d'équations de la forme (4), où les membres $F_s$ ne contiennent que les dérivées de $u$ d'ordre inférieur à $\varrho$. En particulier, convenant que $u_1 = \partial^\varrho u / \partial x_1^\varrho$ et tenant compte de la règle de Leibniz, on a pour la première équation (4) ($s = 1$)

$$B_{1j1} = 2\varrho \frac{\partial A_{1j}}{\partial x_1} + B_j,$$

d'où, d'après 3°,

$$|B_{1j1}| \leqslant M_1(2\varrho+1) = M_\varrho.$$

Il en résulte, en vertu du théorème de K. Friedrichs et H. Lewy, que les limitations de la forme (5) pour les dérivées d'ordre $\varrho+1$ d'une solution de l'équation (1) ont lieu dans la pyramide $P_n$, pourvu que sa hauteur ne surpasse pas le nombre $h(M_\varrho)$. Comme $M_\varrho \to \infty$ lorsque $\varrho \to \infty$, la hauteur de cette pyramide tend, d'après (3), vers zéro lorsque $\varrho \to \infty$.

La lacune dont nous venons de parler peut être néanmoins comblée, p. ex. en vertu d'un résultat obtenu par S. L. Soboleff [3], ou bien en vertu d'un théorème de T. Ważewski et de l'auteur [4]. Ce théorème montre en effet que dans les hypothèses du théorème de K. Friedrichs et H. Lewy la limitation de la forme (2) a lieu, quelle que soit la hauteur de la pyramide $P_n$ (cf. [4], p. 9, remarque 3).

### Travaux cités


[1] K. Friedrichs und H. Lewy, *Über die Eindeutigkeit und das Abhängigkeitsgebiet der Lösungen beim Anfangswertproblem linearer hyperbolischer Differentialgleichungen*, Mathematische Annalen 98 (1928), p. 192-204.

[2] J. Schauder, *Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in beliebiger Anzahl von unabhängigen Veränderlichen*, Fundamenta Mathematicae 24 (1935), p. 213-246.

[3] С. Л. Соболев, *Некоторые новые задачи теории уравнений в частных производных*, Математический сборник 5 (47) (1939), p. 71-99.

[4] J. Szarski et T. Ważewski, *Sur une méthode de comparaison des équations hyperboliques aux dérivées partielles du second ordre avec les équations différentielles ordinaires*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 1 (1953), p. 6-10.



INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES


*Reçu par la Rédaction le 20. 5. 1957*

---

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

# Sur l'application de la méthode des approximations successives à une équation intégrale à forte singularité

par D. Przeworska-Rolewicz (Warszawa)

**1. Introduction.** Soit l'équation intégrale à forte singularité

$$\varphi(t) = \lambda \int_L \frac{K[t, \tau, \varphi(\tau)]}{\tau - t} d\tau, \tag{1}$$

où $L$ est un ensemble fini de lignes fermées dans le plan de la variable complexe qui ont une tangente continue et sont disjointes. La fonction complexe des trois variables complexes $K(t, \tau, u)$ est définie dans la région $\mathcal{Q}[t \in L, \tau \in L, |u| \leqslant R]$. L'intégrale a le sens de la valeur principale de Cauchy.

A. I. Gusejnoff [1] a démontré, en appliquant la méthode des approximations successives dans le cas d'une fonction réelle des variables réelles ayant une dérivée $K'_u(t, \tau, u)$ vérifiant la condition de Lipschitz relativement à $u$, que l'équation (1) a une et seulement une solution.

En supposant la fonction $K(t, \tau, u)$ holomorphe, W. Pogorzelski [2] a démontré l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation (1), par la méthode des approximations successives.

Le même auteur a démontré dans le travail [3], moyennant des hypothèses plus générales, l'existence de la solution de l'équation (1), en appliquant le théorème topologique de J. Schauder.

Dans le présent travail je démontre par la méthode des approximations successives, sous des conditions plus générales que dans le travail [2], l'existence d'une solution unique de l'équation (1) dans la région de la variable complexe. Cette méthode présente l'avantage de fournir un algorithme du calcul de la solution et montrer son unicité.

