[12] — *On absolute convergence of multiple Fourier series*, Ann. Polon. Math. 5 (1958), p. 107-120.

[13] С. Б. Стечкин, *Об абсолютной сходимости ортогональных рядов*, Матем. сборник 29 (71) (1951), p. 225-232.

[14] O. Szász, *Über die Fourierschen Reihen gewisser Funktionenklassen*, Math. Annalen 100 (1928), p. 530-536.

[15] — *Fourier series and mean moduli of continuity*, Trans. Amer. Math. Soc. 42 (1937), p. 366-395.

[16] L. C. Young, *An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration*, Acta Math. 67 (1936), p. 251-282.

[17] A. Zygmund, *Trigonometrical series*, Warszawa-Lwów 1935.

Reçu par la Rédaction le 17. 5. 1957

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

Remarque sur un travail de J. Schauder

par J. Szarski (Kraków)

Le but de cette note est de combler une lacune dans le travail de J. Schauder sur l'équation hyperbolique quasilinéaire aux dérivées partielles du second ordre [2]. La lacune en question pourrait faire croire au lecteur que la méthode, appliquée par J. Schauder dans son travail fondamental pour la théorie des équations hyperboliques, n'est pas rigoureuse. C'est pourquoi nous avons cru utile de montrer que cette lacune ne tient qu'à l'application d'un théorème peu général et qu'elle peut être comblée grâce à une généralisation de ce théorème. Or, dans le travail cité, J. Schauder fait intervenir un théorème sur les limitations a priori, dû à K. Friedrichs et H. Lewy [1], qui peut être énoncé de la façon suivante.

Soit

$$(1)\quad \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_k}+\sum_{j=1}^{n} B_j(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_j}+C(x_1,\ldots,x_n)u = F(x_1,\ldots,x_n)\qquad (A_{ik}=A_{ki})$$

une équation hyperbolique normale. Supposons que dans une pyramide P_n, dont la base b_{n-1} est située dans le plan $x_n=\text{const}$ et les faces latérales possèdent l'orientation d'espace par rapport à l'équation (1), les coefficients satisfassent aux conditions suivantes:

1° A_{ik}, B_j, C, F sont de classe C^1,

2° la forme quadratique $\sum_{i,k=1}^{n-1} A_{ik}\lambda_i\lambda_k$ est positive définie et $A_{nn}<0$,

3° $|A_{ik}|$, $|B_j|$, $|C|$, $\left|\dfrac{\partial A_{ik}}{\partial x_j}\right| \leqslant M_1$.

Ceci admis, il existe deux nombres positifs $h(M_1)$ et $C_1(M_1)$ dépendant de M_1 tels que, pour toute solution u de l'équation (1) définie et de classe C^2 dans P_n, on a la limitation

$$\int_{P_n}\!\!\cdots\!\int \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx_1\ldots dx_n \tag{2}$$

$$\leqslant C_1(M_1)\left\{\int_{b_{n-1}}\!\!\cdots\!\int\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2+u^2\right]dx_1\ldots dx_{n-1}+\int_{P_n}\!\!\cdots\!\int F^2 dx_1\ldots dx_n\right\},$$

pourvu que la hauteur de la pyramide ne surpasse pas le nombre $h(M_1)$.

Or, le nombre $h(M_1)$ intervenant dans le théorème de K. Friedrichs et H. Lewy est de la forme

$$h(M_1) = \mu/k(M_1),$$

où μ ne dépend que des coefficients A_{ik} et $k(M_1)$ croît indéfiniment avec M_1. Il en résulte que, A_{ik} étant fixés, on a

$$h(M_1)\to 0 \quad \text{lorsque} \quad M_1\to\infty. \tag{3}$$

Un théorème analogue subsiste pour un système d'équations de la forme

$$\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\frac{\partial^2 u_s}{\partial x_i\partial x_k}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{p} B_{sjr}\frac{\partial u_r}{\partial x_j}+\sum_{r=1}^{p} C_{sr}u_r = F_s \qquad (s=1,2,\ldots,p). \tag{4}$$

