est désormais facile d'achever la démonstration du théorème VII. Nous distinguons deux cas:

1° L'équation (1.6) est du type (Z). Alors toute intégrale $u(t)$ de cette équation satisfait à (12.2) et, par suite, d'après ce que nous venons de démontrer, sa dérivée $u'(t)$ tend vers zéro lorsque t croît indéfiniment.

2° L'équation (1.6) est du type (M). On peut alors choisir deux intégrales linéairement indépendantes $u_1(t)$ et $u_2(t)$ de telle sorte que l'on ait

$$\lim_{t\to\infty}u_1(t) > 0,\quad \lim_{t\to\infty}u_2(t) = 0.$$

Comme nous le savons (cf. le lemme II), on peut admettre que $u_1(0) = 1$ et $u_1'(0) = 0$. De ce que nous avons déjà démontré il résulte que

(12.3) $$\lim_{t\to\infty}u_2'(t) = 0.$$

D'autre part, de la formule (6.5) on tire

$$u_1'(t) = -\frac{1}{A(t)}\int_0^t A(s)b(s)u_1(s)ds.$$

Mais, d'après le lemme I $0 < u_1(t)\leqslant 1$. On a donc, en vertu des inégalités (2.1):

$$|u_1'(t)| \leqslant \frac{C}{A(t)}\int_0^t A(s)ds$$

c'est-à-dire, d'après la définition (7.1):

(12.4) $$|u_1'(t)| \leqslant Cv(t).$$

L'équation (1.6) étant, par hypothèse, du type (M), la solution $v(t)$ de l'équation (7.2) admet une intégrale finie dans l'intervalle Δ (cf. le

(1) Je dois cette partie de la démonstration à M. M. Biernacki.

théorème Ia du § 7). Il en résulte que $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$ (cf. le § 8). On a donc, en vertu de l'inégalité (12.4):

$$\lim_{t\to\infty} u_1'(t) = 0. \tag{12.5}$$

Toute intégrale $u(t)$ de l'équation (1.6) est une combinaison linéaire des intégrales $u_1(t)$ et $u_2(t)$: $u(t) = c_1u_1(t)+c_2u_2(t)$. Sa dérivée tend donc, en vertu des relations (12.3) et (12.5), vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

§ 13. Supposons que les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ satisfassent à l'hypothèse H (cf. le § 2). Supposons que l'équation (1.6) soit du type (M) et désignons par $\varphi(t)$ l'intégrale de cette équation pour laquelle on a

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 1. \tag{13.1}$$

Comme nous le savons déjà (cf. les lemmes I et II), la fonction $\varphi(t)$ peut être choisie de sorte qu'elle soit une fonction positive et décroissante dans l'intervalle $\varDelta$ (il suffit en effet de poser $\varphi(t) = u_1(t)/u_1(\infty)$). On vérifie aisément que la fonction

$$\psi(t) = \varphi(t)\int_t^\infty \frac{1}{\varphi^2(s)}\cdot\frac{ds}{A(s)} \tag{13.2}$$

est aussi une intégrale de l'équation (1.6). Or, en vertu de l'hypothèse (13.1), on a

$$\psi(t) = \big(1+o(1)\big)\int_t^\infty \frac{1}{\varphi^2(s)}\cdot\frac{ds}{A(s)} \tag{13.3}$$

et pareillement

$$\int_t^\infty \frac{1}{\varphi^2(s)}\cdot\frac{ds}{A(s)} = \int_t^\infty \frac{ds}{A(s)} + \int_t^\infty \left[\frac{1}{\varphi^2(s)}-1\right]\frac{ds}{A(s)} \tag{13.4}$$

$$= \big(1+o(1)\big)\int_t^\infty \frac{ds}{A(s)}.$$

De la formule (13.2) on tire immédiatement

$$\psi'(t) = \varphi'(t)\int_t^\infty \frac{1}{\varphi^2(s)}\cdot\frac{ds}{A(s)} - \frac{1}{\varphi(t)A(t)}. \tag{13.5}$$

On a évidemment, en vertu de (13.1):

$$\frac{1}{\varphi(t)A(t)} = \big(1+o(1)\big)\frac{1}{A(t)}. \tag{13.6}$$

Du lemme I il résulte que dans l'intervalle $\varDelta$ on a $\varphi(t) \geqslant 1$. Par suite, en vertu des inégalités (2.1) on a

$$\int_t^\infty \frac{1}{\varphi^2(s)}\cdot\frac{ds}{A(s)} \leqslant \int_t^\infty \frac{ds}{A(s)} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{C}}\int_t^\infty \frac{a(s)\,ds}{A(s)} = \frac{1}{2\sqrt{C}}\cdot\frac{1}{A(t)}. \tag{13.7}$$