**2. Théorèmes auxiliaires.** Théorème de Banach. *Si, dans l'espace $E$ métrique et complet, l'opération $A$ vérifie l'inégalité suivante relative aux normes*

$$\|Au_1 - Au_2\| \leqslant q\|u_1 - u_2\| \quad (0 < q < 1)$$

*pour deux points quelconques $u_1$ et $u_2$ de l'espace $E$, il existe une solution unique de l'équation fonctionnelle*

$$u = Au.$$

*Cette solution $u$ est la limite d'une suite $\{u_n\}$, définie par la relation de récurrence*

$$u_{n+1} = Au_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

*($u_1$ est un point quelconque de l'espace $E$), qui est convergente selon la norme dans l'espace $E$.*

THÉORÈME DE PLEMELJ-PRIVALOFF. *Si la fonction complexe $F(t, \tau)$, déterminée pour $t \in L$, $\tau \in L$, vérifie la condition de Hölder sous la forme*

$$(2)\qquad |F(t, \tau)-F(t', \tau')| \leqslant f[|t-t'|^{\nu}+|\tau-\tau'|^{\mu}] \quad (0 < \mu < \nu \leqslant 1),$$

*alors la fonction $G(t)$ définie par l'intégrale de Cauchy*

$$G(t) = \int_L \frac{F(t, \tau)}{\tau - t}\, d\tau$$

*pour $t \in L$, vérifie la condition de Hölder*

$$(3)\qquad |G(t)-G(t')| \leqslant fD|t-t'|^{\mu},$$

*où la constante $D$ ne dépend que des lignes $L$.*

**3. L'espace $H^{\mu}$.**

DÉFINITION 1. Nous appelons espace $H^{\mu}$ $(0 < \mu < 1)$ l'espace composé de toutes les fonctions complexes de la variable complexe $t$ définies sur $L$ qui vérifient la condition de Hölder avec l'exposant $\mu$.

Si nous admettons pour l'espace $H^{\mu}$ les définitions bien connues des opérations linéaires et la définition de la norme des éléments par l'égalité

$$(4)\qquad \|\varphi\| = \sup_L |\varphi(t)| + \sup_L \frac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\mu}},$$

l'espace $H^{\mu}$ sera un espace de Banach (c'est-à-dire un espace linéaire, normé et complet).

La convergence selon la norme de la suite de points $\{\varphi_n\}$ dans l'espace $H^{\mu}$ implique la convergence uniforme de la suite fonctionnelle $\{\varphi_n(t)\}$.

**4. Les fonctions de classe $\mathcal{H}_{\mu\nu}$.**

DÉFINITION 2. Une fonction réelle $G(t, \tau, x, y)$ des variables complexes $t, \tau \in L$ et des variables réelles $|x| \leqslant R$, $|y| \leqslant R$ est dite *de classe* $\mathcal{H}_{\mu\nu}$, si

$$(5)\qquad G(t, \tau, x_1, y_1)-G(t, \tau, x_2, y_2) = G_1(t, \tau, x_1, x_2, y_1, y_2)G_2(x_1-x_2)+G_3(t, \tau, x_1, x_2, y_1, y_2)G_4(y_1-y_2),$$



où les fonctions réelles $G_1, G_3$ vérifient la condition de Hölder de la forme

$$(6)\qquad |G_i(t, \tau, x_1, x_2, y_1, y_2)-G_i(t', \tau', x_1', x_2', y_1', y_2')| \leqslant g_i[|t-t'|^{\nu}+|\tau-\tau'|^{\mu}+|x_1-x_1'|+|x_2-x_2'|+|y_1-y_1'|+|y_2-y_2'|]$$
$$(i = 1, 3;\ 0 < \mu < \nu \leqslant 1)$$

et les fonctions réelles $G_2, G_4$ vérifient les conditions

$$(7)\qquad |G_i(x)-G_i(x')| \leqslant g_i|x-x'| \quad (i = 2, 4),$$

$$(8)\qquad G_i(0) = 0 \quad (i = 2, 4),$$

$g_i$ désignant des constantes positives.

La formule (8) implique l'inégalité $|G_i(x)| \leqslant g_i|x|$ $(i = 2, 4)$.

THÉORÈME 1. *Si la fonction $G(t, \tau, x, y)$ admet des dérivées $G_x'$ et $G_y'$ qui vérifient les conditions*

$$(9)\qquad |G_x'(t, \tau, x, y)-G_x'(t', \tau', x', y')| \leqslant g_x'[|t-t'|^{\nu}+|\tau-\tau'|^{\mu}+|x-x'|+|y-y'|],$$

$$(9')\qquad |G_y'(t, \tau, x, y)-G_y'(t', \tau', x', y')| \leqslant g_y'[|t-t'|^{\nu}+|\tau-\tau'|^{\mu}+|x-x'|+|y-y'|],$$

*(où $g_x'$ et $g_y'$ sont des constantes positives, $0 < \mu < \nu \leqslant 1$), la fonction $G(t, \tau, x, y)$ est de classe $\mathcal{H}_{\mu\nu}$.*

La démonstration résulte immédiatement du théorème de la moyenne dû à J. Hadamard.

THÉORÈME 2. *Si la fonction $G(t, \tau, x, y) \in \mathcal{H}_{\mu\nu}$, les dérivées partielles $G_x'$ et $G_y'$ existent et vérifient les inégalités* (9) *et* (9').

Démonstration[1]. Nous démontrerons, par exemple, l'existence de la dérivée $G_x'$, qui vérifie les conditions (9) et (9'). Pour la dérivée $G_y'$ la preuve résulte par analogie.

Nous avons, d'après l'hypothèse (5) relative à la fonction $G$

$$G(t, \tau, x_1, y)-G(t, \tau, x_2, y) = G_1(t, \tau, x_1, x_2, y, y)G_2(x_1-x_2).$$

1° Si $G_1(t, \tau, x, x, y, y) \equiv 0$ on a pour $h \neq 0$ et $t, \tau, x, y$ arbitraires l'égalité

$$\frac{G(t, \tau, x+h, y)-G(t, \tau, x, y)}{h} = G_1(t, \tau, x+h, x, y, y)\frac{G_2(h)}{h}.$$

---

[1] La preuve du théorème 2 est due à M. A. Pliś.

Le quotient $G_2(h)/h$ étant borné, il en résulte

$$G'_x(t, \tau, x, y) \equiv 0.$$

2° Supposons maintenant qu'il existe des $t_0, \tau_0, x_0, y_0$ tels que $G(t_0, \tau_0, x_0, x_0, y_0, y_0) \neq 0$. On peut encore admettre que

$$G_1(t_0, \tau_0, x_0, x_0, y_0, y_0) = 1.$$

Dans le cas contraire nous poserions

$$\tilde{G}_1(t, \tau, x_1, x_2, y, y) = \frac{G_1(t, \tau, x_1, x_2, y, y)}{G_1(t_0, \tau_0, x_0, x_0, y_0, y_0)},$$

$$\tilde{G}_2(h) = G_1(t_0, \tau_0, x_0, x_0, y_0, y_0)G_2(h).$$

Nous démontrerons qu'il existe une dérivée droite $D_+G_2(0)$. Désignons par $l$ la dérivée droite inférieure $\underline{D}_+G_2(0)$. (Remarquons que le nombre $l$ est fini, en vertu de la condition (7)). Pour un nombre positif $\varepsilon$ arbitraire on peut choisir une suite $\{h_\nu\}$ de nombres positifs, convergente vers zéro et telle que

$$G_2(h_\nu) \leqslant (l+\varepsilon)h_\nu.$$

Nous avons

$$G(t_0, \tau_0, x_0+nh_\nu, y_0)-G(t_0, \tau_0, x_0, y_0)$$

$$= \Big[\sum_{k=1}^{n} G_1(t_0, \tau_0, x_0+kh_\nu, x_0+(k-1)h_\nu, y_0, y_0)\Big] G_2(h_\nu).$$

La fonction $G_1$ vérifie la condition (6), d'où

$$G_1(t_0, \tau_0, x_0+kh_\nu, x_0+(k-1)h_\nu, y_0, y_0) \leqslant 1+kg_1h_\nu.$$

Il en résulte l'inégalité suivante:

(10) $\quad G(t_0, \tau_0, x_0+nh_\nu, y_0)-G(t_0, \tau_0, x_0, y_0) \leqslant (l+\varepsilon)[n+\tfrac{1}{2}n(n+1)h_\nu g_1]h_\nu$

pour $n$ naturel arbitraire. Soit $h$ un nombre positif arbitrairement fixé. Il existe une suite de nombres naturels $\{n_\nu\}$ telle que

$$n_\nu h_\nu \to h.$$

En substituant $n = n_\nu$ dans l'inégalité (10) nous obtenons donc (si $\nu \to \infty$)

$$G(t_0, \tau_0, x_0+h, y_0)-G(t_0, \tau_0, x_0, y_0) \leqslant (l+\varepsilon)[h+\tfrac{1}{2}h^2g_1]$$

pour $h > 0$ arbitraire. Pour $h > 0$ suffisamment petits nous avons donc

$$G_2(h) \leqslant \frac{1}{G_1(t_0, \tau_0, x_0+h, x_0, y_0, y_0)}(l+\varepsilon)[h+\tfrac{1}{2}h^2g_1],$$



d'où résulte l'inégalité pour la dérivée droite supérieure

$$\overline{D}_+G_2(0) \leqslant l+\varepsilon \leqslant \underline{D}_+G_2(0)+\varepsilon$$

et l'égalité $\overline{D}_+G_2(0) = \underline{D}_+G_2(0)$. Il existe alors la dérivée droite $D_+G_2(0)$.

En ce qui concerne la dérivée gauche $D_-G_2(0)$ remarquons que

$$G(t_0, \tau_0, x_0, y_0)-G(t_0, \tau_0, x_0+h, y_0) = G_1(t_0, \tau_0, x_0, x_0+h, y_0, y_0)G_2(-h)$$

et

$$G_1(t_0, \tau_0, x_0+h, x_0, y_0, y_0)\frac{G_2(h)}{h} = G_1(t_0, \tau_0, x_0, x_0+h_0, y_0, y_0)\frac{G_1(-h)}{-h}$$

d'où résultent l'existence de la dérivée $D_-G_2(0)$ et l'égalité

$$D_-G_2(0) = D_+G_2(0).$$

Il existe alors la dérivée $G'_2(0)$ et nous avons

$$G'_x(t, \tau, x, y) = G_1(t, \tau, x, x, y, y)G'_2(0).$$

Il est évident que cette dérivée vérifie la condition (9) c. q. f. d.

**5. Applications à l'équation intégrale à forte singularité.** Supposons que la fonction complexe $K(t, \tau, u)$ définie dans la région

$$\mathcal{L}[t \in L, \tau \in L, |u| \leqslant R] \qquad (u = x+iy)$$

et vérifiant la condition de Hölder relativement à $t$ avec l'exposant $\nu$, relativement à $\tau$ avec l'exposant $\mu$ $(0 < \mu < \nu \leqslant 1)$ et la condition de Lipschitz relativement à $u$, ainsi que sa partie réelle et sa partie imaginaire

$$M(t, \tau, x, y) = \operatorname{re} K(t, \tau, u), \qquad N(t, \tau, x, y) = \operatorname{im} K(t, \tau, u)$$

appartiennent à la classe $\mathcal{H}_{\mu\nu}$. Considérons dans l'espace $H^\mu$ un ensemble $Z$ de points $\varphi(t)$ défini par les inégalités

(11) $$|\varphi(t)| \leqslant R,$$

(11′) $$|\varphi(t)-\varphi(t')| \leqslant \varkappa|t-t'|^\mu,$$

les constantes $R$, $0 < \mu < \nu \leqslant 1$ étant fixées par la propriété admise de la fonction $K$ et le coefficient $\varkappa$ étant une constante positive arbitraire, qui n'est pas déterminée pour le moment. Pour résoudre l'équation intégrale proposée (1), transformons l'ensemble $Z \subset H^\mu$ par l'opération intégrale singulière

(12) $$\psi = K\varphi = \lambda \int_L \frac{K[t, \tau, \varphi(\tau)]}{\tau-t}\,d\tau.$$

D'après le théorème cité de Plemelj-Privaloff et en vertu des propriétés de la fonction $K$, le résultat de l'opération (12) appartient à l'espace $H^\mu$. Cherchons la condition pour que l'ensemble $Z'$ de tous les points transformés $\psi$ de l'ensemble $Z$ fasse partie de cet ensemble.

Nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 3. *Pour que l'ensemble $Z'$ des points de l'espace $H^\mu$, obtenus par l'opération* (12) *à partir des points de l'ensemble $Z$ de cet espace, donné par les inégalités* (11) *et* (11'), *fasse partie de l'ensemble $Z$, il suffit que le nombre $\varkappa$ vérifie les inégalités*

$$\frac{|\lambda| D(m+n)}{1-2|\lambda| D(m+n)} \leqslant \varkappa \leqslant \frac{R-|\lambda|\,[\pi R(\sup_L |M|+\sup_L |N|)+I(m+n)]}{2|\lambda| I(m+n)}, \tag{13}$$

*où* $I = \sup_L \int_L \frac{dl_\tau}{|t-\tau|^{1-\mu}}$ (*la constante $D$ ne dépend que des lignes $L$, $m$ et $n$ désignent les coefficients de Hölder des fonctions $M$ et $N$*).

Démonstration. Par hypothèse, les fonctions $M$ et $N$ vérifient les conditions suivantes:

$$|M(t,\tau,x,y)-M(t',\tau',x',y')| \leqslant m[|t-t'|^\nu+|\tau-\tau'|^\mu+|x-x'|+|y-y'|],$$

$$|N(t,\tau,x,y)-N(t',\tau',x',y')| \leqslant n[|t-t'|^\nu+|\tau-\tau'|^\mu+|x-x'|+|y-y'|].$$

En posant $\varphi(t) = x(t)+iy(t)$, nous aurons donc

$$\begin{aligned}
|\psi(t)| &\leqslant \left|\lambda \int_L \frac{M[t,\tau,x(\tau),y(\tau)]}{\tau-t}\,d\tau + i\int_L \frac{N[t,\tau,x(\tau),y(\tau)]}{\tau-t}\,d\tau\right| \\
&\leqslant |\lambda|\cdot\left|\int_L \frac{M[t,\tau,x(\tau),y(\tau)]-M[t,t,x(t),y(t)]}{\tau-t}\,d\tau\right| + \\
&\quad + |\lambda|\cdot\left|\int_L \frac{N[t,\tau,x(\tau),y(\tau)]-N[t,t,x(t),y(t)]}{\tau-t}\,d\tau\right| + \\
&\quad + \pi|\lambda|\{|M[t,t,x(t),y(t)]|+|N[t,t,x(t),y(t)]|\} \\
&\leqslant |\lambda|\, m(1+2\varkappa)\int_L \frac{|\tau-t|^\mu}{\tau-t}\,d\tau + |\lambda|\, n(1+2\varkappa)\int_L \frac{|\tau-t|^\mu}{\tau-t}\,d\tau + \\
&\quad + |\lambda|\pi[\sup_L |M|+\sup_L |N|] \\
&\leqslant |\lambda|(m+n)I(1+2\varkappa)+|\lambda|\pi(\sup_L |M|+\sup_L |N|).
\end{aligned}$$

D'après le théorème du Plemelj-Privaloff (voir p. 162), nous avons

$$|\psi(t)-\psi(t')| \leqslant |\lambda| D(m+n)(1+2\varkappa)|t-t'|^\mu.$$



Donc, l'ensemble $Z'$ fera partie de l'ensemble $Z$ si les inégalités suivantes sont satisfaites:

$$|\lambda|(m+n)I(1+2\varkappa)+|\lambda|\pi(\sup_L |M|+\sup_L |N|) \leqslant R,$$

$$|\lambda| D(m+n)(1+2\varkappa) \leqslant \varkappa,$$

d'où résultent les inégalités (13). Signalons qu'il existe toujours des nombres $\varkappa$ vérifiant les inégalités (13), si $|\lambda|$ est suffisamment petit.

