ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

Nouvelles remarques sur l'équation différentielle $u''+a(t)u=0$

par Z. Opial (Kraków)

Le but de cette note est de compléter d'une certaine façon les résultats d'une de mes notes antérieures (v. [1]) consacrée au problème de la stabilité de l'intégrale identiquement nulle de l'équation $u''+a(t)u=0$ dans le cas où $\lim\limits_{t\to\infty}a(t)=+\infty$.

1. Théorème 1. *Si la fonction $a(t)$ continue et positive pour $t\geqslant 0$ tend vers l'infini en ne décroissant pas et $q(t)$ est une fonction continue telle que*

$$\int_0^\infty \frac{|q(t)|}{\sqrt{a(t)}}\,dt<+\infty, \tag{1}$$

toutes les intégrales non triviales de l'équation

$$u''+\big(a(t)+q(t)\big)u=0 \tag{2}$$

sont bornées sur le demi-axe $t\geqslant 0$ tout entier et, de plus, il en existe au moins une qui tend vers zéro lorsque $t\to\infty$.

Démonstration. Prenons une intégrale arbitraire $u(t)$ de l'équation (2). On a pour $t\geqslant 0$

$$u^2(t)+\frac{u'^2(t)}{a(t)}=u^2(0)+\frac{u'^2(0)}{a(0)}+\int_0^t d\left(u^2(t)+\frac{u'^2(t)}{a(t)}\right)$$

$$=u^2(0)+\frac{u'^2(0)}{a(0)}+\int_0^t\left[2u(t)u'(t)+\frac{2u'(t)u''(t)}{a(t)}\right]dt-\int_0^t\frac{u'^2(t)}{a^2(t)}\,da(t).$$

Mais $u''(t)\equiv -a(t)u(t)-q(t)u(t)$. On a donc

$$u^2(t)+\frac{u'^2(t)}{a(t)}=C-\int_0^t\frac{u'^2(t)}{a^2(t)}\,da(t)-\int_0^t\frac{2u'(t)u(t)}{a(t)}\,q(t)\,dt \tag{3}$$

C étant une constante positive. En vertu de l'hypothèse que la fonction $a(t)$ est non décroissante, la première de ces intégrales est toujours non négative. D'autre part

$$\left|\frac{2u'(t)u(t)}{\sqrt{a(t)}}\right| \leqslant u^2(t)+\frac{u'^2(t)}{a(t)}. \tag{4}$$

On a donc

$$u^2(t)+\frac{u'^2(t)}{a(t)} \leqslant C+\int_0^t \left[u^2(t)+\frac{u'^2(t)}{a(t)}\right]\frac{|q(t)|}{\sqrt{a(t)}}\,dt$$

et, en vertu d'une propriété bien connue des inégalités de ce genre (voir [2], p. 35),

$$u^2(t)+\frac{u'^2(t)}{a(t)} \leqslant C\exp\left(\int_0^t \frac{|q(t)|}{\sqrt{a(t)}}\,dt\right) \leqslant C\exp\left(\int_0^\infty \frac{|q(t)|}{\sqrt{a(t)}}\,dt\right).$$

Il en résulte qu'il existe un nombre fini M tel que pour tout $t \geqslant 0$

$$|u(t)| \leqslant M \quad \text{et} \quad \left|\frac{u'(t)}{\sqrt{a(t)}}\right| \leqslant M. \tag{5}$$

La première partie de la conclusion se trouve ainsi démontrée.

Revenons maintenant à la formule (3). En vertu des inégalités (5) on a

$$2\int_0^t \left|u(t)\frac{u'(t)}{\sqrt{a(t)}}\cdot\frac{q(t)}{\sqrt{a(t)}}\right|dt \leqslant 2M^2\int_0^t \frac{|q(t)|}{\sqrt{a(t)}}\,dt \leqslant 2M^2\int_0^\infty \frac{|q(t)|}{\sqrt{a(t)}}\,dt.$$

Cela veut dire que la deuxième intégrale de la formule (3) tend vers une limite finie lorsque $t\to+\infty$. La première intégrale de la même formule, en tant que fonction non décroissante, tend aussi vers une limite qui, à cause de la forme de cette formule (son premier membre est toujours positif) doit être finie. La fonction $u^2(t)+u'^2(t)/a(t)$ tend donc, pour $t\to+\infty$, vers une limite finie. L'intégrale $u(t)$ était tout à fait arbitraire, toutes les autres intégrales de l'équation (2) jouissent donc de la même propriété. D'autre part, d'après l'hypothèse, $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = +\infty$. Mais ces deux propriétés suffisent pour que l'on puisse, en répétant le raisonnement de M. G. Trevisan (voir [3] ou [1]), démontrer la seconde partie de la conclusion.