Des relations (13.5)-(13.7) et du fait que $\lim_{t\to\infty}\varphi'(t) = 0$ (cf. le théorème VII du § 12) on tire

$$\psi'(t) = -\frac{1}{A(t)}\big(1+o(1)\big). \tag{13.8}$$

Des relations (13.2)-(13.4) et (13.8) on obtient donc:

THÉORÈME VIII. *Si les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ satisfont à l'hypothèse* H *et l'équation* (1.6) *est du type* (M), *il existe une intégrale $\psi(t)$ de cette équation telle que*

$$\psi(t) = \big(1+o(1)\big)\int_t^\infty \frac{ds}{A(s)}, \qquad \psi'(t) = -\frac{1}{A(t)}\big(1+o(1)\big).$$

Remarque V. Dans le cas où $\lim_{t\to\infty} a(t) = +\infty$ la fonction $\int_t^\infty ds/A(s)$ est infiniment petite d'ordre plus élevé que $1/A(t)$, car on obtient par la règle de De l'Hôpital (cf. la définition de la fonction $A(t)$ au § 6):

$$\lim_{t\to\infty} A(t)\int_t^\infty \frac{ds}{A(s)} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{a(t)} = 0.$$

§ 14. D'après ce que nous avons dit au § 1, les théorèmes I-VIII donnent autant de théorèmes sur l'allure asymptotique des intégrales de l'équation (1.4). Nous nous bornerons d'ailleurs — pour simplifier — au cas où $\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = 0$. Ainsi, par exemple, des théorèmes VI et VIII on obtient le suivant:

THÉORÈME VIa. *Si* $\varepsilon(t) > 0$, $\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = 0$ *et*

$$\int_0^\infty \varepsilon(t)\,dt < +\infty,$$

il existe une intégrale $\varphi(t)$ *de l'équation* (1.4) *telle que*

$$\varphi(t) = e^{-t}\big(1+o(1)\big), \qquad \varphi'(t) = -e^{-t}\big(1+o(1)\big)$$

et une autre $\psi(t)$ *telle que*

$$\psi(t) = \big(1+o(1)\big)e^{-t}\int_t^\infty e^{2s}\exp\left(-\int_0^s \frac{d\tau}{\varepsilon(\tau)}\right)ds,$$

$$\psi'(t) = \big(-1+o(1)\big)e^{t}\exp\left(-\int_0^t \frac{ds}{\varepsilon(s)}\right).$$

Démonstration. Sans restreindre la généralité de nos raisonnements nous pouvons admettre que $\varepsilon(t) \leqslant \frac{1}{4}$. Cela posé, pour démontrer la première partie du théorème il suffit de remarquer que

$$2\int_0^\infty \varepsilon(t)\,dt \geqslant \int_0^\infty \frac{\varepsilon(t)}{1-2\varepsilon(t)}\,dt = \int_0^\infty \left[\frac{1}{\varepsilon(t)}-2\right]^{-1} dt$$

et d'appliquer à l'équation (1.5) les théorèmes VI et VII.

Pour la démonstration de la seconde partie du théorème il faut remarquer que dans le cas de l'équation (1.5) on a

$$A(t) = \exp\left(\int_0^t \left(\frac{1}{\varepsilon(s)}-2\right)ds\right) = e^{-2t}\exp\left(\int_0^t \frac{ds}{\varepsilon(s)}\right).$$

En prenant donc l'intégrale $v(t)$ de l'équation (1.5) qui satisfait à la conclusion du théorème VIII et en posant $\psi(t) = v(t)e^{-t}$ on obtient l'intégrale demandée de l'équation (1.4). Il reste seulement à vérifier que $\psi'(t) = \big(1+o(1)\big)e^{-t}v'(t)$. Or,

$$\psi'(t) = \big(v(t)e^{-t}\big)' = e^{-t}v'(t) - e^{-t}v(t) = e^{-t}v'(t)\left[1-\frac{v(t)}{v'(t)}\right]$$

et d'après la remarque finale du § 13, dans l'hypothèse que $\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = 0$ on a

$$\lim_{t\to\infty}\frac{v(t)}{v'(t)} = 0$$

ce qui était à démontrer.

