ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

Sur le domaine de convergence des séries de polynômes homogènes de deux variables complexes

par F. Leja (Kraków)

1. Séries bornées sur un segment rectiligne. Soit Π l'espace des deux variables complexes x et y, A et A' deux points de Π de coordonnées (a, b) et (a', b') respectivement et

$$(1)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, y), \qquad \text{où} \qquad P_n(x, y) = a_{n0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \ldots + a_{0n}y^n,$$

une série de polynômes homogènes à coefficients complexes quelconques.

Désignons par J le segment rectiligne

$$(2)\qquad x = a + (a'-a)t, \qquad y = b + (b'-b)t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

joignant les points A et A', par $|AA'|$ la quantité

$$|AA'| = \tfrac{1}{2}|ab' - ba'|,$$

dite *distance triangulaire*(1) des points A et A', par u le point variable de coordonnées (x, y) et par $t(u) = t(x, y)$ la fonction homogène des variables x et y définie, si $|AA'| > 0$, par la formule

$$(3)\qquad t(x, y) = \frac{|Au| + |A'u| + \sqrt{(|Au| + |A'u|)^2 - |Bu|^2}}{|AA'|},$$

où B est le point de coordonnées $(a'-a, b'-b)$(2). Je dis que:

Si la série (1) *est bornée au moins presque partout sur le segment* (2) *et* $|AA'| > 0$, *elle converge uniformément dans le voisinage de tout point* (x, y) *du domaine D de l'espace Π défini par l'inégalité* $t(x, y) < 1$.

Démonstration. Il suit de l'hypothèse que la suite $\{P_n(x, y)\}$ est bornée presque partout sur le segment (2), d'où l'on conclut(3) que la

(1) La distance proprement dite est égale à $\sqrt{|a'-a|^2 + |b'-b|^2}$.

(2) Par définition $|Au| = \frac{1}{2}|ay - bx|$, $|A'u| = \frac{1}{2}|a'y - b'x|$, $|Bu| = \frac{1}{2}|(a'-a)y - (b'-b)x|$.

(3) Cf. le travail [1].

suite $\{P_n(x,y)\theta^n\}$, où θ est un nombre quelconque $0<\theta<1$, est bornée uniformément sur J, c'est-à-dire il existe un nombre $M=M(\theta)>0$ tel que

$$|P_n(x,y)\theta^n|\leqslant M \quad \text{pour} \quad n=0,1,\ldots \quad \text{et} \quad (x,y)\in J. \tag{4}$$

La transformation linéaire

$$x'=\frac{(b'-b)x-(a'-a)y}{ab'-ba'}, \quad y'=\frac{-(b'+b)x+(a'+a)y}{ab'-ba'} \tag{5}$$

transforme J en le segment J' donné par les équations

$$x'=1, \quad y'=-1+2t, \quad 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{6}$$

et le polynôme $P_n(x,y)$ en un polynôme homogène $Q_n(x',y')$. Il suit de (4) que

$$|Q_n(1,y')\theta^n|\leqslant M \quad \text{pour} \quad n=0,1,\ldots \quad \text{et} \quad -1\leqslant y'\leqslant 1,$$

d'où l'on conclut, d'après un théorème de Bernstein, qu'en tout point y' du plan on a

$$|Q_n(1,y')\theta^n|\leqslant M(\alpha+\beta)^n, \quad n=0,1,\ldots, \tag{7}$$

où α et β sont les demi-axes de l'ellipse passant par y', de foyers -1 et 1, c'est-à-dire

$$\alpha=\tfrac{1}{2}(|1+y'|+|1-y'|), \quad \beta=\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}(|1+y'|+|1-y'|)\right)^2-1}.$$

Puisque $Q_n(x',y')\equiv x'^nQ_n(1,y'/x')$, on déduit de (7) pour $x'\neq 0$ et y' quelconques l'inégalité

$$|Q_n(x',y')\theta^n|\leqslant M(\alpha_1+\beta_1)^n, \tag{8}$$

où

$$\alpha_1=\tfrac{1}{2}(|x'+y'|+|x'-y'|), \quad \beta_1=\sqrt{\alpha_1^2-|x'|^2}. \tag{9}$$

Par continuité, l'inégalité (8) a lieu en tout point (x',y') de l'espace Π.

Retournons aux variables x et y. D'après (5) on a

$$\frac{x'+y'}{2}=\frac{ay-bx}{ab'-ba'}, \quad \frac{x'-y'}{2}=\frac{-a'y+b'x}{ab'-ba'} \tag{10}$$

et $\alpha_1+\beta_1=t(x,y)$, donc l'inégalité (8) prend la forme

$$|P_n(x,y)|\leqslant M\big(t(x,y)/\theta\big)^n \quad n=0,1,\ldots$$

Soit (x_0,y_0) un point quelconque du domaine D défini par l'inégalité $t(x,y)<1$ et θ et λ deux nombres positifs remplissant les conditions

$$t(x_0,y_0)<\theta<1 \quad \text{et} \quad t(x_0,y_0)/\theta<\lambda<1.$$

Alors l'inégalité $t(x,y)\leqslant\theta\lambda$ a lieu dans un voisinage du point (x_0,y_0) et, comme $P_n(x,y)\leqslant M\lambda^n$, $n=1,2,\ldots$, la série (1) converge absolument et uniformément dans ce voisinage, c. q. f. d.

La domaine D étudié dans la proposition précédente ne peut pas être augmenté, car

Il existe une série (1) *convergente uniformément sur le segment* (2) *et admettant des points de divergence dans chaque domaine partiel du domaine* $\{t(x,y)>1\}$.

En effet, soit $\{\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ un système de $n+1$ points du segment $-1\leqslant z\leqslant 1$ pour lesquels le produit de toutes les distances $|\eta_i-\eta_k|$ est le plus grand. Alors [2] les polynômes

$$L_n(z)=\frac{(z-\eta_1)\ldots(z-\eta_n)}{(\eta_0-\eta_n)\ldots(\eta_0-\eta_n)}, \quad n=1,2,\ldots \tag{11}$$

satisfont sur le segment $-1\leqslant z\leqslant 1$ à l'inégalité $|L_n(z)|\leqslant 1$ et la série $\sum_{n=1}^{\infty}L_n(z)/n^2$ converge uniformément sur ce segment. On sait [2] qu'en tout point du plan non situé sur le segment $-1\leqslant z\leqslant 1$ existe la limite

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|L_n(z)|}=|z+\sqrt{z^2-1}|=\alpha+\beta, \tag{12}$$

où $\alpha=\frac{1}{2}(|1+z|+|1-z|)$, $\beta=\sqrt{\alpha^2-1}$. Si z appartient à l'intervalle $\langle-1,1\rangle$ on a $\alpha+\beta=1$ et la formule (12) reste vraie dans un ensemble E situé au moins presque partout dans cet intervalle; dans l'ensemble complémentaire $\langle-1,1\rangle-E$ on a $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|L_n(z)|}\leqslant 1$.

Il en résulte que les polynômes homogènes $L_n(x',y')=x'^nL_n(y'/x')$, $n=1,2,\ldots$ satisfont sur le segment $\{x'=1,\ -1\leqslant y'\leqslant 1\}$ à l'inégalité $|L_n(x',y')|\leqslant 1$; en dehors de ce segment on a

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|L_n(x',y')|}\leqslant\alpha_1+\beta_1, \tag{13}$$

où α_1 et β_1 sont donnés par les formules (9) et l'inégalité (13) devient une égalité si le quotient $z=y'/x'$ n'appartient pas à l'intervalle $\langle-1,1\rangle$, ou bien s'il est situé presque partout dans cet intervalle.

Posons $\Pi_n(x,y)=L_n(x',y')$, $n=1,2,\ldots$, en appliquant la transformation (5). Les polynômes $\Pi_n(x,y)$ satisfont sur le segment (2) à l'inégalité $|\Pi_n(x,y)| \leqslant 1$ et la série $\sum_{n=1}^{\infty} \Pi_n(x,y)/n^2$ converge uniformément sur ce segment. Dans l'espace Π tout entier on a

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\Pi_n(x,y)|} \leqslant t(x,y)$$

et cette inégalité devient une égalité au moins presque partout dans Π. Par suite la série $\sum_{n=1}^{\infty} \Pi_n(x,y)/n^2$ jouit des propriétés demandées.

2. Séries bornées sur deux segments rectilignes. Soient α et $\beta > \alpha$ deux nombres positifs, S l'ensemble des points de deux segments $\alpha \leqslant z \leqslant \beta$ et $-\beta \leqslant z \leqslant -\alpha$ de l'axe réel du plan de la variable complexe z et $\{\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n\}$ un système de $n+1$ points de S pour lesquels le produit $\prod_{0\leqslant i<k\leqslant n} |\eta_i - \eta_k|$ est le plus grand. Désignons par $d(S)$ le diamètre transfini de S, par $L_n(z,S)$ le polynôme (11) et par $T_n(z,S)$ le polynôme de Tchebycheff de degré n correspondant à S.

On sait(⁴) que $d(S) = \sqrt{\alpha^2-\beta^2}/2$, $|L_n(z,S)| \leqslant 1$ aux points de S et en tout point z n'appartenant pas à S on a [3]

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|T_n(z,S)|} = d(S) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|L_n(z,S)|} > 1.$$

D'autre part, lorsque $n = 2\nu$ est pair on a [4]

$$T_{2\nu}(z,S) = \frac{1}{2^{2\nu}} \left[\left(\sqrt{z^2-\alpha^2} + \sqrt{z^2-\beta^2}\right)^{2\nu} + \left(\sqrt{z^2-\alpha^2} - \sqrt{z^2-\beta^2}\right)^{2\nu} \right],$$

d'où il suit que la limite $L(z,S) = \lim \sqrt[n]{|L_n(z,S)|}$ s'exprime par la formule

$$L(z,S) = \frac{\left|\sqrt{z^2-\alpha^2} + \sqrt{z^2-\beta^2}\right|}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}} \tag{14}$$

et que en dehors de S on a $L(z,S) > 1$.

La fonction $L(z,S)$ est égale à 1 sur S et jouit de la propriété suivante: si une suite de polynômes $\{P_n(z)\}$, dont $P_k(z)$ est de degré $\leqslant k$, est bornée dans S, alors en tout point du plan

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P_n(z)|} \leqslant L(z,S).$$

(⁴) Cf. les travaux [3] et [4].

Ceci posé, supposons que la série (1) soit bornée au moins presque partout dans l'ensemble S_1 des points (x,y), où

$$x = a + (a'-a)\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}, \quad y = b + (b'-b)\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}, \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta \quad \text{et} \quad -\beta \leqslant t \leqslant -\alpha. \tag{15}$$

Alors, si $0 < \theta < 1$, la suite $\{P_n(x,y)\theta^n\}$ est uniformément bornée dans S_1. Les équations

$$x' = \frac{(b'-b)x-(a'-a)y}{ab'-ba'}, \qquad y' = \frac{(\alpha b'-\beta b)x-(\alpha a'-\beta a)y}{ab'-ba'} \tag{16}$$

transforment S_1 en l'ensemble S des points (x',y') de la droite

$$x' = 1, \quad y' = t, \quad \text{où} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta \quad \text{et} \quad -\beta \leqslant t \leqslant -\alpha$$

et $P_n(x,y)$ en un polynôme $Q_n(x',y')$ tel que

$$|Q_n(x',y')\theta^n| \leqslant M, \qquad n = 0, 1, \ldots, \qquad (x',y') \in S,$$

où M est un nombre dépendant de θ, $0 < \theta < 1$. Par suite, quel que soit y' réel ou complexe on a

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|Q_n(1,y')|}\,\theta \leqslant L(y',S),$$

où θ est arbitrairement voisin de 1, d'où il suit que, quels que soient x', y',

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|Q_n(x',y')|} \leqslant \frac{\left|\sqrt{y'^2-\alpha^2x'^2} + \sqrt{y'^2-\beta^2x'^2}\right|}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}. \tag{17}$$

On suppose que les branches des radicaux sont telles qu'en tout point (x',y') de l'espace Π différant de l'origine des coordonnées le second membre de (17) est plus grand que $|x'|$.

Retournons aux variables x et y et désignons par $t(x,y,S_1)$ le second membre de (17)

$$t(x,y,S_1) = \frac{\left|\sqrt{y'^2-\alpha^2x'^2} + \sqrt{y'^2-\beta^2x'^2}\right|}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}} \tag{18}$$

où x' et y' sont donnés par les formules (16). Puisque

$$Q_n(x',y') = P_n(x,y), \qquad n = 0, 1, \ldots$$

on a

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P_n(x,y)|} \leqslant t(x,y,S_1).$$

Par suite:

Si la série (1) *est bornée au moins presque partout sur deux segments définis par* (15), *où* $|ab'-ba'|>0$, *cette série converge uniformément dans le voisinage de tout point* (x,y) *du domaine* D_1 *défini par l'inégalité* $t(x,y,S_1)<1$.

Comme dans le numéro 1, on peut prouver que le domaine $t(x,y,S_1)<1$ ne peut pas être augmenté.

Travaux cités

[1] F. Leja, *Sur les séries de polynômes homogènes*, Rendic. del Circ. Math. di Palermo 56 (1932), p. 1-27.

[2] — *Sur les suites de polynômes, les ensembles fermés et la fonction de Green*, Ann. Soc. Pol. Math. 12 (1933), p. 57-71.

[3] — *Sur les polynômes de Tchebycheff et la fonction de Green*, Annales Soc. Pol. Math. 19 (1947), p. 1-6.

[4] G. Pólya und G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, B. II, Berlin 1925, p. 86 et 282.

Reçu par la Rédaction le 11. 4. 1958

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

Sur un critère d'oscillation des intégrales de l'équation différentielle $(Q(t)x')'+f(t)x=0$

par Z. Opial (Kraków)

1. Dans la note [1] M. Zlámal a établi le critère suivant d'oscillation des intégrales de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(Q(t)x')'+f(t)x=0 \tag{1}$$

où $Q(t)$ et $f(t)$ sont des fonctions continues dans l'intervalle $\langle 0,+\infty)$ et $Q(t)>0$:

Si l'on a

$$\int_0^\infty \frac{ds}{Q(s)}=+\infty \tag{2}$$

et s'il existe une fonction $\omega(t)$ *positive, continue ainsi que sa dérivée première et telle que*

$$\int_0^\infty \frac{Q(s)}{\omega(s)}\omega'^2(s)\,ds<+\infty, \tag{3}$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \omega(s)f(s)\,ds=+\infty, \tag{4}$$

alors l'équation (1) *est oscillatoire, c'est-à-dire chaque solution de cette équation s'annule une infinité de fois dans l'intervalle* $\langle 0,+\infty)$.

Dans la présente note, je vais montrer qu'en modifiant légèrement la démonstration de ce théorème on peut remplacer les conditions (3) et (4) par une seule condition plus générale. Dans le paragraphe 4 je donne un théorème sur l'allure asymptotique des solutions de l'équation (1) dans le cas où $Q(t)=1$ et dans l'hypothèse que l'équation envisagée n'est pas oscillatoire. Ce théorème constitue la généralisation d'un théorème de A. Wintner [2].