Théorème II. *Dans les hypothèses du théorème précédent, pour toute intégrale $u(t)$ de l'équation* (2) *la fonction*

$$A(t) = \sqrt{u^2(t)+\frac{u'^2(t)}{a(t)}}$$

est à variation bornée dans l'intervalle $\langle 0, +\infty)$.

Démonstration. Dans tout intervalle fini $\langle 0, t\rangle$ on a

$$\int_0^t |dA(t)| = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{A(t)}|dA^2(t)| = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{A(t)}\left|d\left(u^2(t)+\frac{u'^2(t)}{a(t)}\right)\right|$$

d'où on trouve de la même manière que dans la démonstration du théorème I:

$$\begin{aligned}\int_0^t |dA(t)| &= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{A(t)}\left|\frac{2u(t)u'(t)q(t)}{a(t)}\,dt+\frac{u'^2(t)}{a^2(t)}\,da(t)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{A(t)}\left(u^2(t)+\frac{u'^2(t)}{a(t)}\right)\frac{|q(t)|}{\sqrt{a(t)}}\,dt+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{A(t)}\cdot\frac{u'^2(t)}{a^2(t)}\,da(t) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t A(t)\frac{|q(t)|}{\sqrt{a(t)}}\,dt+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{A(t)}\cdot\frac{u'^2(t)}{a^2(t)}\,da(t).\end{aligned}$$

La fonction $A(t)$ étant bornée, comme nous l'avons montré, la première de ces deux dernières intégrales est convergente. Pour démontrer complètement la conclusion il reste à montrer que la seconde l'est aussi. Or

$$\begin{aligned}A(t) &= A(0)+\int_0^t dA(t) = A(0)+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{A(t)}\,dA^2(t) \\ &= A(0)-\frac{1}{2}\int_0^t \frac{2u(t)u'(t)q(t)}{A(t)a(t)}\,dt-\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{A(t)}\cdot\frac{u'^2(t)}{a^2(t)}\,da(t).\end{aligned}$$

La fonction $A(t)$ étant toujours positive, on en tire l'inégalité

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{A(t)}\cdot\frac{u'^2(t)}{a^2(t)}\,da(t) \leqslant A(0)+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{A(t)}\left|\frac{2u(t)u'(t)}{\sqrt{a(t)}}\right|\frac{|q(t)|}{\sqrt{a(t)}}\,dt$$

d'où, en vertu de l'inégalité (4) on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{A(t)}\cdot\frac{u'^2(t)}{a^2(t)}\,da(t) &\leqslant 2A(0)+\int_0^t \frac{1}{A(t)}\left(u^2(t)+\frac{u'^2(t)}{a(t)}\right)\frac{|q(t)|}{\sqrt{a(t)}}\,dt \\ &= 2A(0)+\int_0^t A(t)\frac{|q(t)|}{\sqrt{a(t)}}\,dt.\end{aligned}$$

La fonction positive $A(t)$ étant bornée supérieurement pour tout $t \geqslant 0$, il résulte de l'hypothèse (1) que la fonction non décroissante

$$\int_0^t \frac{1}{A(t)} \cdot \frac{u'^2(t)}{a^2(t)} da(t)$$

tend vers une limite finie lorsque t croît indéfiniment. Le théorème II se trouve ainsi complètement démontré.

2. Prenons une intégrale quelconque $u(t)$ de l'équation (2). Soit $\{t_k\}$ la suite des extrema consécutifs de la fonction $u(t)$. On a pour tout k: $u'(t_k) = 0$ et, par suite, $|u(t_k)| = A(t_k)$. Du théorème II on obtient immédiatement:

COROLLAIRE. *Dans les hypothèses du théorème* I *pour toute intégrale* $u(t)$ *de l'équation* (2) *la suite* $|u(t_k)|$ *tend vers une limite finie et la série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big||u(t_{k+1})| - |u(t_k)|\big|$$

est convergente.

Remarque I. Les méthodes usuelles ne permettent de démontrer le théorème I que dans l'hypothèse que l'intégrale $\int_0^\infty |q(t)|\,dt$ est finie (v. par exemple [4]).

Remarque II. Au lieu de l'équation (2) on pourrait envisager l'équation plus générale

$$u'' + \big(a(t) + \psi(t) + q(t)\big)u = 0. \tag{6}$$

Alors, en combinant les méthodes de ma note mentionnée avec celles de la présente, on pourrait démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME Ia. *Si la fonction continue et positive* $a(t)$ *tend vers l'infini en ne décroissant pas lorsque* $t \to +\infty$, $\psi(t)$ *est une fonction à variation bornée dans tout intervalle fini et*

$$\int_0^\infty \frac{|d\psi(t)|}{a(t)} < +\infty, \qquad \int_0^\infty \frac{|q(t)|}{\sqrt{a(t)}} dt < +\infty, \tag{7}$$

alors toutes les intégrales non banales de l'équation (6) *sont bornées pour* $t \geqslant 0$ *et il en existe au moins une qui tend vers zéro lorsque* t *croît indéfiniment.*

Pour la démonstration de ce théorème il suffirait de remplacer la fonction $A(t)$ par la fonction du même type

$$B(t) = \sqrt{u^2(t) + \frac{u'^2(t)}{a(t)+\psi(t)}}$$

et de profiter des évaluations obtenues soit dans la présente note, soit dans la précédente.

Dans le cas de l'équation (6) la fonction $B(t)$ joue le rôle de $A(t)$ et c'est pour elle que l'on pourrait énoncer et démontrer un théorème analogue au théorème II.

3. Nous allons maintenant montrer que dans le théorème Ia les conditions (7) ne peuvent pas être remplacées par des conditions du même type, mais moins restrictives. En effet, nous démontrerons le théorème suivant:

THÉORÈME III. *Dans l'énoncé du théorème* Ia *on ne peut pas remplacer les conditions* (7) *par des conditions analogues*

$$\int_0^\infty \frac{|d\psi(t)|}{[a(t)]^{1+\varepsilon}} < +\infty \quad \textit{et} \quad \int_0^\infty \frac{|q(t)|}{[a(t)]^{1/2+\varepsilon}} < +\infty \tag{8}$$

quelque petit que soit $\varepsilon > 0$.

Démonstration. Prenons une suite $a_1, a_2, \ldots$ croissante de nombres positifs tels que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{a_n} = +\infty$$

et une autre suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ de nombre positifs tels que $\varepsilon_n < a_n$. Posons ensuite

$$\alpha_i = \frac{\pi}{2}\left(\sum_{k=1}^{i} \frac{1}{\sqrt{a_k}} + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{\sqrt{a_k-\varepsilon_k}}\right), \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_i = \alpha_i + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_i-\varepsilon_i}}$$
$$(i = 1, 2, \ldots).$$

Cela posé, nous définissons les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ de la manière suivante:

$$a(t) = a_i \quad \text{dans l'intervalle } (\beta_{i-1}, \beta_i\rangle \quad (i = 1, 2, \ldots),$$
$$b(t) = \begin{cases} 0 & \text{dans l'intervalle } (\beta_{i-1}, \alpha_i) \\ -\varepsilon_i & \text{dans l'intervalle } \langle \alpha_i, \beta_i\rangle \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Désignons par $u(t)$ l'intégrale de l'équation

$$u''+\big(a(t)+b(t)\big)u = 0 \tag{9}$$

déterminée par les conditions initiales: $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$. Nous entendons évidemment le terme „intégrale de l'équation (9)" dans un sens généralisé, puisque dans notre cas c'est une fonction de classe C^1 qui vérifie partout cette équation, sauf aux points a_i et β_i où elle ne possède pas de dérivée seconde.