De la même manière des théorèmes IV et V on obtient immédiatement le suivant:

THÉORÈME IVa. *Si* $\varepsilon(t) > 0$, $\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = 0$ *et*

$$\int_0^\infty \varepsilon(t)\,dt = +\infty,$$

alors pour que toute intégrale de l'équation (1.4) *soit de l'ordre* $o(e^{-t})$ *chacune des conditions suivantes est suffisante*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\varepsilon'(t)}{\int_0^t \varepsilon(s)\,ds} < +\infty \quad \textit{ou} \quad \liminf_{t\to\infty}\frac{\varepsilon'(t)}{\int_0^t \varepsilon(s)\,ds} > -\infty.$$

Démonstration. Pour que l'on puisse appliquer à l'équation (1.5) les théorèmes IV et V, il suffit de remarquer que pour $a(t) = 1/\varepsilon(t)-2$ on a les relations

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{a'(t)}{a^2(t)J(t)} = \limsup_{t\to\infty}\frac{-\varepsilon'(t)}{\big(1-2\varepsilon(t)\big)^2}\left\{\int_0^t \frac{\varepsilon(s)\,ds}{1-2\varepsilon(s)}\right\}^{-1} = -\liminf_{t\to\infty}\frac{\varepsilon'(t)}{\int_0^t \varepsilon(s)\,ds}$$

et pareillement

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{a'(t)}{a^2(t)J(t)} = -\limsup_{t\to\infty}\frac{\varepsilon'(t)}{\int_0^t \varepsilon(s)\,ds}.$$

§ 15. Admettons que les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ satisfassent à l'hypothèse H. D'après les théorèmes IV, V et VI il y a certaines classes de fonctions $a(t)$ (par exemple la classe des fonctions croissantes, celle des fonctions satisfaisant à la condition (10.3) etc.) pour lesquelles la réponse à la question si l'équation (1.6) est du type (Z) ou (M) ne dépend que de la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{dt}{a(t)} \tag{15.1}$$

Pour de telles classes de fonctions on pourrait énoncer un théorème analogue au théorème I du § 6 en y remplaçant tout simplement la relation (6.2) par l'hypothèse que l'intégrale (15.1) soit infinie (relation (10.2)) et la relation (6.3) par l'hypothèse que cette intégrale soit finie (l'inégalité (11.2)).

On peut donc poser le problème général: ne peut-on pas, dans l'énoncé du théorème I, remplacer la relation (6.2) par celle (10.2) et l'inégalité (6.3) par l'inégalité (11.2)?

Nous allons démontrer que la réponse est négative. Or, en vertu du théorème VI, la condition (11.2) a pour conséquence l'inégalité (6.3). Il faut donc montrer que la réciproque n'est pas vraie ou, autrement dit, que la condition (11.2) n'est pas nécessaire pour que l'équation (1.6) soit du type (M).

Dans ce but, nous nous appuierons sur le théorème Ia. Nous allons construire une fonction positive $v(t)$, définie et de classe C^1 dans l'intervalle Δ et telle que

$$\int_0^\infty v(t)\,dt < +\infty, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 1, \tag{15.2}$$

$$0 < \frac{v(t)}{1-v'(t)} \leqslant \tfrac{1}{2} \quad \text{pour tout } t \geqslant 0, \tag{15.3}$$

$$\int_0^\infty \frac{v(t)}{1-v'(t)}\,dt = +\infty. \tag{15.4}$$

Cela fait, il suffira de poser

$$a(t) = \frac{1-v'(t)}{v(t)}$$

et de remarquer que la fonction $v(t)$ devient ainsi l'intégrale de l'équation différentielle (7.2): $v' = 1-a(t)v$. Mais en vertu de l'hypothèse (15.2) c'est une équation du type (M*) et, par suite, d'après le théorème Ia, l'équation correspondante (1.1): $u''+a(t)u'+u = 0$ est du type (M) (les inégalités (15.3) assurent évidemment l'inégalité $a(t) \geqslant 2$ — les coefficients $a(t)$ et 1 de cette dernière équation satisfont donc à l'hypothèse H). D'autre part, de (15.4), on tire

$$\int_0^\infty \frac{dt}{a(t)} = +\infty.$$

L'équation (1.1) peut donc être du type (M) bien que l'on ait la relation (10.2).

Construction de la fonction $v(t)$. Remarquons d'abord que pour la fonction positive $v(t)$ les inégalités (15.3) sont équivalentes à l'inégalité différentielle

$$v'(t) \leqslant 1-2v(t). \tag{15.5}$$

Prenons deux suites de nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ et $\eta_1, \eta_2, \ldots$ tels que l'on ait pour tout i

$$0 < \varepsilon_i \leqslant \tfrac{1}{2}, \quad 0 < \eta_i \leqslant \tfrac{1}{2},$$

$$\sum_{i=1}^\infty \eta_i < +\infty, \quad \sum_{i=1}^\infty \varepsilon_i = +\infty, \quad \sum_{i=1}^\infty \varepsilon_i^2 < +\infty. \tag{15.6}$$

Cela fait, nous définissons la fonction cherchée $v(t)$ de la manière suivante:

1° dans chacun des intervalles $\langle i, i+\varepsilon_i\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots)$ $v(t)$ est égale à l'intégrale de l'équation différentielle

$$v' = 1-2v \tag{15.7}$$

issue du point (i, η_i);

2° dans l'ensemble complémentaire $E = \langle 0, +\infty) - \sum_{i=1}^\infty \langle i, i+\varepsilon_i\rangle$ $v(t)$ est tout à fait arbitraire, pourvu qu'elle satisfasse à l'inégalité (15.5) et

$$\int_E v(t)\,dt < +\infty \tag{15.8}$$

et que $v(t)$ soit de classe C^1 dans l'intervalle Δ tout entier.

On peut aisément vérifier que la fonction $v(t)$ ainsi définie satisfait aux conditions (15.2) et (15.4). En effet, dans chacun des intervalles $\langle i, i+\varepsilon_i\rangle$ on a, en vertu de (15.7): $v'(t) = 1-2v(t) \leqslant 1$ et, par conséquent, pour tout i

$$\int_i^{i+\varepsilon_i} v(t)\,dt \leqslant \int_i^{i+\varepsilon_i} (\eta_i+t-i)\,dt = \eta_i\varepsilon_i + \tfrac{1}{2}\varepsilon_i^2 < \eta_i + \varepsilon_i^2$$

d'où, en tenant compte de (15.6) et (15.8), on obtient l'inégalité (15.2). D'autre part, dans chacun des intervalles $\langle i, i+\varepsilon_i\rangle$: $v'(t) = 1-2v(t)$ et, par suite

$$\frac{v(t)}{1-v'(t)} = \frac{1}{2}.$$

On a donc pour tout i

$$\int_i^{i+\varepsilon_i} \frac{v(t)}{1-v'(t)}\,dt = \frac{1}{2}\varepsilon_i$$

ce qui a pour conséquence, en vertu de l'hypothèse (15.6), la relation (15.4).

Remarque VI. L'exemple que nous venons de construire démontre quelque chose de plus. Pour la fonction $v(t)$ définie ci-dessus on a non seulement la relation (10.2), mais aussi

$$\int_0^\infty \frac{dt}{[a(t)]^{1+a}} = +\infty \qquad (a \geqslant 0).$$

Il en résulte qu'aucune condition de ce type ne peut être suffisante pour que l'équation (1.6) soit du type (Z).

Travaux cités

[1] R. Bellman, *Stability theory of differential equations*, New York 1953.

[2] M. Zlámal, *Über asymptotische Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Tshech. Math. Journal 6 (81) (1956), p. 75-91.

[3] Z. Opial, *Sur l'allure asymptotique des intégrales de l'équation différentielle* $u''+a(t)u'+b(t)u = 0$, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 5 (1957), p. 847-853.

[4] G. Sansone, *Equazioni differenziali*, Parte seconda. Bologna 1949,

Reçu par la Rédaction le 16. 4. 1957

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

Sur les valeurs asymptotiques des intégrales des équations différentielles linéaires du second ordre

par Z. Opial (Kraków)

Dans la présente note je m'occupe de l'allure asymptotique des intégrales de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$u'' - a(t)u' + b(t)u = 0 \tag{1}$$

dans certaines hypothèses sur les coefficients $a(t)$ et $b(t)$ qui vont être précisées dans la suite. Il s'agira, en principe, d'examiner l'allure asymptotique des solutions de cette équation dans le cas où le coefficient $a(t)$ tend vers l'infini lorsque t croît indéfiniment, tandis que $b(t)$ reste borné sur le demi-axe $t \geqslant 0$ tout entier. Les résultats que je vais exposer ici se rattachent aux résultats analogues de Ph. Hartman et A. Wintner publiés dans leur note [1] et à ceux exposés dans mes notes [2] et [3].

1. Notations et définitions. Désignons par $\Delta(t_0)$ l'intervalle infini $\langle t_0, +\infty)$. Nous écrirons tout simplement Δ au lieu de $\Delta(0)$.

Nous dirons que l'équation (1) est *du type* (R), si toute intégrale non triviale de cette équation tend vers l'infini lorsque t croît indéfiniment. Nous dirons pareillement qu'elle est *du type* (M) s'il est possible de choisir deux intégrales linéairement indépendantes de manière que l'une tende vers l'infini et l'autre vers une limite finie, différente de zéro.

Remarquons que si l'équation (1) est du type (M), alors pour tout nombre fini u_0 il existe une et une seule intégrale $u(t)$ de cette équation pour laquelle on a $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = u_0$.

Relativement à l'équation (1) nous admettrons dans la suite l'une des deux hypothèses suivantes: