ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

Zur Berührung von zweien Mannigfaltigkeiten in einem affin-euklidischen Raum

von F. Nožička (Praha)

Der Begriff „die Berührung von Mannigfaltigkeiten" ist zweifellos ein Grundbegriff der Differentialgeometrie. Im folgenden wird über die Berührung von Kurven, Flächen und Hyperflächen gesprochen, die in einem affin-euklidischen n-diemensionalen Raume eingebettet sind. Der Begriff der Berührung von Mannigfaltigkeiten, von dem die Rede sein wird, ist invariant im Sinne der affinen Geometrie, et steht nicht im Widerspruch mit dem topologischen Charakter der Berührung und ist im Einklang mit den üblichen metrischen Definitionen der Berührung.

Unter E_n verstehen wir den linearen affinen n-dimensionalen Raum ($n \geqslant 2$), der mit den kartesischen Koordinaten x^α $(\alpha = 1, \ldots, n)$ versehen ist. Wir betrachten nun in E_n zwei lokal differenzierbare Mannigfaltigkeiten ${}^{(1)}X_p, {}^{(2)}X_p$ von gleicher Dimension p, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, die durch die parametrischen Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} {}^{(1)}x^\alpha &= {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) \\ {}^{(2)}x^\alpha &= {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a) \end{aligned} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, p)$$

beschrieben werden. Dabei setzen wir voraus:

a. Der Punkt $\underset{0}{P} \in E_n$ mit den Koordinaten $\underset{0}{x}^\alpha$ sei den beiden Mannigfaltigkeiten ${}^{(1)}X_p, {}^{(2)}X_p$ gemeinsam; er entspricht den Werten ${}^{(1)}\underset{0}{\eta}^a$ der Parameter ${}^{(1)}\eta^a$ von ${}^{(1)}X_p$ und den Werten ${}^{(2)}\underset{0}{\eta}^a$ der Parameter ${}^{(2)}\eta^a$ von ${}^{(2)}X_p$.

b. Die Funktionen ${}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a)$, ${}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a)$ besitzen stetige partielle Ableitungen

$$\begin{aligned} {}^{(1)}B^\alpha_{a_1\ldots a_l} &= \frac{\partial^l\, {}^{(1)}x^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{a_1}\ldots\partial^{(1)}\eta^{a_l}} \\ {}^{(2)}B^\alpha_{a_1\ldots a_l} &= \frac{\partial^l\, {}^{(2)}x^\alpha}{\partial^{(2)}\eta^{a_1}\ldots\partial^{(2)}\eta^{a_l}} \end{aligned} \qquad (l = 1, \ldots, k;\ a_1, \ldots, a_l \in 1, \ldots, p)$$

in einer gewissen Umgebung des Punktes $\underset{0}{P}$ der beiden Mannigfaltigkeiten.

c. Der Punkt $\underset{0}{P}$ sei ein regulärer Punkt von ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$, d. h. die Matrizen

$$\begin{matrix} ({}^{(1)}B_a^1, {}^{(1)}B_a^2, \dots, {}^{(1)}B_a^n) \\ ({}^{(2)}B_a^1, {}^{(2)}B_a^2, \dots, {}^{(2)}B_a^n) \end{matrix} \qquad (a = 1, \dots, p)$$

haben in $\underset{0}{P}$ einen möglichst grossen Rang p.

Wir wählen nun ein beliebiges System von $n-p$ konstanten Vektoren $\underset{0}{\overset{(1)}{V}}{}^\alpha, \dots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{V}}{}^\alpha$ in E_n, die die folgende Eigenschaft besitzen:

(2)
$$\Delta_1 \equiv [{}^{(1)}\underset{0}{B}{}_1^\alpha, \dots, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}_p^\alpha, \underset{0}{\overset{(1)}{V}}{}^\alpha, \dots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{V}}{}^\alpha] \neq 0,$$
$$\Delta_2 \equiv [{}^{(2)}\underset{0}{B}{}_1^\alpha, \dots, {}^{(2)}\underset{0}{B}{}_p^\alpha, \underset{0}{\overset{(1)}{V}}{}^\alpha, \dots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{V}}{}^\alpha] \neq 0.$$

(Das symbol $\underset{0}{B}{}_a^\alpha$ bezeichnet den Wert der Grösse B_a^α in $\underset{0}{P}$). Es gilt nun folgende Behauptung:

Durch das system von Gleichungen

(I)
$${}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a) - {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}\, \underset{0}{\overset{(s)}{V}}{}^\alpha$$

wird lokal eine bestimmte Korrespondenz zwischen den Punkten der beiden Mannigfaltigkeiten ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ *definiert, die in einer genügend kleinen Umgebung von* $\underset{0}{P}$ *ein-eindeutig ist.*

Durch die Gleichungen (I) werden eindeutig die Funktionen

(3)
$$\begin{aligned} {}^{(2)}\eta^a &= {}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\eta^b) \qquad (a = 1, \dots, p), \\ \underset{s}{\lambda} &= \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a) \qquad (s = 1, \dots, n-p) \end{aligned}$$

in einer genügend kleinen Umgebung des Punktes $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^a)$ bestimmt. Sie besitzen in der erwähnten Umgebung stetige partielle Ableitungen

$${}^{(2)}_{(1)}A^a_{b_1 \dots b_l} \equiv \frac{\partial^l\, {}^{(2)}\eta^a}{\partial^{(1)}\eta^{b_1} \dots \partial^{(1)}\eta^{b_l}}, \qquad \underset{s}{\lambda}_{a_1 \dots a_l} \equiv \frac{\partial^l \underset{s}{\lambda}}{\partial^{(1)}\eta^{a_1} \dots \partial^{(1)}\eta^{a_l}}$$

mit der von Null verschiedenen Determinante $[{}^{(2)}_{(1)}A^a_b]$.

Für die totalen Differentiale l-ter Ordnung der Funktionen $\underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)$ führen wir die übliche Bezeichnung $d^l \underset{s}{\lambda}$ ein. Den Symbolen $(d\underset{s}{\lambda})_0$, $(d^2\underset{s}{\lambda})_0$, $\dots$, $(d^l\underset{s}{\lambda})_0$, $\dots$ schreiben wir dann die Bedeutung des ersten, zweiten, $\dots$, l-ten Differentials der Funktion $\underset{s}{\lambda}$ im Punkte $\underset{0}{P}$ zu. Wir stellen nun die folgende Definition auf:

Es sei (1) die parametrische Beschreibung von zweien regulären Mannigfaltigkeiten ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ in E_n, denen der Punkt $\underset{0}{P}$ gemeinsam ist. Falls bei einer Korrespondenz von Typus (I) die Bedingungen

$$(d^l \underset{s}{\lambda})_0 = 0 \qquad \text{für} \qquad l = 1, \dots, k;\ s = 1, \dots, n-p$$

erfüllt sind, dann sagen wir, dass *die Mannigfaltigkeiten* ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ *in dem gemeinsamen Punkte* $\underset{0}{P}$ *eine Berührung mindestens k-ter Ordnung besitzen.*

Es lässt sich nun folgendes beweisen:

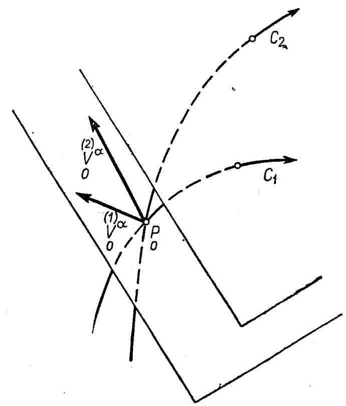

Fig. 1.

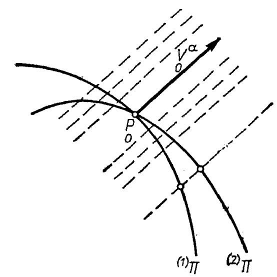

Fig. 2.

Setzen wir voraus, dass die Mannigfaltigkeiten ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ *in ihrem gemeinsamen Punkt* $\underset{0}{P}$ *eine Berührung mindestens k-ter Ordnung besitzen* ($k \geqslant 1$). *Diese Tatsache ist dann unabhängig*

1° *von der Wahl des konstanten* $(n-p)$*-Vektors* $\underset{0}{\overset{(1)}{V}}{}^\alpha, \dots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{V}}{}^\alpha$ *in der Korrespondenz* (I), *soweit die Bedingungen* (2) *erfüllt sind;*

2° *von der Wahl des Parametersystems der Mannigfaltigkeiten* ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X^p$;

3° *von der Wahl des Bezugsystems in* E_n.

Die eben ausgesprochene Behauptung unterstreicht die Invarianz des eingenführten Begriffs der Berührung im Sinne der affinen Differentialgeometrie.