THÉORÈME 4. *Si la fonction $K(t,\tau,u)$ admet une partie réelle $M(t,\tau,x,y)\in\mathcal{H}_{\mu\nu}$ et une partie imaginaire $N(t,\tau,x,y)\in\mathcal{H}_{\mu\nu}$ $(u = x+iy)$, le résultat de l'opération $K$ effectuée sur deux points arbitraires $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ l'ensemble $Z$ vérifie l'inégalité*

$$\|K\varphi_1-K\varphi_2\| \leqslant q\|\varphi_1-\varphi_2\|, \tag{14}$$

*où*

$$q = \max\left\{|\lambda|\left[(I+D)\frac{1+2|\lambda| D(m+n)}{1-2|\lambda| D(m+n)}\,a+\pi b\right],\ |\lambda|(I+D)b\right\}; \tag{15}$$

*on a posé*

$$a = m_1m_2+m_3m_4+n_1n_2+n_3n_4,$$

$$b = m_2\sup_L |M_1|+m_4\sup_L |M_3|+n_2\sup_L |N_1|+n_4\sup_L |N_3|,$$

*où $m_i$, $n_i$ $(i = 1,2,3,4)$ sont les coefficients de Hölder des fonctions $M_i$, $N_i$ $(i = 1,2,3,4)$, qui sont des composantes des fonctions $M, N\in\mathcal{H}_{\mu\nu}$.*

Démonstration. Nous avons

$$\psi_1-\psi_2 = K\varphi_1-K\varphi_2 = \lambda\int_L \frac{K[t,\tau,\varphi_1(\tau)]-K[t,\tau,\varphi_2(\tau)]}{\tau-t}\,d\tau.$$

D'après l'hypothèse, nous aurons

$$\begin{aligned}
&K(t,\tau,u_1)-K(t,\tau,u_2) \\
&= M(t,\tau,x_1,y_1)-M(t,\tau,x_2,y_2)+i\{N(t,\tau,x_1,y_1)-N(t,\tau,x_2,y_2)\} \\
&= M_1(t,\tau,x_1,x_2,y_1,y_2)M_2(x_1-x_2)+M_3(t,\tau,x_1,x_2,y_1,y_2)M_4(y_1-y_2)+ \\
&\quad + i\{N_1(t,\tau,x_1,x_2,y_1,y_2)N_2(x_1-x_2)+N_3(t,\tau,x_1,x_2,y_1,y_2)N_4(y_1-y_2)\},
\end{aligned}$$

où $u_\alpha(t) = x_\alpha(t)+iy_\alpha(t)$ $(\alpha = 1,2)$ et les fonctions $M_\alpha$, $N_\alpha$ $(\alpha = 1,2,3,4)$ vérifient les inégalités (6), (7).

Nous pouvons écrire

$$|M_1(t,\tau,x_1,x_2,y_1,y_2)M_2(x_1-x_2)-M_1(t',\tau',x_1',x_2',y_1',y_2')M_2(x_1'-x_2')|$$
$$\leqslant m_1m_2|x_1-x_2|[|t-t'|^{\nu}+|\tau-\tau'|^{\mu}+|x_1-x_1'|+|x_2-x_2'|+|y-y_1'|+|y_2-y_2'|]+$$
$$+m_2\sup_L|M_1|\cdot|(x_1-x_2)-(x_1'-x_2')|.$$

Posons $h(\gamma)=\sup_L\frac{|\gamma(t_1)-\gamma(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\mu}}$ (le coefficient de Hölder de la fonction $\gamma(t)$); alors

$$|M_1[t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),y_1(\tau),y_2(\tau)]M_2[x_1(\tau)-x_2(\tau)]|-$$
$$-|M_1[t',\tau',x_1(\tau'),x_2(\tau'),y_1(\tau'),y_2(\tau')]M_2[x_1(\tau')-x_2(\tau')]|$$
$$\leqslant m_1m_2[1+h(x_1)+h(x_2)+h(y_1)+h(y_2)]|x_1(\tau)-x_2(\tau)|[|t-t'|^{\nu}+|\tau-\tau'|^{\mu}]+$$
$$+m_2\sup_L|M_1|h(x_1-x_2)|\tau-\tau'|^{\mu}.$$

