ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

Sur les extrema des déterminants

par J. Mikusiński (Warszawa)

1. Dans le déterminant

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \qquad (n \geqslant 2)$$

les *éléments diagonaux* x_{ii} seront des nombres réels, fixés arbitrairement, alors que les *éléments latéraux* x_{ij} $(i \neq j)$ seront des variables réelles. Ainsi, ce déterminant sera considéré comme une fonction du point x dont les $n(n-1)$ coordonnées sont x_{ij} $(i \neq j)$. Notre but est d'étudier les extrema (maximum et minimum) de $D_n(x)$ dans les ensembles E, E_1, E_2, E_{12}, E_3, E_{13} et G qui sont déterminés comme il suit:

L'ensemble E est défini par les inégalités

(E) $$\sum_j{}' |x_{ij}| \leqslant 1 \qquad (i = 1, \dots, n),$$

où le symbole $\sum_j{}'$ désigne la sommation suivant $j = 1, \dots, n$, sauf l'élément dont les deux indices sont égaux; donc $\sum_j{}' |x_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |x_{ij}| - |x_{ii}|$.

L'ensemble E_1 est défini par (E) et

(1) $$x_{ij} = -1,\ 0 \text{ ou } 1 \qquad (i \neq j).$$

L'ensemble E_2 est défini par (E) et

(2) $$x_{ij}x_{ji} \geqslant 0.$$

L'ensemble E_{12} est défini par (E), (1) et (2).

L'ensemble E_3 est défini par (E) et

(3) $$x_{ij} = x_{ji}.$$

L'ensemble E_{13} est défini par (E), (1) et (3).

Enfin, l'ensemble G est défini par les relations

(G) $$x_{ij} = t_{ij}t_{ji}, \qquad \sum_j{}' t_{ij}^2 \leqslant 1.$$

Les ensembles E_1, E_2 et E_3 sont contenus dans E. Les ensembles E_{12} et E_{13} sont contenus dans E_2 et E_3 respectivement. De plus, il est facile de voir que E_{13} est contenu dans G. Comme la relation (3) entraîne (2), E_3 est contenu dans E_2 et pareillement E_{13} est contenu dans E_{12}. Toutes ces relations peuvent être représentées par le schéma suivant:

$$\begin{array}{ccccc} E & \supset E_2 & \supset E_3 & & \\ \cup & \cup & \cup & & \\ E_1 & \supset E_{12} & \supset E_{13} & \subset G. & \end{array}$$

Comme le nombre de points des ensembles E_1, E_{12} et E_{13} est fini, la détermination des extrema pour ces ensembles est la plus facile; dans ce but on n'a qu'à envisager un nombre fini de déterminants et à en choisir celui dont la valeur est la plus petite ou la plus grande.

L'évaluation des extrema de D_n dans les ensembles E et E_2 peut être ramenée aux ensembles E_1 et E_{12}. En effet, nous démontrerons que les extrema de D_n dans l'ensemble E sont les mêmes que dans E_1 et que les extrema de D_n dans E_2 sont les mêmes que dans E_{12}:

$$\min_{E} D_n = \min_{E_1} D_n, \qquad \max_{E} D_n = \max_{E_1} D_n; \tag{4}$$

$$\min_{E_2} D_n = \min_{E_{12}} D_n, \qquad \max_{E_2} D_n = \max_{E_{12}} D_n. \tag{5}$$

On ne peut cependant pas affirmer que les extrema dans E_3 sont les mêmes que dans E_{13}, comme nous le montrerons dans la suite.

Pour G, nous démontrerons les inégalités suivantes:

$$\min_{E_{12}} D_n \leqslant \min_{G} D_n \leqslant \min_{E_{13}} D_n, \qquad \max_{E_{13}} D_n \leqslant \max_{G} D_n \leqslant \max_{E_{12}} D_n. \tag{6}$$

Dans le cas particulier $x_{ii} \geqslant 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, les inégalités pour le minimum peuvent être remplacées par les égalités

$$\min_{E_{12}} D_n = \min_{G} D_n = \min_{E_{13}} D_n \qquad (x_{ii} \geqslant 1). \tag{7}$$

Il peut cependant arriver que $\min\limits_{E_{12}} D_n < \min\limits_{G} D_n < \min\limits_{E_{13}} D_n$, lorsque les inégalités $x_{ii} \geqslant 1$ ne sont pas satisfaites.