Man stellt nun leicht die hinreichenden und notwendigen Bedingungen für die Berührung von zweien Mannigfaltifkeiten ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ in analytischer Form auf. Diese Bedingungen lassen sich dann mit Hilfe gewisser Gleichungen zwischen den wichtigsten Tensorgrössen beider Mannigfaltigkeiten ausdrücken(1).

Die Korrespondenz (I) hat einen einfachen geometrichen Sinn. Betrachten wir zum Beispiel in E_3 zwei Kurven C_1, C_2, die den gemeinsamen Punkt $\underset{0}{P}$ besitzen. Dieses entspricht dem Spezialfalle $n = 3$, $p = 1$ der Theorie. Wir wählen zwei linear-unabhängige konstante Vektoren $\overset{(1)}{\underset{0}{V}}{}^a$, $\overset{(2)}{\underset{0}{V}}{}^a$ mit dem Anfangspunkt in $\underset{0}{P}$ so, dass die Bedingungen (2) für diesen Spezialfall erfüllt sind. Dieses bedeutet geometrisch, dass die durch $\underset{0}{P}$, $\overset{(1)}{\underset{0}{V}}{}^a$, $\overset{(2)}{\underset{0}{V}}{}^a$ bestimmte Ebene keinen der Tangentialvektoren der Kurven C_1, C_2 in $\underset{0}{P}$ enthält. Wenn wir in genügend kleiner Umgebung von $\underset{0}{P}$ die Schar der mit der Ebene $(\underset{0}{P}, \overset{(1)}{\underset{0}{V}}{}^a, \overset{(2)}{\underset{0}{V}}{}^a)$ parallelen Ebenen betrachten, dann sind es gerade die Schnittpunkte der Ebene der Schar mit den Kurven C_1, C_2, die der Korrespondenz (I) entsprechen (Fig. 1).

In Falle $n = 3$, $p = 2$ handelt es sich um zwei reguläre Flächen mit dem gemeinsamen Punkt $\underset{0}{P}$. Wir wählen beliebig den konstanten Vektor $\underset{0}{V}{}^a$ mit dem Anfangspunkt in $\underset{0}{P}$, welcher in keiner der beiden Tangentialebenen der gegebenen Flächen ${}^{(1)}\Pi$, ${}^{(2)}\Pi$ im $\underset{0}{P}$ liegt. Die Korrespondenz (I) wird dann in genügend kleiner Umgebung von $\underset{0}{P}$ durch die mit $\underset{0}{V}{}^a$ parallelen Geraden realisiert (Fig. 2).

Reçu par la Rédaction le 3. 12. 1957

---

(1) Die Beweise der oben ausgesprochenen Sätze sind in einer anderen Zeitschrift (Časopis pro pěstování matematiky, 83 (1958), S. 171-201) veröffentlicht.

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

Sur une inégalité de C. de la Vallée Poussin dans la théorie de l'équation différentielle linéaire du second ordre

par Z. Opial (Kraków)

Considérons l'équation différentielle linéaire et homogène du second ordre

$$x'' + g(t)x' + f(t)x = 0, \tag{1}$$

à coefficients réels et continus. Soit $x(t)$ une intégrale non triviale de cette équation s'annulant deux fois dans un intervalle. Soit, pour fixer les idées:

$$x(0) = 0 \quad \text{et} \quad x(h) = 0 \quad (h > 0).$$

Alors, en vertu d'un théorème général de de la Vallée Poussin (v. [1], p. 138 ou [2], p. 183) appliqué à l'équation particulière (1), on doit avoir

$$1 < 2mh + kh^2/2, \tag{2}$$

où $2m = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant h} |g(t)|$ et $k = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant h} |f(t)|$.

Récemment Ph. Hartman et A. Wintner [3] ont démontré l'inégalité plus précise

$$1 < mh + kh^2/6. \tag{3}$$

On peut se demander si l'inégalité (3) est la meilleure possible de ce type ou, plus précisément, si les coefficients constants 1 et $\frac{1}{6}$ sont les plus petits possibles. Je démontre dans cette note que la réponse à cette question est négative et que ces coefficients peuvent être remplacés par $4/\pi^2$ et $1/\pi^2$ respectivement et, par conséquent, l'inégalité (3) par celle-ci

$$\pi^2 \leqslant 4mh + kh^2, \tag{4}$$

le signe d'égalité n'étant possible que dans le cas où $m = 0$. Bien plus, de la démonstration il résultera que l'inégalité (4) est la meilleure possible de ce type.