Dans l'intervalle (β_0, a_1) l'équation (9) a la forme $u''+a_1 u = 0$. On a donc

$$u(t) = \cos\sqrt{a_1}\,t \qquad (\beta_0 \leqslant t \leqslant a_1). \tag{10}$$

Dans l'intervalle (a_1, β_1) la fonction $u(t)$ est une intégrale de l'équation $u''+(a_1-\varepsilon_1)u = 0$; on a donc

$$u(t) = A_1 \sin\sqrt{a_1-\varepsilon_1}(t-a_1)$$

A_1 étant une constante que l'on peut déterminer au moyen de la relation

$$\lim_{t\to a_1-0} u'(t) = \lim_{t\to a_1+0} u'(t)$$

c'est-à-dire de l'égalité

$$-\sqrt{a_1} = A_1\sqrt{a_1-\varepsilon_1}.$$

On a donc dans l'intervalle (a_1, β_1):

$$u(t) = -\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1-\varepsilon_1}}\sin\sqrt{a_1-\varepsilon_1}(t-a_1). \tag{11}$$

Des formules (10) et (11) on tire immédiatement

$$|u(\beta_1)| = \max_{0\leqslant t\leqslant \beta_1}|u(t)| = \sqrt{\frac{a_1}{a_1-\varepsilon_1}}.$$

De pareils calculs poursuivis indéfiniment conduisent aux relations générales

$$|u(\beta_i)| = \max_{0\leqslant t\leqslant \beta_i}|u(t)| = \sqrt{\frac{a_1}{a_1-\varepsilon_1}}\cdots\sqrt{\frac{a_i}{a_i-\varepsilon_i}}.$$

Par suite, pour que l'on ait $\limsup_{t\to+\infty}|u(t)| < +\infty$, il faut et il suffit que le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty}(1-\varepsilon_k/a_k)$ soit convergent ou, ce qui veut dire la même chose, que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k/a_k \tag{12}$$

le soit aussi.

D'autre part, comme il est facile de vérifier, on a:

$$\text{intégrale supérieure} \int_0^{\infty}\frac{|db(t)|}{[a(t)]^{1+\varepsilon}} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_k}{a_k^{1+\varepsilon}} \qquad (\varepsilon \geqslant 0) \tag{13}$$

et pareillement

$$\int_0^{\infty}\frac{|b(t)|}{[a(t)]^{1/2+\varepsilon}}dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_k}{a_k^{1/2+\varepsilon}}(\beta_k-a_k) = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_k}{a_k^{1/2+\varepsilon}\sqrt{a_k-\varepsilon_k}}. \tag{14}$$

On voit bien pourquoi, dans le cas particulier envisagé $\varepsilon = 0$, les conditions (7) (où l'on peut poser ou bien $\psi(t) = b(t)$, $q(t) = 0$, ou bien $\psi(t) = 0$, $b(t) = q(t)$) assurent la convergence de la série (12) et, par conséquent, l'existence d'une borne supérieure finie de la fonction $|u(t)|$. D'autre part, les formules (13) et (14) montrent que l'on ne peut pas remplacer les conditions (7) par les conditions (8), car la convergence des séries

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_k}{a_k^{1+\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_k}{a_k^{1/2+\varepsilon}\sqrt{a_k-\varepsilon_k}}$$

n'entraîne pas celle de la série (12).

Dans l'exemple exposé les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ sont, il est vrai, discontinues en une suite dénombrable de points a_i et β_i, mais, en introduisant de légères modifications dans les voisinages des points de discontinuité, on pourrait les remplacer par des fonctions continues sans détruire les propriétés en question des intégrales de l'équation (9).

Travaux cités

[1] Z. Opial, *Sur l'équation différentielle $u''+a(t)u = 0$*, Ann. Polon. Math. 5 (1958), p. 77-93.

[2] R. Bellman, *Stability theory of differential equations*, New York 1953.

[3] G. Trevisan, *Su l'equazione differenziale $y''(x)+A(x)y(x) = 0$*, Rend. Sem. Mat. di Padova 23 (1954), p. 340-342.

[4] G. Prodi, *Un'osservazione sugli integrali dell'equazione $y''+A(x)y = 0$ nel caso $A(x)\to+\infty$ per $x\to+\infty$*, Rend. Acc. Naz. Lincei 8 (1950), p. 462-464.

Reçu par la Rédaction le 16. 4. 1957