2. Tout d'abord, nous nous occuperons des égalités (4) et (5).

Soit i un indice fixé arbitrairement. Nous démontrerons que, étant donné un point $x \in E$, on peut remplacer les éléments latéraux de la $i^{\text{ème}}$ ligne de D_n par les nombres -1, 0 ou 1 de telle manière que la valeur de D_n n'augmente pas.

En effet, en développant le déterminant D_n suivant cette ligne, on a

$$D_n = x_{i1} A_{i1} + \ldots + x_{in} A_{in}.$$

Considérons les mineurs A_{ij}, sauf A_{ii}, pour lesquels le produit $x_{ij} A_{ij}$ est négatif. Soit A_{ij_0} celui dont la valeur absolue est la plus grande. En remplaçant x_{ij_0} par $\operatorname{sgn} x_{ij_0}$ et les éléments restants par 0, la valeur de D_n n'augmente évidemment pas. Si, pour tous les éléments latéraux x_{ij}, les produits $x_{ij} A_{ij}$ sont non négatifs, il suffit de remplacer tous les éléments latéraux par 0; la valeur de D_n n'augmente alors pas non plus.

Ainsi, on peut remplacer successivement les éléments latéraux de la première, de la deuxième ligne etc. par les nombres -1, 0 et 1 de manière que l'un au plus des éléments latéraux devienne, dans chaque ligne, différent de 0 et que la valeur de D_n n'augmente pas. Après cette opération, la variable x appartient à E_1. Comme la valeur de D_n n'a pas augmenté, on a généralement

$$\min_{E} D_n \geqslant \min_{E_1} D_n.$$

D'autre part, on a

$$\min_{E} D_n \leqslant \min_{E_1} D_n,$$

car $E_1 \subset E$. La première des égalités (4) se trouve donc démontrée. La démonstration de la deuxième des égalités (4) est analogue.

Le même raisonnement s'applique exactement lorsque les ensembles E et E_1 sont remplacés par E_2 et E_{12} respectivement. Il suffit de remarquer que les transformations des déterminants, employées dans la démonstration, conservent la relation (2).

Cependant, on ne peut plus appliquer ce raisonnement dans le cas des ensembles E_3 et E_{13}, car les transformations employées ne conservent pas la relation (3). De plus, dans le cas des ensembles E_3 et E_{13}, la proposition analogue à (4) et (5) est fausse, car, par exemple, le déterminant

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & 0 & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & 0 \end{vmatrix} \tag{8}$$

atteint dans E_3 sa valeur maximum

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{4},$$

ce qu'il est facile de vérifier au moyen du calcul différentiel, tandis que ce déterminant a la valeur 0 en tout point de E_{13}.

3. Nous démontrerons maintenant (6). En vertu de $E_{13} \subset G$, on a trivialement

$$\min_G D_n \leqslant \min_{E_{13}} D_n \quad \text{et} \quad \max_{E_{13}} D_n \leqslant \max_G D_n.$$

Il reste donc à démontrer que

$$\min_{E_{12}} D_n \leqslant \min_G D_n \quad \text{et} \quad \max_G D_n \leqslant \max_{E_{12}} D_n. \tag{9}$$

Les inégalités (9) sont trivialement satisfaites pour $n = 2$. Pour les démontrer généralement, nous emploierons l'induction mathématique. Supposons donc que les inégalités (9) aient lieu pour les déterminants d'ordre $n-1$; cela étant, nous démontrerons qu'elles ont encore lieu pour les déterminants d'ordre n.

Si en un point $x \epsilon G$, où le déterminant D_n atteint son minimum, on a $D_n = x_{nn}A_{nn}$, où $x_{nn} \geqslant 0$, alors

$$\min_G D_n \geqslant x_{nn} \min_{G'} D_{n-1} \geqslant x_{nn} \min_{E'_{12}} D_{n-1}, \tag{10}$$

où les ensembles G' et E'_{12} sont définis comme G et E_{12}, mais le nombre de leurs dimensions est inférieur, car les coordonnées d'indice n sont supprimées.