Remarquons maintenant que $h(x_a)\leqslant\varkappa$, $h(y_a)\leqslant\varkappa$, où $a=1,2$; lorsque $u_a(t)\in Z$, nous aurons donc

$$1+h(x_1)+h(x_2)+h(y_1)+h(y_2)\leqslant 1+4\varkappa.$$

Désignons par $h_{t\tau}(M_1M_2)$ le coefficient de Hölder de la fonction $M_1M_2$ relativement aux variables $t$, $\tau$, analogue au coefficient $h(\gamma)$; nous aurons

$$h_{t\tau}(M_1M_2)\leqslant m_1m_2(1+4\varkappa)\sup_L|x_1(\tau)-x_2(\tau)|+m_2\sup_L|M_1|h(x_1-x_2).$$

Nous obtenons des inégalités analogues pour les fonctions $M_3M_4$, $N_1N_2$ et $N_3N_4$. Alors, d'après le théorème de Plemelj-Privaloff, on aura

$$h(\psi_1-\psi_2)$$
$$\leqslant|\lambda|(m_1m_2+m_3m_4+n_1n_2+n_3n_4)D(1+4\varkappa)\sup_L|\varphi_1-\varphi_2|+$$
$$+|\lambda|D(m_2\sup_L|M_1|+m_3\sup_L|M_4|+n_1\sup_L|N_2|+n_3\sup_L|N_4|)h(\varphi_1-\varphi_2)$$
$$\leqslant|\lambda|Da(1+4\varkappa)\sup_L|\varphi_1-\varphi_2|+|\lambda|Dbh(\varphi_1-\varphi_2).$$

Ensuite nous avons

$$|M_1(t,\tau,x_1,x_2,y_1,y_2)M_2(x_1-x_2)|\leqslant m_2\sup_L|M_1||x_1-x_2|$$



et des inégalités analogues pour les fonctions $M_3M_4$, $N_1N_2$, $N_3N_4$, d'où résulte

$$|\psi_1-\psi_2|$$
$$\leqslant|\lambda|I[h(M_1M_2)+h(M_3M_4)+h(N_1N_2)+h(N_3N_4)]+$$
$$+|\lambda|\pi[\sup_L|M_1M_2|+\sup_L|M_3M_4|+\sup_L|N_1N_2|+\sup_L|N_3N_4|]$$
$$\leqslant|\lambda|I\{a(1+4\varkappa)\sup_L|\varphi_1-\varphi_2|+|\lambda|bh(\varphi_1-\varphi_2)\}+|\lambda|\pi b\sup_L|\varphi_1-\varphi_2|.$$

Nous en concluons que

$$\|\psi_1-\psi_2\|=\sup_L|\psi_1-\psi_2|+h(\psi_1-\psi_2)$$
$$\leqslant|\lambda|\{a(I+D)(1+4\varkappa)+\pi b\}\sup_L|\varphi_1-\varphi_2|+|\lambda|(I+D)bh(\varphi_1-\varphi_2)$$

d'où on obtient la thèse du théorème 4, en choisissant la valeur la plus avantageuse

$$\varkappa=\frac{|\lambda|D(m+n)}{1-2|\lambda|D(m+n)}.$$

THÉORÈME 5. *Si la partie réelle $M(t,\tau,x,y)$ et la partie imaginaire $N(t,\tau,x,y)$ de la fonction $K(t,\tau,u)$ $(x+iy=u)$ sont de classe $\mathcal{H}_{\mu\nu}$, alors pour des valeurs absolues suffisamment petites du paramètre $\lambda$:*

(16) $$0<|\lambda|<\min\left[\frac{1}{2D(m+n)},\frac{1}{b(I+D)},\frac{1}{p_2}\right]$$

*où*

$$p_2=2D(m+n)[a(I+D)-\pi b]p_1+a(I+D)+\pi b+2D(m+n),$$
$$p_1<\min\left[\frac{1}{2D(m+n)},\frac{1}{b(I+D)}\right],$$

*il existe une solution unique de l'équation intégrale* (1).