En effet, dans les mêmes hypothèses sur les coefficients A_{ik}, on a pour toute solution $u_1,\ldots,u_p$ de l'équation (4), définie et de classe C^2 dans la pyramide $P_n(M_1)$ (ce dernier symbole désigne la pyramide P_n dont la hauteur est égale à $h(M_1)$) une limitation de la forme

$$\int_{P_n(M_1)}\!\!\cdots\!\int \sum_{r=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x_j}\right)^2 dx_1\ldots dx_n \tag{5}$$

$$\leqslant C_1'(M_1)\left\{\int_{b_{n-1}}\!\!\cdots\!\int\sum_{r=1}^{p}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x_j}\right)^2+u_r^2\right]dx_1\ldots dx_{n-1}+\right.$$

$$\left.+\int_{P_n(M_1)}\!\!\cdots\!\int\sum_{r=1}^{p}F_r^2 dx_1\ldots dx_n\right\},$$

pourvu que $|B_{sjr}|$, $|C_{sr}|\leqslant M_1$.

En vertu de ce théorème, en différentiant l'équation (1), J. Schauder [2] obtient de proche en proche des limitations des dérivées d'ordre supérieur d'une solution u de l'équation (1), à savoir

$$[1^{\varrho+1}] \qquad \int_{P_n}\!\!\cdots\!\int\left[\sum_{h=0}^{\varrho+1}(D_h u)^2\right]dx_1\ldots dx_n$$

$$\leqslant C_{\varrho+1}(M_1,M_2)\left\{\int_{b_{n-1}}\!\!\cdots\!\int\left[\sum_{h=0}^{\varrho+1}(D_h u)^2\right]dx_1\ldots dx_{n-1}+\right.$$

$$\left.+\int_{P_n}\!\!\cdots\!\int\left[\sum_{h=0}^{\varrho}(D_h F)^2\right]dx_1\ldots dx_n\right\},$$

où $D_h f$ désigne une dérivée quelconque d'ordre h de la fonction $f(x_1,\ldots,x_n)$. Cette limitation est obtenue sous l'hypothèse que la solution u soit de classe $C^{\varrho+2}$ et que A_{ik}, B_j, C, F soient de classe C^{ϱ}, leurs dérivées d'ordre $s\geqslant 2$ étant absolument inférieures au nombre positif M_2. Or, dans la méthode appliquée par J. Schauder [2] pour construire la solution d'une équation hyperbolique quasilinéaire, intervient d'une façon essentielle le fait que les limitations a priori des dérivées d'ordre quelconque soient valables dans la même pyramide $P_n(M_1)$. J. Schauder écrit en effet (voir [2], p. 222): „*Die in den Formeln* $[1^{\varrho+1}]$, $[2^{\varrho+1}]$ *vorkommenden Konstanten* $C_{\varrho+1}(M_1,M_2)$ *hängen — wie dies angedeutet wurde — von* ϱ *ab, d. h. von der Ordnung der zu abschätzenden Ableitung von u. Dagegen ist der Bereich, in welchem diese Abschätzungen vorgenommen werden, d. h. der Pyramidenstumpf* P_n *von* ϱ *unabhängig. Mit anderen Worten, wird die Kantenlänge der Grundfläche* b_{n-1}, *der Neigungswinkel* a *und die Höhe* h *der Beziehung* (15) *unterworfen, d. h. nur als von* A_{ik}, B_j, C *selbst und deren ersten Ableitungen abhängig angenommen, so braucht* P_n *weiter nicht mehr geändert zu werden. In demselben in* § 3 *näher erklärten* P_n *gelten dann ohne weiteres auch die anderen Abschätzungen und Formeln* $[1^{\varrho+1}]$, $[2^{\varrho+1}]$. *Diese Tatsache ist von grosser Wichtigkeit für die folgenden Betrachtungen, insb. die des Kap.* II *und* III".

Cependant le théorème de K. Friedrichs et H. Lewy ne permet point de conclure que les limitations en question soient toutes valables dans la même pyramide. Au contraire, la hauteur de la pyramide P_n, dans laquelle la limitation fournie par ce théorème pour les dérivées d'ordre ϱ est valable tend vers zéro lorsque $\varrho\to\infty$. En effet pour obtenir une limitation a priori des dérivées d'ordre $\varrho+1$ d'une solution u de l'équation (1) (on suppose que la solution u est de classe $C^{\varrho+2}$ et que A_{ik}, B_j, C, F sont de classe C^{ϱ}), on différentie l'équation (1) ϱ fois par rapport à toutes les variables. En désignant les dérivées d'ordre ϱ de la solution u par u_s $(s=1,2,\ldots,p)$, où p est le nombre des dérivées d'ordre ϱ d'une fonction de n variables, on voit alors que ces dérivées vérifient un système d'équations de la forme (4), où les membres F_s ne contiennent que les dérivées de u d'ordre inférieur à ϱ. En particulier, convenant que $u_1 = \partial^\varrho u / \partial x_1^\varrho$ et tenant compte de la règle de Leibniz, on a pour la première équation (4) ($s=1$)