Pour tout point $x' \epsilon E'_{12}$ on a

$$x_{nn} D_{n-1} = D_n,$$

où le déterminant D_n est pris au point $x \epsilon E_{12}$ dont les coordonnées d'indices inférieurs à n sont identiques à celles de x' et les coordonnées dont l'un des indices égal à n sont nulles (sauf x_{nn} qui est un nombre non négatif arbitraire). Il s'ensuit que

$$x_{nn} \min_{E'_{12}} D_{n-1} \geqslant \min_{E_{12}} D_n$$

et, en vertu de (10)

$$\min_G D_n \geqslant \min_{E_{12}} D_n.$$

Cette dernière inégalité peut aussi être obtenue lorsque $x_{nn} < 0$; dans ce but, il suffit de remplacer partout, dans le raisonnement précédent, $\min D_{n-1}$ par $\max D_{n-1}$.

Comme l'indice n ne joue dans le déterminant D_n aucun rôle distingué, on a la proposition générale suivante:

Si en un point $x \epsilon G$, où D_n atteint son minimum, on a $D_n = x_{ii}A_{ii}$ pour un indice i, alors $\min_G D_n \geqslant \min_{E_{12}} D_n$.

Pareillement on parvient à la proposition:

Si en un point $x \epsilon G$, où D_n atteint son maximum, on a $D_n = x_{ii}A_{ii}$ pour un indice i, alors $\max_G D_n \leqslant \max_{E_{12}} D_n$.

Ces propositions, de caractère auxiliaire, nous seront utiles dans la suite de la démonstration.

Les éléments diagonaux $x_{11}, \ldots, x_{nn}$ étant fixés, considérons le déterminant D_n comme une fonction des variables t_{ij}. On envisage les extrema de D_n dans le domaine

$$\sum_j{}' t_{ij}^2 \leqslant 1 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{11}$$

Si l'extremum de D_n est atteint en un point, où l'inégalité stricte

$$\sum_j{}' t_{ij}^2 < 1 \tag{12}$$

a lieu pour l'un au moins des indices i, alors on a, pour cet indice i,

$$\partial D_n / \partial t_{ij} = 0 \quad (j = 1, \ldots, n;\ j \neq i),$$

c'est-à-dire

$$2t_{ji}A_{ij} = 0 \quad (j = 1, \ldots, n;\ j \neq i). \tag{13}$$

En développant D_n suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne, on a, en vertu de (13),

$$D_n = x_{ii}A_{ii},$$

ce qui entraîne (9).

Si l'inégalité stricte (12) n'a lieu pour aucun indice i, on a

$$\sum_j{}' t_{ij}^2 = 1 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Dans ce cas nous emploierons la méthode bien connue de Lagrange. Nous introduisons donc la fonction

$$F = D_n - \sum_i k_i \Big(\sum_j{}' t_{ij}^2 - 1 \Big)$$

et écrivons

$$\partial F / \partial t_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n;\ i \neq j),$$

ou bien, après quelques calculs très faciles,

$$t_{ji}A_{ij} = k_i t_{ij}. \tag{14}$$

En multipliant (14) par t_{ij} et sommant suivant $j = 1, \ldots, n$, sauf $j = i$, il vient

$$D_n - x_{ii}A_{ii} = k_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Si l'une au moins des constantes k_i est nulle, on a $D_n = x_{ii}A_{ii}$ et (9) a lieu.

Considérons donc le cas où toutes les constantes k_i sont non nulles. Cela étant, multiplions chaque ligne du déterminant D_n par $|k_i|^{-1/2}$, où i est l'indice de la ligne multipliée, et ensuite chaque colonne du déterminant obtenu par $|k_j|^{1/2}$, où j est l'indice de la colonne multipliée. Ainsi tout élément $t_{ij}t_{ji}$ a été multiplié par $\left|\frac{k_j}{k_i}\right|^{1/2}$. Finalement, la valeur du déterminant n'a pas changé. De plus, les éléments diagonaux et ceux des éléments latéraux qui sont nuls n'ont pas changé. Pour $t_{ij} \neq 0$ on a, en vertu de (14), $t_{ji} \neq 0$ et $A_{ij} \neq 0$, donc

$$\left|\frac{k_j}{k_i}\right|^{1/2} = \left|\frac{t_{ij}}{t_{ji}}\right|,$$

car $A_{ij} = A_{ji}$. Tout élément latéral $x_{ij} = t_{ij}t_{ji}$ devient donc, après la transformation,

$$x_{ij} = t_{ij}^2 \operatorname{sgn}(t_{ij}t_{ji}).$$

On voit que le déterminant transformé satisfait aux relations (E) et (2), qui déterminent l'ensemble E_2. Donc, si au point pour lequel le raisonnement vient d'être fait, l'extremum atteint est le minimum, on a

$$\min_G D_n \geqslant \min_{E_2} D_n.$$

Si, au contraire, l'extremum atteint est un maximum, on a

$$\max_G D_n \leqslant \max_{E_2} D_n.$$

En vertu de (5), ces inégalités entraînent (9). La démonstration de (6) est ainsi achevée.