Démonstration. En vertu du théorème de Banach et du théorème 4, il suffit de démontrer que $q<1$ pour des valeurs absolues suffisamment petites du paramètre $\lambda$. Donc, d'après la formule (15), il y a lieu de supposer que

(17) $$|\lambda|(I+D)b<1,$$

(17′) $$1-2|\lambda|D(m+n)>0,$$

(17″) $$|\lambda|\left[a(I+D)\frac{1+2|\lambda|D(m+n)}{1-2|\lambda|D(m+n)}+\pi b\right]<1.$$

Nous obtenons

$$(18)\qquad |\lambda| < \frac{1}{b(I+D)},$$

$$(18')\qquad |\lambda| < \frac{1}{2D(m+n)}$$

et en réduisant au commun dénominateur nous aurons, d'après l'inégalité (18')

$$(18'')\quad |\lambda|\{2D(m+n)[a(I+D)-\pi b]|\lambda|a(I+D)+\pi b+2D(m+n)\} < 1.$$

Désignons par $p_1$ un nombre positif arbitraire vérifiant l'inégalité

$$p_1 < \min\left[\frac{1}{b(I+D)}, \frac{1}{2D(m+n)}\right].$$

Alors il en résulte l'inégalité suivante:

$$(19)\quad |\lambda| < \frac{1}{2D(m+n)[a(I+D)-\pi b]p_1+a(I+D)+\pi b+2D(m+n)} = \frac{1}{p_2}.$$

En vertu des inégalités (18), (18') et (19), si les valeurs absolues du paramètre $\lambda$ satisfont à l'inégalité (16), nous obtenons la thèse du théorème 5.

### Travaux cités

[1] А. И. Гусейнов, *Об одном интегральном уравнении*, Изв. А. Н. СССР 12 (1948), p. 193-212.

[2] W. Pogorzelski, *Sur l'équation intégrale non linéaire de seconde espèce à forte singularité*, Ann. Polon. Math. 1 (1954), p. 138-148.

[3] — *Badanie równań całkowych mocno-osobliwych metodą punktu niezmienniczego*, Biuletyn W. A. T. 18(1955), p. 3-85.

*Reçu par la Rédaction le 10. 7. 1957*

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

# On summability of double sequences (II)

by A. Alexiewicz and W. Orlicz (Poznań)

In paper [2](1) we have proved strong consistency theorems for the regular summability of double sequences. In the present paper analogous theorems are proved for the restricted summability of double sequences. After preliminary definitions we prove, in section 2, some theorems of Toeplitz type for restricted summability; some instances of these results were proved in an alternative version by C. N. Moore ([5], p. 92). The main result, the consistency theorem, is then proved in section 4. The method is based, as in [2], on the application of two norm spaces. The results may be extended without any alteration to the summability of sequences of multiplicity greater than two.

**1. Definitions and preliminaries.** By a convergent sequence we shall always mean sequences convergent in Pringsheim's sense; the limit of such a sequence $x = \{x_{ik}\}$ will be denoted by $\lim\limits_{i,k\to\infty} x_{ik}$. To recall the notion of restricted convergence let us denote by $S_n$ the set of the pairs $(i, k)$ of indices such that $n^{-1} \leqslant (i+1)(k+1)^{-1} \leqslant n$; the sequence $x = \{x_{ik}\}$ is called *restrictedly convergent* to $x_{..}$ (Moore [6], p. 567) if, given any $\varepsilon > 0$ and $n$, there is a $N$ such that $i, k > N$ together with $(i, k) \epsilon S_n$ implies $|x_{ik} - x_{..}| < \varepsilon$; $x_{..}$ is then called the *limit in the restricted sense* of the sequence $x$ and will be denoted by $[\lim\limits_{i,k\to\infty}] x_{ik}$.

Let $A = (a_{ik\mu\nu})$ be a four dimensional matrix; given a sequence $x = \{x_{ik}\}$, let us consider the transforms

$$A_{ik}(x) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{ik\mu\nu} x_{\mu\nu}.$$

If these series converge (in Pringsheim's sense) for every $i, k$ and there exists $\lim\limits_{i,k\to\infty} A_{ik}(x) = A_{..}(x)$, then the sequence $x$ is called *A-summable* to $A_{..}(x)$; the quantity $A_{..}(x)$ will be written interchangeably $A\text{-}\lim\limits_{i,k\to\infty} x_{ik}$.

(1) Let us correct the following misprints of this paper: p. 176, line 6 is to be read $\|x_0 - x'\|^* < \varepsilon$, $\|x_0 - x''\|^* < \varepsilon$, p. 176, line 18 is to be read $z_{ik} + \varepsilon_{ik} x_{ik}$.