$$B_{1j1} = 2\varrho \frac{\partial A_{1j}}{\partial x_1} + B_j,$$

d'où, d'après 3°,

$$|B_{1j1}| \leqslant M_1(2\varrho+1) = M_\varrho.$$

Il en résulte, en vertu du théorème de K. Friedrichs et H. Lewy, que les limitations de la forme (5) pour les dérivées d'ordre $\varrho+1$ d'une solution de l'équation (1) ont lieu dans la pyramide P_n, pourvu que sa hauteur ne surpasse pas le nombre $h(M_\varrho)$. Comme $M_\varrho \to \infty$ lorsque $\varrho \to \infty$, la hauteur de cette pyramide tend, d'après (3), vers zéro lorsque $\varrho \to \infty$.

La lacune dont nous venons de parler peut être néanmoins comblée, p. ex. en vertu d'un résultat obtenu par S. L. Soboleff [3], ou bien en vertu d'un théorème de T. Ważewski et de l'auteur [4]. Ce théorème montre en effet que dans les hypothèses du théorème de K. Friedrichs et H. Lewy la limitation de la forme (2) a lieu, quelle que soit la hauteur de la pyramide P_n (cf. [4], p. 9, remarque 3).

Travaux cités

[1] K. Friedrichs und H. Lewy, *Über die Eindeutigkeit und das Abhängigkeitsgebiet der Lösungen beim Anfangswertproblem linearer hyperbolischer Differentialgleichungen*, Mathematische Annalen 98 (1928), p. 192-204.

[2] J. Schauder, *Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in beliebiger Anzahl von unabhängigen Veränderlichen*, Fundamenta Mathematicae 24 (1935), p. 213-246.

[3] С. Л. Соболев, *Некоторые новые задачи теории уравнений в частных производных*, Математический сборник 5 (47) (1939), p. 71-99.

[4] J. Szarski et T. Ważewski, *Sur une méthode de comparaison des équations hyperboliques aux dérivées partielles du second ordre avec les équations différentielles ordinaires*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 1 (1953), p. 6-10.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 20. 5. 1957

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

Sur l'application de la méthode des approximations successives à une équation intégrale à forte singularité

par D. Przeworska-Rolewicz (Warszawa)

1. Introduction. Soit l'équation intégrale à forte singularité

$$\varphi(t) = \lambda \int_L \frac{K[t,\tau,\varphi(\tau)]}{\tau - t}\, d\tau, \tag{1}$$

où L est un ensemble fini de lignes fermées dans le plan de la variable complexe qui ont une tangente continue et sont disjointes. La fonction complexe des trois variables complexes $K(t,\tau,u)$ est définie dans la région $\mathcal{Q}[t\in L, \tau\in L, |u| \leqslant R]$. L'intégrale a le sens de la valeur principale de Cauchy.

A. I. Gusejnoff [1] a démontré, en appliquant la méthode des approximations successives dans le cas d'une fonction réelle des variables réelles ayant une dérivée $K'_u(t,\tau,u)$ vérifiant la condition de Lipschitz relativement à u, que l'équation (1) a une et seulement une solution.

En supposant la fonction $K(t,\tau,u)$ holomorphe, W. Pogorzelski [2] a démontré l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation (1), par la méthode des approximations successives.

Le même auteur a démontré dans le travail [3], moyennant des hypothèses plus générales, l'existence de la solution de l'équation (1), en appliquant le théorème topologique de J. Schauder.

Dans le présent travail je démontre par la méthode des approximations successives, sous des conditions plus générales que dans le travail [2], l'existence d'une solution unique de l'équation (1) dans la région de la variable complexe. Cette méthode présente l'avantage de fournir un algorithme du calcul de la solution et montrer son unicité.

2. Théorèmes auxiliaires. Théorème de Banach. *Si, dans l'espace E métrique et complet, l'opération A vérifie l'inégalité suivante relative aux normes*

$$\|Au_1 - Au_2\| \leqslant q\|u_1 - u_2\| \quad (0 < q < 1)$$