4. Lorsque x appartient à E_1, E_{12} où E_{13}, les éléments latéraux de chaque ligne, sauf un élément au plus, sont nuls. Par conséquent, la forme du déterminant est particulierement simple.

Supposons tout d'abord que $x \in E_1$. Si pour un certain indice i, tous les éléments latéraux de la $i^{\text{ème}}$ ligne ou bien tous les éléments latéraux de la $i^{\text{ème}}$ colonne sont nuls, on a

$$D_n = x_{ii}A_{ii},$$

où A_{ii} est le mineur adjoint à l'élément x_{ii}. Soient $x_{i_1i_1}, \ldots, x_{i_pi_p}$ tous les éléments diagonaux appartenant aux lignes ou aux colonnes dont tous les éléments latéraux sont nuls. Alors on peut écrire

$$D_n = x_{i_1i_1} \ldots x_{i_pi_p} \cdot A_1,$$

où A_1 est le mineur qu'on obtient en effaçant les lignes et les colonnes avec les indices $i_1, \ldots, i_p$ du déterminant D_n. Lorsque $p = n$, on efface toutes les lignes et colonnes et il faut poser, dans ce cas, $A_1 = 1$. Dans le cas contraire, A_1 est évidemment un déterminant d'ordre 2, au moins. En tenant compte de la relation (E), on voit que toute ligne de ce déterminant contient exactement un élément latéral non nul (égal à -1 ou 1). Il est aussi facile de remarquer que, pareillement, toute colonne de A_1 contient exactement un élément latéral non nul (égal à -1 ou 1). En effet, toute colonne contient au moins un tel élément, car les colonnes qui en sont dépourvues ont été effacées. Si une colonne de A_1 contenait plusieurs éléments latéraux non nuls, le nombre total d'éléments latéraux non nuls de A_1 serait supérieur au degré du déterminant A_1, ce qui est impossible, car toute ligne contient exactement un élément latéral non nul.

Désignons par $x_{j_1j_2}$ un élément latéral non nul quelconque de A_1 et par $x_{j_2j_3}$ l'élément latéral non nul de la $j_2^{\text{ème}}$ ligne. Si $j_3 \neq j_1$, désignons par $x_{j_3j_4}$ l'élément latéral non nul appartenant à la $j_3^{\text{ème}}$ ligne, et ainsi de suite. En continuant ce procédé, nous parviendrons enfin à une suite d'indices

$$j_1, \ldots, j_{q+1}$$

qui sont tous différents, sauf le dernier qui est égal au premier: $j_1 = j_{q+1}$. Tout élément latéral de A_1, sauf $x_{j_1j_2}, \ldots, x_{j_qj_{q+1}}$, est nul. Il s'ensuit que A_1 se laisse représenter comme le produit de deux déterminants

$$A_1 = B_1A_2,$$

où B_1 s'obtient de A_1, en effaçant toutes les lignes et les colonnes dont les indices sont différents de $j_1, \ldots, j_q$, et A_2 s'obtient de A_1, en effaçant toutes les lignes et les colonnes d'indices $j_1, \ldots, j_q$. Il est facile de voir que

$$B_1 = x_{j_1j_1} \ldots x_{j_qj_q} \pm 1.$$

Si $B_1 = A_1$, on pose $A_2 = 1$. Sinon, nous procédons avec le déterminant A_2, comme nous venons de le faire avec A_1, et ainsi de suite. Enfin, le déterminant D_n sera développé en produit

$$D_n = x_{i_1i_1} \ldots x_{i_pi_p}(x_{j_1j_1} \ldots x_{j_qj_q} \pm 1) \ldots (x_{l_1l_1} \ldots x_{l_sl_s} \pm 1), \tag{15}$$

où le système d'indices $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q, \ldots, l_1, \ldots, l_s$ est une permutation des nombres $1, \ldots, n$. On a naturellement $p+q+\ldots+s = n$; il n'est pas exclu que p ou les entiers suivants $q, \ldots, s$ soient nuls; les facteurs correspondants de (15) sont alors à remplacer par 1.

La formule (15) représente la forme la plus générale de D_n pour $x \in E_1$.

Lorsque $x \in E_{12}$, la forme est la même, mais il faut tenir compte de la relation (2), qui entraîne que tous les facteurs

$$x_{k_1k_1} \ldots x_{k_rk_r} \pm 1, \tag{16}$$

où $r = 2$, sont de la forme

$$\begin{vmatrix} x_{k_1k_1} & \pm 1 \\ \pm 1 & x_{k_2k_2} \end{vmatrix} = x_{k_1k_1}x_{k_2k_2} - 1;$$

grâce à la relation (2) le signe précédant 1 est bien déterminé.

Lorsque $x \in E_{13}$, la condition (3) entraîne que $r = 2$ dans tous les facteurs de la forme (16), la formule (15) devient donc

$$D_n = x_{i_1i_1} \ldots x_{i_pi_p}(x_{j_1j_1}x_{j_2j_2}-1) \ldots (x_{l_1l_1}x_{l_2l_2}-1). \tag{17}$$

5. Supposons maintenant que

$$x_{ii} \geqslant 1 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Alors on a

$$x_{k_1k_1} \ldots x_{k_rk_r} \pm 1$$
$$\geqslant \begin{cases} (x_{k_1k_1}x_{k_2k_2}-1) \ldots (x_{k_{r-1}k_{r-1}}x_{k_rk_r}-1) & \text{pour } r \text{ pair,} \\ (x_{k_1k_1}x_{k_2k_2}-1) \ldots (x_{k_{r-2}k_{r-2}}x_{k_{r-1}k_{r-1}}-1)\,x_{k_rk_r} & \text{pour } r \text{ impair.} \end{cases}$$

Il s'ensuit que, pour $x \in E_1$, il existe un point $x_0 \in E_{13}$ tel que $D_n(x) \geqslant D_n(x_0)$. Par conséquent, on a

$$\min_{E_1} D_n \geqslant \min_{E_{13}} D_n.$$

D'autre part

$$\min_{E_1} D_n \leqslant \min_{E_{13}} D_n,$$

car $E_{13} \subset E_1$, donc

$$\min_{E_1} D_n = \min_{E_{13}} D_n \quad (x_{ii} \geqslant 1).$$

Cela entraîne (7), en vertu de (6).

Si les inégalités $x_{ii} \geqslant 1$ ne sont pas satisfaites, les relations (7) n'ont pas lieu en général. En effet, pour le déterminant (8) on a

$$\min_{E_{12}} D_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\min_{E_{13}} D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\min_{G} D_3 = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{4};$$

la dernière égalité s'obtient facilement en appliquant le calcul différentiel. On a dans le cas considéré $\min\limits_{E_{12}} D_3 < \min\limits_{G} D_3 < \min\limits_{E_{13}} D_3$.

6. Il peut encore être intéressant d'écrire, dans certains cas particuliers, la forme explicite des extrema de D_n.

Supposons que $x_{ii} = r \geqslant 1$ $(i = 1, \ldots, n)$. Alors on obtient de (15) et (17):

$$\min_{E_1} D_n = \min_{E_{12}} D_n = \min_{E_{13}} D_n = \begin{cases} (r^2-1)^{n/2} & \text{pour } n \text{ pair,} \\ r(r^2-1)^{(n-1)/2} & \text{pour } n \text{ impair,} \end{cases}$$

$$\max_{E_1} D_n = \begin{cases} (r^2+1)^{n/2} & \text{pour } n \text{ pair,} \\ r(r^2+1)^{(n-1)/2} & \text{pour } n \text{ impair,} \end{cases}$$

$$\max_{E_{12}} D_n = \begin{cases} (r^3+1)^{n/3} & \text{pour } n \text{ divisible par 3,} \\ r(r^3+1)^{(n-1)/3} & \text{pour } n-1 \text{ divisible par 3,} \\ r^2(r^3+1)^{(n-2)/3} & \text{pour } n-2 \text{ divisible par 3,} \end{cases}$$

$$\max_{E_{13}} D_n = r^n.$$

Reçu par la Rédaction le 17. 5. 1957